Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Худайберганов, А. М. Халкназаров, Ж. Абдуллаев, Об операторах Лапласа и
Хуа Ло-Кена, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 74–79

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-74-79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:40:09

Г. ХУДАЙБЕРГАНОВ, А. ХАЛКНАЗАРОВ, Ж. АБДУЛЛАЕВ

ОБ ОПЕРАТОРАХ ЛАПЛАСА И ХУА ЛО-КЕНА

Аннотация. Даны определения голоморфных и плюригармонических функций и для классических областей первого типа Э. Картана, изучены операторы Лапласа и Хуа Ло-Кена. Найдена связь между этими операторами.

Ключевые слова: классическая область, голоморфная функция, плюригармоническая функция, оператор Хуа Ло-Кена, оператор Лапласа, автоморфизм, цепное правило.

УДК: 517.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-74-79

1. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{mk}$. Точки $z \in \mathbb{C}^{mk}$ запишем в виде

$$z = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1k}; \dots; z_{m1}, z_{m2}, \dots, z_{mk}),$$

где $z_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} + iy_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, \dots, m$, $\nu = 1, 2, \dots, k$.

В некоторых вопросах точки пространства $\mathbb{C}^{mk}$ удобно представить как элементы матриц $[m \times k]$:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mk} \end{pmatrix} = Z.$$

Тогда имеет место изоморфизм $\mathbb{C}^{mk} \simeq \mathbb{C}[m \times k]$, где $\mathbb{C}[m \times k]$ — множество $[m \times k]$ -матриц.

Пусть

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_{1k}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \frac{\partial}{\partial z_{m2}} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_{mk}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\partial}_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{11}} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{12}} & \dots & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{1k}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{m1}} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{m2}} & \dots & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{mk}} \end{pmatrix}$$

— дифференциальные операторы (см. [1], с. 116).

Рассмотрим в некоторой окрестности U точки $z \in \mathbb{C}^{mk}$ функцию

$$f = f(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1k}; \dots; z_{m1}, z_{m2}, \dots, z_{mk})$$

из класса $C^1(U)$.

Определение 1. Будем говорить, что $f(Z)$ — голоморфная функция в U , если $\bar{\partial}_Z f = 0$ в $U \subset \mathbb{C}^{mk}$.

Заметим, что

$$\bar{\partial}_Z f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{\mu\nu}} = 0, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, k.$$

2. Пусть E — открытое множество в $\mathbb{C}^{mk}$ и $f \in C^2(E)$. Как обычно, определим классический лапласиан определим

$$\Delta f = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu}^2} \right) = 4 \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\mu\nu}}, \quad \bar{z}_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} - iy_{\mu\nu}, \quad \mu = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{1, k}.$$

Определение 2. Функцию $f(Z)$ от матрицы будем называть плюригармонической в точке $Z \in E$, если в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}} = 0, \quad \mu, \alpha = \overline{1, m}, \quad \nu, \beta = \overline{1, k}.$$

Оператор $\frac{\partial^2}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}}$ распадается на действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}} - i \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} + i \frac{\partial}{\partial y_{\alpha\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\mu\nu} \partial x_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2}{\partial y_{\mu\nu} \partial y_{\alpha\beta}} \right) + i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\mu\nu} \partial y_{\alpha\beta}} - \frac{\partial^2}{\partial y_{\mu\nu} \partial x_{\alpha\beta}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu} \partial x_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu} \partial y_{\alpha\beta}} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu} \partial y_{\alpha\beta}} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu} \partial x_{\alpha\beta}} &= 0, \quad \mu, \alpha = \overline{1, m}, \quad \nu, \beta = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем $2(mk)^2$ уравнений. При $\mu = \alpha, \nu = \beta$ имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu} \partial y_{\mu\nu}} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu} \partial x_{\mu\nu}} = 0.$$

Вторая группа уравнений тривиальным образом выполняется. А первая группа уравнений дает

$$\Delta f = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mu\nu}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mu\nu}^2} \right) = 0.$$

Следовательно, f — гармоническая функция.

Учитывая, что если $f = u + iv \in \mathcal{O}(E)$, то $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}} = 0$, т. е. действительная часть голоморфной функции — плюригармоническая функция:

$$\frac{\partial u}{\partial z_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_{\mu\nu}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_{\mu\nu} \partial \bar{z}_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{\alpha\beta}} \right) = 0.$$

Так как $-if = v - iu$, то мнимая часть голоморфной функции также плюригармоническая.

3. Рассмотрим оператор Хуа Ло-Кена в классической области Картана первого типа

$$K_1 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - ZZ^* > 0\},$$

где $I^{(m)}$ — единичная матрица $[m \times m]$, $Z^* = \bar{Z}'$ — матрица, комплексно сопряженная с транспонированной матрицей Z' ($H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, что H положительно определена, т. е. все собственные значения положительны).

Группа голоморфных автоморфизмов области K_1 состоит из преобразований вида [1]

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZD^* + C^*), \quad (1)$$

где $A - [m \times m]$ -матрица, $B - [m \times k]$ -матрица, $C - [k \times m]$ -матрица, $D - [k \times k]$ -матрица.

Эти матрицы удовлетворяют условиям

$$AA^* - BB^* = I^{(m)}, \quad AC^* = BD^*, \quad CC^* - DD^* = -I^{(k)},$$

которые можно также записать в виде

$$A^*A - C^*C = I^{(m)}, \quad A^*B = C^*D, \quad B^*B - D^*D = -I^{(k)}. \quad (2)$$

Дифференцируя (1), в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} dW &= d(AZ + B)(CZ + D)^{-1} + (AZ + B)d(CZ + D)^{-1} = \\ &= AdZ(CZ + D)^{-1} - (AZ + B)(CZ + D)^{-1}CdZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= [A - (AZ + B)(CZ + D)^{-1}C]dZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= [A - (ZB^* + A^*)^{-1}(ZD^* + C^*)C]dZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}[(ZB^* + A^*)A - (ZD^* + C^*)C]dZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}[ZB^*A + A^*A - ZD^*C - C^*C]dZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}[Z(B^*A - D^*C) + A^*A - C^*C]dZ(CZ + D)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}dZ(CZ + D)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу $dZ = \partial_Z + \bar{\partial}_Z$

$$\partial'_W = (CZ + D)\partial'_Z(ZB^* + A^*), \quad \bar{\partial}_W = (BZ^* + A)\bar{\partial}_Z(Z^*C^* + D^*).$$

Пусть $W_1 = (AZ_1 + B)(CZ_1 + D)^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} I - W_1^*W &= I - (Z_1^*C^* + D^*)^{-1}(Z_1^*A^* + B^*)(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = \\ &= (Z_1^*C^* + D^*)^{-1}[(Z_1^*C^* + D^*)(CZ + D) - (Z_1^*A^* + B^*)(AZ + B)](CZ + D)^{-1} = \\ &= (Z_1^*C^* + D^*)^{-1}[Z_1^*C^*CZ + Z_1^*C^*D + D^*CZ + D^*D - Z_1^*A^*AZ - Z_1^*A^*B - \\ &\quad - B^*AZ - B^*B](CZ + D)^{-1} = (Z_1^*C^* + D^*)^{-1}[Z_1^*(C^*C - A^*A)Z + Z_1^*(C^*D - A^*B) + \\ &\quad + (D^*C - B^*A)Z + D^*D - B^*B](CZ + D)^{-1} = (Z_1^*C^* + D^*)^{-1}[I - Z_1^*Z](CZ + D)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким же путем имеем $I - WW_1^* = (ZB^* + A^*)^{-1}[I - ZZ_1^*](BZ_1^* + A)^{-1}$. Обозначив $\Delta_Z = (I - ZZ^*)\bar{\partial}_Z \cdot (I - Z^*Z) \cdot \partial'_Z$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_W &= (I - WW^*)\bar{\partial}_W(I - W^*W)\partial'_W = (ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZZ^*)(BZ^* + A)^{-1}(BZ^* + A) \times \\ &\quad \times \bar{\partial}_Z(Z^*C^* + D^*)(Z^*C^* + D^*)^{-1}(I - Z^*Z)(CZ + D)^{-1}(CZ + D)\partial'_Z(ZB^* + A^*) = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZZ^*)\bar{\partial}_Z(I - Z^*Z)\partial'_Z(ZB^* + A^*) = (ZB^* + A^*)^{-1}\Delta_Z(ZB^* + A^*). \end{aligned}$$

Оператор Хуа Ло-Кена $\text{Sp}\Delta_Z$ имеет вид

$$\text{Sp}\Delta_Z = \sum_{\mu, \nu=1}^m \sum_{\alpha, \beta=1}^k \left(\delta_{\mu\nu} - \sum_{\gamma=1}^k z_{\mu\gamma} \bar{z}_{\nu\gamma} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\delta=1}^k \bar{z}_{\delta\alpha} z_{\delta\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial z_{\mu\beta} \partial \bar{z}_{\nu\alpha}},$$

причем он инвариантен относительно группы автоморфизмов области K_1 . Отметим, что если $m = 1$, область K_1 совпадает с единичным шаром B из $\mathbb{C}^k$, то оператор Хуа Ло-Кена совпадает с инвариантным оператором Лапласа для B (см. [2], с. 54).

4. Пусть ψ_P — автоморфизм области K_1 , переводящий точку $P \in K_1$ в нуль вида

$$W = Q(Z - P) \left(I^{(k)} - P^*Z \right)^{-1} R^{-1}, \quad (3)$$

где $Q - [m \times m]$ -матрица, $R - [k \times k]$ -матрица такие, что

$$\bar{Q}(I^{(m)} - \bar{P}P')Q' = I^{(m)}, \quad \bar{R}(I^{(k)} - P'\bar{P})R' = I^{(k)}.$$

Нетрудно видеть, что ψ_P — автоморфизм вида (1) при

$$A = Q, \quad B = -QP, \quad C = -RP^*, \quad D = R.$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned} dW &= Qd(Z - P) \left(I^{(k)} - P^*Z \right)^{-1} R^{-1} + Q(Z - P) d \left(I^{(k)} - P^*Z \right)^{-1} R^{-1} = \\ &= Q \left[dZ \left(I^{(k)} - P^*Z \right)^{-1} + (Z - P) d \left(I^{(k)} - P^*Z \right)^{-1} \right] R^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу $\bar{R}(I^{(k)} - P^*\bar{P})R' = I^{(k)}$ имеем

$$dW(P) = QdZ \left(I^{(k)} - P^*P \right)^{-1} R^{-1} = QdZR^*.$$

Теперь сформулируем правило цепочки, оно может быть полезно для поиска сложных производных матричных функций.

Пусть E — открытое множество из K_1 .

Предложение (цепное правило для матричных функций). *Если $f \in C^2(E)$ и отображение $\varphi_P = (\varphi_{11}, \dots, \varphi_{\mu\eta})$, $\mu = \overline{1, m}$, $\eta = \overline{1, k}$, является автоморфизмом K_1 , который точку нуль переводит в $P \in E$, то*

$$\Delta(f \circ \varphi_P)(0) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{\beta,\gamma=1}^k (D_{i\gamma} D_{j\beta}^* f)(P) \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\delta=1}^k [(D_{\alpha\delta} \varphi_{ij})(0) (D_{\alpha\delta} \varphi_{\beta\gamma})^*(0)]. \quad (4)$$

Доказательство. Применяя цепное правило (см. [2], с. 16) к $(f \circ \varphi)(0)$, получим

$$\begin{aligned} (D_{ij} f)(P) &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{\eta=1}^k [(D_{\mu\eta} f)(P) (D_{ij} \varphi_{\mu\eta})(0)], \\ (D_{ij}^* f)(P) &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{\eta=1}^k [(D_{\mu\eta}^* f)(P) (D_{ij}^* \varphi_{\mu\eta}^*)(0)]. \end{aligned}$$

Тогда с помощью $\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k D_{ij} D_{ij}^*$, где

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \frac{\partial}{\partial z_{12}} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_{1k}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \frac{\partial}{\partial z_{m2}} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_{mk}} \end{pmatrix},$$

можно записать

$$\Delta(f \circ \varphi_P)(0) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{\beta,\gamma=1}^k (D_{i\gamma} D_{j\beta}^* f)(P) \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\delta=1}^k [(D_{\alpha\delta} \varphi_{ij})(0) (D_{\alpha\delta} \varphi_{\beta\gamma})^*(0)].$$

Теорема 1. *Оператор Хуа Ло-Кена $\text{Sp}\Delta_Z$ можно представить в виде*

$$\text{Sp}\Delta f(P) = \Delta(f \circ \varphi_P)(0),$$

где Δ — классический оператор Лапласа.

Доказательство. Сначала вычислим $(D\varphi_P)(0)$. Дифференцируя (3) в точке P , имеем

$$dW = QdZ \left(I^{(k)} - P^*P \right)^{-1} R^{-1} = QdZR^*.$$

Отсюда получаем $dZ = Q^{-1}dWR^{*-1}$. Тогда $(D\varphi_P)(0) = Q^{-1} \otimes R^{*-1}$ и $(D\varphi_P)(0)^* = Q^{*-1} \otimes R^{-1}$, где знак $\otimes$ — означает кронекеровское произведение. Теперь подставим полученное выражение в $\Delta f(P)$. Используя свойства кронекеровского произведения (см. [3], с. 235) и из соотношений

$$\begin{aligned} (D\varphi_P)(0)(D\varphi_P)(0)^* &= (Q^{-1} \otimes R^{*-1}) (Q^{*-1} \otimes R^{-1}) = (Q^{-1}Q^{*-1}) \otimes (R^{*-1}R^{-1}) = \\ &= (Q^*Q)^{-1} \otimes (RR^*)^{-1} = \left(I^{(m)} - PP^* \right) \otimes \left(I^{(k)} - P^*P \right), \end{aligned}$$

а также равенства (4) имеем

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \varphi_P)(0) &= \sum_{i,j=1}^m \sum_{\beta,\gamma=1}^k (D_{i\gamma} D_{j\beta}^* f)(P) \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\delta=1}^k [(D_{\alpha\delta} \varphi_{ij})(0)(D_{\alpha\delta} \varphi_{\beta\gamma})^*(0)] = \\ &= \text{Sp} \left[\left(I^{(m)} - PP^* \right) D \left(I^{(k)} - P^*P \right) D^* \right] f(P). \end{aligned}$$

Тогда $\text{Sp} \Delta f(P) = \Delta(f \circ \varphi_P)(0)$. □

Теорема 2. Если $f \in C^2(E)$, E — открытое множество из K_1 и $W = \psi(Z)$ — автоморфизм K_1 , где $W \in E$, то

$$\text{Sp} \Delta(f \circ \psi)(Z) = \text{Sp} \Delta f \circ \psi(Z).$$

Доказательство. Пусть φ_Z — автоморфизм области K_1 , переводящий точку Z в 0. Известно, что отображение $\varphi_W^{-1} \circ \psi \circ \varphi_Z^{-1}$ сохраняет нуль. Тогда в силу теоремы А. Картана (см. [2], теорема 2.1.3) оно линейно и поэтому $\psi \circ \varphi_Z^{-1} = \varphi_W^{-1} \circ U$, где U — унитарный оператор. Следовательно,

$$\text{Sp} \Delta(f \circ \psi)(Z) = \Delta(f \circ \psi \circ \varphi_Z^{-1})(0) = \Delta(f \circ \varphi_W^{-1} \circ U)(0).$$

В силу унитарности U отображения $\varphi_W^{-1} \circ U$ и φ_W^{-1} имеют одинаковые лапласианы в точке нуль. Тогда

$$\Delta(f \circ \varphi_W^{-1} \circ U)(0) = \Delta(f \circ \varphi_W^{-1})(0) = \text{Sp} \Delta(f) \circ (W) = \text{Sp} \Delta(f) \circ \psi(Z).$$

При $m = 1$ теорема 2 полностью совпадает теоремой 4.1.2 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ло-Кен Хуа *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях* (Из-во Ин. лит., М., 1959).
- [2] Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* (Мир, М., 1984).
- [3] Ланкастер П. *Теория матриц* (Наука, М., 1982).

Гулмирза Худайбергганов

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: gkhudaiberg@mail.ru

Аскар Максатбаевич Халкназаров

Нукусский государственный педагогический институт им. Ажинияза,
ул. П. Сейитова д. 1, г. Нукус, 230105, Республика Каракалпакстан,
e-mail: axalqnazarov@mail.ru

Жонибек Шокирович Абдуллаев

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,*

e-mail: jonibek-abdullayev@mail.ru

G. Khudayberganov, A.M. Khalknazarov, and J.Sh. Abdullayev

Laplace and Hua Luogeng operators

Abstract. We study definitions of holomorphic and pluriharmonic functions for classical domains of the first Cartan type, and the operator of Laplace and Hua Luogeng in this domain. We find a relationship between these operators.

Keywords: classical domain, holomorphic function, pluriharmonic function, Hua Luogeng operator, Laplace operator, automorphism, chain rule.

Gulmirza Khudayberganov

*National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
4 Universitetskaya str., Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: gkhudaiberg@mail.ru

Askar Maxsetbaevich Khalknazarov

*Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz,
1 P. Seyitov str., Nukus, 230105 Republic of Karakalpakstan,*

e-mail: axalqnazarov@mail.ru

Jonibek Shokirovich Abdullayev

*National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
4 Universitetskaya str., Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: jonibek-abdullayev@mail.ru