Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Р. Борисова, С. В. Пчелинцев, Тройные лиевы системы, связанные с $(-1, 1)$ -алгебрами, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-80-84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:42:29

Краткое сообщение, представленное Ю.А. Бахтуриным

Л.Р. БОРИСОВА, С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ

ТРОЙНЫЕ ЛИЕВЫ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С $(-1, 1)$ -АЛГЕБРАМИ

Аннотация. Вводится тройная лиева система, связанная с центральным изотопом $(-1, 1)$ -алгебры. Ассоциаторный идеал $(-1, 1)$ -алгебры нильпотентен тогда и только тогда, когда связанная с ней тройная лиева система нильпотентна. Обсуждается взаимосвязь построенной тройной лиевой системы с другими известными системами.

Ключевые слова: центральный изотоп, $(-1, 1)$ -алгебра, тройная лиева система.

УДК: 512.554

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-80-84

Введение. С каждой йордановой алгеброй J (см. [1], с. 308) можно связать тройную лиеву систему $T(J)$ относительно композиции

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz),$$

где xy обозначает произведение элементов x, y в алгебре J . Поскольку с каждой правоальтернативной алгеброй A связана йорданова алгебра A^+ относительно симметризованного произведения $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, то с алгеброй A связана тройная лиева система вида $T_J(A) = T(A^+)$. Напомним, что тройные лиевы системы играют важную роль в структурной теории конечномерных альтернативных, йордановых, мальцевских алгебр и их представлений [2]–[4].

В [5] указаны связи $(-1, 1)$ -алгебр с йордановыми алгебрами, а в [6] указаны связи $(-1, 1)$ -алгебр с алгебрами Новикова–Пуассона.

В данной статье обсуждаются несколько типов тройных лиевых систем, связанных с $(-1, 1)$ -алгебрами. Вводится новая тройная лиева система, которая обозначается $TL_K(A)$, связанная с центральными изотопами $(-1, 1)$ -алгебры A . Заметим, что центрально изотопные $(-1, 1)$ -алгебры имеют изоморфные присоединенные йордановы алгебры, а также изоморфные тройные лиевы системы вида T_J и TL_K . Отметим, что вопрос об изоморфизме центрально изотопных $(-1, 1)$ -алгебр остается открытым.

В качестве основного результата получена характеристизация $(-1, 1)$ -алгебр, имеющих нильпотентный ассоциаторный идеал. Оказалось, что $(-1, 1)$ -алгебра A имеет нильпотентный ассоциаторный идеал тогда и только тогда, когда связанная с ней тройная лиева система $TL_K(A)$ нильпотентна. Кроме того, обсуждается взаимосвязь разрешимости и нильпотентности тройных лиевых систем $T_J(A)$ и $TL_K(A)$, построенных по $(-1, 1)$ -алгебре A .

1. Основные понятия. 1. *Правоальтернативные алгебры.* Термин “алгебра” означает линейную алгебру над основным полем F характеристики, отличной от 2 и 3. Как обычно, используются следующие обозначения: $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор, $x \circ y = xy + yx$ — йорданово произведение, $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор x, y, z . Через $A^{(-)}$ и $A^{(+)}$ обозначаются присоединенные алгебры относительно коммутирования $[x, y]$ и симметризованного умножения $x \bullet y = \frac{1}{2}x \circ y$ соответственно.

Понятия лиевой, альтернативной и йордановой алгебр считаются известными.

Алгебра A называется *правоальтернативной*, если

$$(x, y, y) = 0 \text{ для любых } x, y \in A.$$

Отметим, что алгебра $A^{(+)}$ йорданова, если A правоальтернативна (см. [7], с. 67).

Правоальтернативная алгебра называется $(-1, 1)$ -*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0. \quad (1)$$

Правоальтернативная алгебра A удовлетворяет тождеству (1) тогда и только тогда, когда ее коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Ли. Следуя [8], правоальтернативная алгебра называется *строго $(-1, 1)$ -алгеброй*, если в ней выполнено тождество “строгости”

$$[[x, y], z] = 0.$$

Всякая первичная неассоциативная $(-1, 1)$ -алгебра является строгой [8] и такие алгебры действительно существуют [9], [5].

Важную роль в теории $(-1, 1)$ -алгебр играет *коммутативный центр* $K(A)$:

$$K(A) = \{k \in A \mid [k, A] = 0\}.$$

2. *Изотопы правоальтернативных алгебр.* Алгебра называется *унитальной*, если она имеет единицу 1 (нейтральный элемент относительно умножения).

Пусть A — унитарная правоальтернативная алгебра, элемент $c \in A$ называется *обратимым*, если $cd = dc = 1$ для некоторого $d \in A$.

Далее, если элемент c обратим в A , то c -*изотопом* алгебры A называется алгебра $A^{(c)}$ с той же аддитивной структурой, что и A , относительно умножения $x \cdot_c y = (xc)y$.

Известно, что алгебра $A^{(c)}$ правоальтернативна (альтернативна), если алгебра A правоальтернативна (альтернативна).

Однако, если A строго $(-1, 1)$ -алгебра, то $A^{(c)}$ не обязана быть строго $(-1, 1)$ -алгеброй [10]. Алгебра $A^{(c)}$ является строго $(-1, 1)$ -алгеброй, если элемент c *централен*, т. е. $c \in K(A)$.

Изотоп $A^{(c)}$ алгебры A называется *центральный*, если $c \in K(A)$.

Наряду с понятием c -изотопа $A^{(c)}$, следуя [11] рассмотрим (a, b) -изотоп $A^{(a, b)}$ относительно операции $x_{a, b}y = (xa)(by)$, где a, b — обратимые элементы в A .

Если не требовать обратимость элементов a, b , то $A^{(a, b)}$ называется (a, b) -*гомотопом* A .

Недавно в [12] было доказано, что для альтернативных алгебр имеют место теорема об изоморфизме конечномерных унитарных изотопных алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 3, и теорема о сохранении тождеств при переходе к (a, b) -гомотопам.

Вопрос о справедливости аналогичных утверждений для центральных изотопов $(-1, 1)$ -алгебр пока остается открытым.

3. *Разрешимость и нильпотентность алгебр.* Пусть A — произвольная алгебра. Определим в ней убывающие цепочки подпространств

$$A^1 \supseteq \dots \supseteq A^n \supseteq \dots, \quad A_{(1)} \supseteq \dots \supseteq A_{(n)} \supseteq \dots,$$

где $A^1 = A$, $A_{(1)} = A^2$ и по индукции

$$A^n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} A^k A^{n-k}, \quad A_{(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n-1} A_{(k)} A_{(n-k)}.$$

Алгебра A называется *нильпотентной индекса n* , если $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$, алгебра A называется *разрешимой индекса n* , если $A_{(n)} = 0$, $A_{(n-1)} \neq 0$. Заметим, что всякая нильпотентная алгебра разрешима, обратное, как правило, неверно.

Аналогично вводятся понятия нильпотентности и разрешимости тройных систем.

2. Тройные лиевы системы, связанные с $(-1, 1)$ -алгебрами. 1. *Представление ассоциатора в изотопе.* Введем элемент

$$f_k(x, y, z) = (x, y, k)z - 2(y, z, k)x + (z, x, k)y, \text{ где } k \in K(A).$$

Лемма 1. *В любом центральном гомотопе $A^{(k)}$ алгебры A имеет место следующее представление ассоциатора:*

$$(x, y, z)_k = (x, y, z)k^2 + f_k(x, y, z)k.$$

2. *Тройные лиевы системы $TL_J(A)$ и $TL_K(A)$.* Напомним (см. [1], с. 308), что *тройной лиевой системой* называется векторное пространство, на котором задана 3-линейная операция $[\cdot, \cdot, \cdot]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- а) $[x, y, x] = 0$ — *кососимметричность по крайним переменным*;
- б) $[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0$;
- с) $[a, [x, y, z], b] = [[a, x, b], y, z] + [x, [a, y, b], z] + [x, y, [a, z, b]]$ — *тождество Якоби*, т. е. отображение $T_{a,b}$ такое, что $xT_{a,b} = [a, x, b]$, является *дифференцированием*.

Известно [13], что $(-1, 1)$ -алгебра является тройной лиевой системой относительно операции $[x, y, z] = (y, x, z)$. Эту систему обозначим через $TL_J(A)$. Для строго $(-1, 1)$ -алгебры A система $TL_J(A)$ совпадает с тройной лиевой системой $T(A^{(+)})$ относительно операции “Йорданова ассоциатора”:

$$[x, y, z] = (x, y, z)^{(+)} = (x \bullet y) \bullet z - x \bullet (y \bullet z).$$

Введем еще одну тройную лиеву систему, связанную с центральным изотопом алгебры.

Лемма 2. *Векторное пространство A относительно операции $[y, x, z] = f_k(x, y, z)$ является тройной лиевой системой, которая обозначается через $TL_k(A)$.*

Наряду с тройной лиевой системой $TL_J(A)$ рассмотрим тройную систему $TL_{JK}(A)$ относительно композиции $[x, y, z] = (y, x, z)k$, где $k \in K(A)$ фиксирован, а $x, y, z \in A$ произвольны. Нам неизвестно является ли она тройной лиевой системой. С помощью компьютерной программы “Мальцев” [14] можно проверить, что система $TL_{JK}(A)$ является тройной лиевой системой, если A — строго $(-1, 1)$ -алгебра и $k = [a, b]$.

3. *Центральные изотопы имеют изоморфные тройные лиевы системы.* Рассмотрим тройную лиеву систему $TL_K(A) = \prod_{k \in K(A)} TL_k(A)$, являющуюся декартовым произведением систем $TL_k(A)$ по всем $k \in K(A)$.

Предложение. *Если $c \in K(A)$ обратим, то тройные лиевы системы $TL_K(A^{(c)})$ и $TL_K(A)$ изоморфны.*

Заметим, что $(A^{(k)})^+ \cong A^+$, если k — обратимый центральный элемент в A .

Если алгебра A является строго $(-1, 1)$, то $2(x, y, z)^{(+)} = (y, x, z)$ (см. [7], с. 69), откуда вытекает изоморфизм тройных лиевых систем $T_J(A^{(k)})$ и $T_J(A)$.

3. Характеризация $(-1, 1)$ -алгебр с нильпотентным ассоциаторным идеалом.

1. Следствия соотношения $k^n = 0$. Положим $R_{a,b} = R_{ab} - R_a R_b$, где $a, b \in A$ и R_a — оператор правого умножения,

$$R_{A,A} = \{R_{a,b} \mid a, b \in A\}.$$

Лемма 3 ([5]). Пусть A — $(-1, 1)$ -алгебра над полем F характеристики 0. Если $k^n = 0$ для некоторого $k \in K(A)$, то для любых $\rho_i \in R_{A,A}$ верно

$$(k\rho_1)(k\rho_2) \dots (k\rho_{2n}) = 0.$$

Замечание 1. В характеристике $p \geq 5$ соотношение $k^p = 0$ не влечет равенства

$$(k\rho_1) \dots (k\rho_{2m}) = 0 \text{ ни при каком } m.$$

2. Критерий нильпотентности системы $TL_K(A)$.

Теорема. Пусть A — $(-1, 1)$ -алгебра над полем F характеристики 0. Тогда тройная лиева система $TL_K(A)$ нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентен ассоциаторный идеал $D(A)$ алгебры A .

Следствие. Если $(-1, 1)$ -алгебра A разрешима, то система $TL_K(A)$ нильпотентна.

3. Разрешимость и нильпотентность тройных лиевых систем $TL_J(A)$ и $TL_K(A)$.

1) Тройная лиева система $TL_K(A)$ разрешима индекса 2, т. е.

$$A_{(2)} = [A_{(1)}, A_{(1)}, A_{(1)}] \subseteq [K, K, K] = 0.$$

2) Система $TL_J(A)$, вообще говоря, не является разрешимой.

3) Если система $TL_J(A)$ нильпотентна, то нильпотентна система $TL_K(A)$.

4) Если алгебра A разрешима индекса 2, но не нильпотентна [15], то $TL_K(A)$ нильпотентна, но $TL_J(A)$ не нильпотентна.

Замечание 2. Так как $[K, K, A] + [K, A, K] = 0$, где $K = K(A)$, то каждая из систем $TL_K(A)$ и $TL_J(A)$ содержит ненулевой тривиальный идеал K . Таким образом, тройные лиевы системы, связанные с первичными алгебрами, не являются первичными системами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jacobson N. *Structure and representations of Jordan algebras* (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 39, Amer. Math. Soc., 1968).
- [2] Jacobson N. *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka J. Math. **6** (1), 1–71 (1954).
- [3] Кузьмин Е.Н. *Алгебры Мальцева и их представления*, Алгебра и Логика, **7** (4), 48–69 (1968).
- [4] Carlsson R. *Malcev-moduln*, J. Reine Angew. Math. **281**, 199–210 (1976).
- [5] Pchelintsev S.V., Shestakov I.P. *Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras vector type*, J. Algebra **423**, 54–86 (2015).
- [6] Желябин В.Н., Захаров А.С. *Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова–Пуассона*, Матем. заметки **97** (3), 359–367 (2015).
- [7] Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным* (Наука, М., 1978).
- [8] Hentzel I.R. *The characterization of $(-1, 1)$ -rings*, J. Algebra **30**, 236–258 (1974).
- [9] Пчелинцев С.В. *Первичные алгебры и абсолютные делители нуля*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **50** (1), 79–100 (1986).
- [10] Пчелинцев С.В. *Изотопы первичных $(-1, 1)$ -алгебр и йордановых алгебр*, Алгебра и логика **49** (3), 388–423 (2010).
- [11] McCrimmon K. *Homotopes of alternative algebras*, Math. Ann. **191** (4), 253–262 (1971).
- [12] Пчелинцев С.В. *Изотопы альтернативных алгебр характеристики, отличной от 3*, Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).

- [13] Роомельди Р.Э. *Центры свободного $(-1, 1)$ -кольца*, Сиб. мат. журн. **18** (4), 861–876 (1977).
- [14] Бучнев А.А., Филиппов В.Т., Шестаков И.П. *Проверка тождеств неассоциативных алгебр на компьютере*, Третий Сиб. конгресс по прикл. и индустр. матем. (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С. Л. Соболева (1908–1989), Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1998. С. 9.
- [15] Дорофеев Г.В. *Пример разрешимого, но не нильпотентного $(-1, 1)$ -кольца*, Алгебра и логика **12** (2), 162–166 (1973).

Людмила Робертовна Борисова

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., д. 49, г. Москва, 125993, Россия,*

e-mail: borisovalr@mail.ru

Сергей Валентинович Пчелинцев

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., д. 49, г. Москва, 125993, Россия,*

e-mail: pchelinzev@mail.ru

L.R. Borisova and S.V. Pchelintsev

Triple Lie systems associated with $(-1, 1)$ algebras

Abstract. We introduce a Lie triple system associated with the central isotope of $(-1, 1)$ -algebra. The associator ideal of $(-1, 1)$ -algebra is nilpotent if and only if the Lie triple system is nilpotent. The relationship of the constructed Lie triple system with other known Lie triple systems is discussed.

Keywords: central isotope, $(-1, 1)$ -algebra, Lie triple system.

Ludmila Robertovna Borisova

*Finance University under the Government,
49 Leningradsky Ave., Moscow, 125993 Russia,*

e-mail: borisovalr@mail.ru

Sergey Valentinovich Pchelintsev

*Finance University under the Government,
49 Leningradsky Ave., Moscow, 125993 Russia,*

e-mail: pchelinzev@mail.ru