Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Евсеев, А. В. Меновщиков, О замене переменных в L^p -пространствах с изменяющейся внутренней структурой, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 92–97

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-92-97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:01:51

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

Н.А. ЕВСЕЕВ, А.В. МЕНОВЩИКОВ

О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В L^p -ПРОСТРАНСТВАХ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Аннотация. Работа посвящена изучению ограниченности оператора композиции в пространствах $L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$. Такие пространства возникают при моделировании процессов переноса вещества в пористой среде. Предполагается, что оператор порождается отображением, сохраняющим приоритет переменных, что согласуется с физическими требованиями, предъявляемыми к модели.

Ключевые слова: оператор композиции, пространство Соболева, прямой интеграл банаховых пространств.

УДК: 517.548:517.988

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-92-97

Введение. В работах [1], [2] последовательно развивался один из возможных подходов к исследованию задачи о переносе вещества в пористой среде. Происходящие физические процессы описываются системой из двух слабо связанных параболических уравнений, одно из которых описывает макроскопический уровень (среду в целом), а второе — микроскопический (процессы, происходящие в отдельно взятой поре). Сама пористая среда моделируется как множество V (макроуровень) и распределение областей $\{Y_v\}_{v \in V}$ (микроуровень). В качестве пространства решений выбирается $L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$, т.е. выбираются функции, определенные на V , и принимающие значения в наборе пространств $W^{1,r}(Y_v)$ (частный случай L^p -прямого интеграла банаховых пространств). Это позволяет, с одной стороны, применять классические методы исследования уравнений, но, с другой стороны, порождает необходимость изучать свойства таких пространств.

В настоящей работе мы исследуем оператор замены переменных в пространствах указанного вида. Описание класса замен переменных, сохраняющих пространство, может оказаться полезным при изучении задач, в которых происходит деформация среды.

Оператор композиции на пространствах Лебега и Соболева подробно исследовался в работах С.К. Водопьянова и А.Д. Ухлово (например, [3], [4]). Аналогичная задача на пространствах Лебега со смешанной нормой рассмотрена в [5].

1. Предварительные сведения. 1. *Пространство $L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$.* Рассмотрим измеримое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и распределение областей $\{Y_v\}_{v \in V} \subset \mathbb{R}^m$. Будем считать, что распределение $\{Y_v\}_{v \in V}$ измеримо в том смысле, что множество

Поступила в редакцию 08.10.2019, после доработки 08.10.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00089).

$$Q = \bigcup_{v \in V} v \times Y_v \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

измеримо. Определим пространство $L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$ как множество измеримых функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для всех $v \in V$ функция $f(v, \cdot)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,r}(Y_v)$ и

$$\|f\|_{L^p(V, W^{1,r}(Y_v))} = \left(\int_V \|f(v, \cdot)\|_{W^{1,r}(Y_v)}^p dv \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

2. *Отображение, сохраняющее приоритет переменных.* Пусть дано другое измеримое множество U и измеримое распределение областей $\{X_u\}_{u \in U}$. Обозначим $P = \bigcup_{u \in U} u \times X_u$. Измеримое отображение $\varphi : P \rightarrow Q$ *сохраняет приоритет переменных*, если оно имеет вид $\varphi(u, x) = (\psi(u), \xi_u(x))$. При этом $\psi : U \rightarrow V$ — измеримое отображение, и для каждого $u \in U$ отображение $\xi_u : X_u \rightarrow Y_{\psi(u)}$ измеримо. В рамках рассматриваемой модели пористой среды это соответствует тому, что изменения, происходящие на микроуровне, внутри пор, не вызывают изменений на глобальном уровне.

Лемма 1. *Если $\varphi : P \rightarrow Q$ обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина, то отображение $\psi : U \rightarrow V$ также обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.*

3. *Оператор композиции и формулы замены переменных.* Отображение φ индуцирует оператор $C_\varphi : L^p(V, W^{1,r}(Y_v)) \rightarrow L^q(U, W^{1,s}(X_u))$, если для любой функции $f \in L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$ композиция $C_\varphi f(u, x) = f(\psi(u), \xi_u(x))$ принадлежит пространству $L^q(U, W^{1,s}(X_u))$.

Для корректности определения оператора композиции необходимо, чтобы отображение φ обладало $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина. Всюду далее будем считать, что для отображения φ это свойство выполнено.

Нам потребуются следующие формулы замены переменных.

а) Если отображение $\psi : U \rightarrow V$ обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина, то имеет место равенство

$$\int_U f(\psi(u)) du = \int_V f(v) J_{\psi^{-1}}(v) dv, \quad (1)$$

где под $J_{\psi^{-1}}$ понимается объемная производная обратного отображения.

б) При дополнительной регулярности отображения ψ (наличие аппроксимативных частных производных) верна формула

$$\int_U g(u) |J_\psi(u)| du = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{u \in \psi^{-1}(v) \cap U \setminus \Sigma_\psi} g(u) \right) dv, \quad (2)$$

где $|J_\psi(u)|$ — аппроксимативный якобиан (см. [6], также [3], предложение 3).

2. Постановка задачи и основной результат. Основной результат состоит в решении следующей задачи. Пусть дано отображение φ , сохраняющее приоритет переменных. Требуется описать свойства этого отображения, которые гарантируют ограниченность оператора композиции C_φ при условии сохранения внутренней структуры исследуемых пространств. Под этим подразумевается, что операторы композиции $C_{\xi_u} : W^{1,r}(Y_{\psi(u)}) \rightarrow W^{1,s}(X_u)$ являются ограниченными.

В свою очередь, из ([3], теорема 1) следует, что при почти всех (п. в.) $u \in U$ отображения $\xi_u : X_u \rightarrow Y_{\psi(u)}$ обладают следующими свойствами:

Рис. 1

- 1) $\xi_u \in ACL(X_u)$,
- 2) имеют конечное искажение ($D\xi_u(x) = 0$ п. в. на $\{x \in X_u : J_{\xi_u}(x) = 0\}$),
- 3) функция искажения

$$\mathcal{H}_u(y) = \left(\sum_{x \in \xi_u^{-1}(y) \setminus \Sigma_{\xi_u}} \frac{|D\xi_u|^s(x)}{|J_{\xi_u}(x)|} \right)^{\frac{1}{s}}$$

принадлежит $L^{\frac{rs}{r-s}}(Y_{\psi(u)})$.

Приведенная ниже лемма, играющая важную роль при доказательстве теоремы, может быть получена как частный случай из ([7], лемма 3.2) (подробное исследование функций множеств такого вида проведено в [4]).

Лемма 2. Пусть оператор C_φ ограничен и $p > q$, тогда

$$\Phi(A) = \sup_{f \in L^p(A, W^{1,r}(Y_v))} \left(\frac{\|C_\varphi f\|_{L^q(\psi^{-1}(A), W^{1,s}(X_u))}}{\|f\|_{L^p(A, W^{1,r}(Y_v))}} \right)^\varkappa, \quad \varkappa = \frac{pq}{p-q},$$

является счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских подмножествах $A \subset V$, $\mu(A) > 0$.

Описание оператора композиции C_φ представлено в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть отображение $\psi : U \rightarrow V$ имеет аппроксимативные частные производные на U . Оператор $C_\varphi : L^p(V, W^{1,r}(Y_v)) \rightarrow L^q(U, W^{1,s}(X_u))$, $p \geq q$, $r \geq s$, ограничен тогда и только тогда, когда функция искажения

$$\mathcal{K}(v) = \left(\sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{\|\mathcal{H}_u\|_{L^{\frac{rs}{r-s}}(Y_{\psi(u)})}^q}{|J_\psi(u)|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

принадлежит $L^\varkappa(V)$. Норма оператора C_φ эквивалентна величине $\|\mathcal{K}\|_{L^\varkappa(V)}$.

Схема доказательства. По лемме 2 для любого шара $B(\mathbf{v}, r) \subset V$ и функции $f \in L^p(B(\mathbf{v}, r), W^{1,r}(Y_v))$ выполнено неравенство

$$\|C_\varphi f\|_{L^q(\psi^{-1}(B(\mathbf{v}, r)), W^{1,s}(X_u))} \leq \Phi^{\frac{1}{\varkappa}}(B(\mathbf{v}, r)) \|f\|_{L^p(B(\mathbf{v}, r), W^{1,r}(Y_v))}. \quad (3)$$

В каждом пространстве $W^{1,r}(Y_v)$, $v \in B(\mathbf{v}, r)$, выберем элементы $e_v(y)$ такие, что $\|e_v\|_{W^{1,r}(Y_v)} = 1$. Рассмотрим функцию $g(v, y) = e_v(y)$. Тогда $\|g\|_{L^p(B(\mathbf{v}, r), W^{1,r}(Y_v))} = (\mu(B(\mathbf{v}, r)))^{\frac{1}{p}}$. Из неравенства (3) выводим

$$\left(\int_{\psi^{-1}(B(\mathbf{v}, r))} \|C_{\xi_u}[e_{\psi(u)}]\|_{W^{1,s}(X_u)}^q du \right)^{\frac{1}{q}} \leq \Phi^{\frac{1}{\kappa}}(B(\mathbf{v}, r))(\mu(B(\mathbf{v}, r)))^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя формулу замены переменной (2) и разделив обе части неравенства на $(\mu(B(\mathbf{v}, r)))^{\frac{1}{q}}$, получаем

$$\left(\frac{1}{\mu(B(\mathbf{v}, r))} \int_{B(\mathbf{v}, r)} \sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{\|e_{\psi(u)}(\xi_u(\cdot))\|_{W^{1,s}(X_u)}^q}{|J_\psi(u)|} dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\Phi(B(\mathbf{v}, r))}{\mu(B(\mathbf{v}, r))} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

По теореме Лебега и свойству аддитивной функции множеств имеем

$$\left(\sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{\|e_{\psi(u)}(\xi_u(\cdot))\|_{W^{1,s}(X_u)}^q}{|J_\psi(u)|} \right)^{\frac{p}{p-q}} \leq \Phi'(\mathbf{v}) \quad \text{п. в. } \mathbf{v} \in V.$$

Переходя к супремуму по всем $e_{\mathbf{v}}(y) \in W^{1,r}(Y_{\mathbf{v}})$, выводим

$$\left(\sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{\|C_{\xi_u}\|^q}{|J_\psi(u)|} \right)^{\frac{p}{p-q}} \leq \Phi'(\mathbf{v}) \quad \text{п. в. } \mathbf{v} \in V.$$

Интегрируя по V и используя результат теоремы (1), получаем

$$\mathcal{K}(v) \in L^\kappa(V).$$

Покажем *достаточность* условий теоремы. Пусть $\mathcal{K}(v) \in L^\kappa(V)$. В силу априорных предположений операторы C_{ξ_u} ограничены для п. в. $u \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|_{L^q(U, W^{1,s}(X_u))} &= \left(\int_U \|C_{\xi_u}[f(\psi(u), \cdot)]\|_{W^{1,s}(X_u)}^q du \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left(\int_U (\|C_{\xi_u}\| \|f(\psi(u), \cdot)\|_{W^{1,r}(Y_{\psi(u)})})^q du \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Используя формулу замены переменной и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_U (\|C_{\xi_u}\| \|f(\psi(u), \cdot)\|_{W^{1,r}(Y_{\psi(u)})})^q du \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_V \sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{(\|C_{\xi_u}\| \|f(\psi(u), \cdot)\|_{W^{1,r}(Y_{\psi(u)})})^q}{|J_\psi(u)|} dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left(\int_V \left(\sum_{u \in \psi^{-1}(v) \setminus \Sigma_\psi} \frac{\|C_{\xi_u}\|^q}{|J_\psi(u)|} \right)^{\frac{p}{p-q}} dv \right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\int_V \|f(v, \cdot)\|_{W^{1,r}(Y_v)}^p dv \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathcal{K}\|_{L^\kappa(V)} \|f\|_{L^p(V, W^{1,r}(Y_v))}. \quad \square \end{aligned}$$

Если отображение $\psi : U \rightarrow V$ инъективно, то можно отказаться от требования существования аппроксимативных частных производных. Повторяя шаги доказательства теоремы 1, но используя формулу замены переменной (1), можно получить следующий результат.

Теорема 2. Оператор $C_\varphi : L^p(V, W^{1,r}(Y_v)) \rightarrow L^q(U, W^{1,s}(X_u))$, $p \geq q$, $r \geq s$, ограничен тогда и только тогда, когда

$$J_{\psi^{-1}}^{\frac{1}{q}}(v) \|\mathcal{H}_{\psi^{-1}(v)}\|_{L^{\frac{rs}{r-s}}(Y_v)} \in L^\infty(V).$$

Норма оператора C_φ эквивалентна величине $\|J_{\psi^{-1}}^{\frac{1}{q}}(\cdot) \|\mathcal{H}_{\psi^{-1}(v)}\|_{L^{\frac{rs}{r-s}}(Y_v)}\|_{L^\infty(V)}$.

Замечание. Для отображений ξ_u , порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева, связанная с ними функция $\mathcal{H}_u$ описывает их геометрические свойства (аналогична внешнему коэффициенту искажения для отображений с ограниченным искажением [8]). При рассмотрении оператора композиции в пространствах вида $W^{1,p}(V, W^{1,r}(Y_v))$, возникает вопрос о том, как будет выглядеть функция искажения для отображения $\varphi : P \rightarrow Q$ и какой геометрический смысл она будет отражать.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Showalter R.E., Walkington N.J. *Micro-structure models of diffusion in fissured media*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1), 1–20 (1991).
- [2] Meier S., Böhm M. *A note on the construction of function spaces for distributed microstructure models with spatially varying cell geometry*, J. Numer. Anal. Model. **5**, suppl., 109–125 (2008).
- [3] Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. *Операторы суперпозиции в пространствах Соболева*, Изв. вузов. Матем., № 10, 11–33 (2002).
- [4] Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. *Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева*. I, Матем. тр. **6** (2), 14–65 (2003).
- [5] Евсеев Н.А., Меновщиков А.В. *Оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой*, Матем. заметки **105** (6), 816–823 (2019).
- [6] Vodopyanov S.K. *$\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics*, Тр. по анализу и геометрии, Новосибирск. Изд-во ин-та матем. им. С. Л. Соболева СО РАН. 603–670 (2000).
- [7] Evseev N., Menovschikov A. *Mixed Operators on L_p -Direct Integrals*, arXiv:1902.02983 (2019).
- [8] Водопьянов С.К. *Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений*, Сиб. матем. журн. **59** (5), 1020–1056 (2018).

Никита Александрович Евсеев

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
пр. Ак. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: evseev@math.nsc.ru

Александр Викторович Меновщиков

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
пр. Ак. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: menovschikov@math.nsc.ru

N.A. Evseev and A.V. Menovschikov

On changing variables in L^p -spaces with distributed-microstructure

Abstract. We study the boundedness of the composition operator in the spaces $L^p(V, W^{1,r}(Y_v))$. Such spaces arise when modeling the transport processes in a porous medium. It is assumed that the operator is induced by a mapping preserving the priority of the variables, which agrees with the physical requirements for the model.

Keywords: composition operator, Sobolev spaces, direct integral of Banach spaces.

Nikita Aleksandrovich Evseev

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4 Ac. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia;*

Novosibirsk State University,

1 Pirogov str., Novosibirsk, 630090 Russia,

e-mail: evseev@math.nsc.ru

Alexandr Viktorovich Menovschikov

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4 Ac. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia;*

Novosibirsk State University,

1 Pirogov str., Novosibirsk, 630090 Russia,

e-mail: menovschikov@math.nsc.ru