Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Темиргалиев, Ш. К. Абикенова, Ш. У. Ажгалиев, Г. Е. Таугынбаева, Преобразование Радона в схеме $K(B)$ -исследований и теории квази Монте-Карло, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 98–104

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-98-104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 07:38:44

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, Ш.К. АБИКЕНОВА, Ш.У. АЖГАЛИЕВ, Г.Е. ТАУТЫНБАЕВА

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В СХЕМЕ К(В)П-ИССЛЕДОВАНИЙ И
ТЕОРИИ КВАЗИ МОНТЕ-КАРЛО**

Аннотация. Статья носит программный характер в концепции исследования преобразования Радона по схеме компьютерного (вычислительного) поперечника и применения теории равномерного распределения. Результат состоит в том, что к числу оптимальных среди всех возможных линейных функционалов, с которых снимается числовая информация для формирования вычислительного агрегата, относятся преобразования Радона.

Ключевые слова: преобразование Радона, компьютерный (вычислительный) поперечник, метод квази Монте-Карло, восстановление функций, предельная погрешность.

УДК: 518:517.392

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-98-104

1. Преобразование Радона. Вычислительная (или компьютерная) томография, основанная на преобразовании Радона [1]–[3], позволяющем численное восстановление функций по их линейным или плоскостным интегралам, приобрела социальную значимость и исследовательскую активность главным образом благодаря появлению и совершенствованию медицинских томографов, а работы А. Кормака и Г. Хаунсфилда были отмечены в 1979 г. Нобелевской премией.

Можно также отметить связанный с ним методологический аспект роли математики. Именно в этом ключе происходили события, вызванные изобретением техники, позволяющей при просвечивании материального объекта на выходе получить интенсивность луча, равным интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча, с весьма точными описаниями на мероприятии [4] “Инновации через фундаментальные исследования. Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016)”:

Ректор Венского университета (на примере И. Радона): “Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу”.

Карл Зигмунд: “Йоганн Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является основой

Поступила в редакцию 25.09.2019, после доработки 25.09.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05132938 “Преобразование Радона в задачах дискретизации”).

компьютерной томографии. Их многочисленные приложения подтверждают правило: нет ничего более практичного, чем хорошая теория”.

Преобразование Радона (s -мерное) функции $f(x)$, заданной на замыкании $\bar{\Omega}$ открытого множества $\Omega \subset R^s$, каждой гиперплоскости размерности $s-1$, перпендикулярной вектору $\tau \cdot \theta$, $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_s) \in R^s$ с $\theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 = 1$ и $-\infty < \tau < \infty$, ставит в соответствие интеграл по ней:

$$Rf(\theta, \tau) \equiv Rf(\theta_1, \dots, \theta_s; \tau) = \int_{x: \langle x, \theta \rangle = \tau} f(x) dx = \int_{y: y \in R^{s-1}} f(\tau\theta + y) dy. \quad (1)$$

В двумерном случае $s = 2$ единичный вектор $\theta_\alpha^\perp := (-\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha)$ перпендикулярен единичному вектору $\theta_\alpha := (\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$.

Поэтому интеграл по прямой $T_{\alpha, \tau}$, перпендикулярной вектору $\tau(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$ с началом в точке $(0, 0)$, есть интеграл вдоль прямой $\tau\theta_\alpha + y\theta_\alpha^\perp$ ($-\infty < y < +\infty$) и определяет преобразование Радона

$$Rf(\alpha, \tau) = \int_{T_{\alpha, \tau} \cap \text{supp } f} f(\tau \cos 2\pi\alpha - y \sin 2\pi\alpha, \tau \sin 2\pi\alpha + y \cos 2\pi\alpha) dy.$$

Для открытого множества $\Omega \subset E_s \equiv [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^s$ пространство $H_0^r(\Omega)$ состоит из всех функций $f(x)$, определенных на множестве Ω , доопределенных нулем до E_s в виде $f_\Omega(x)$, равно $f(x)$ или 0 в зависимости от того $x \in \Omega$ или $x \in E_s \setminus \Omega$, 1-периодических по каждой переменной, с конечной нормой ($r \geq 0$, $s = 1, 2, \dots$)

$$\|f\|_{H^r(\Omega)}^2 := \|f_\Omega\|_{W_2^r(E_s)}^2 := \sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s} \left((\max\{|m_1|; 1\})^2 + \dots + (\max\{|m_s|; 1\})^2 \right)^r \left| \hat{f}_\Omega(m) \right|^2,$$

$$\hat{f}(m) = \int_{E_s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx,$$

что будет отражено в записи $H_0^r(\Omega) \sim W_2^r(E_s)$.

2. Компьютерный (вычислительный) поперечник $K(B)П$. Такое название носит комплекс из трех задач [5], [6] при заданных T, F, Y, D_N

$K(B)П$ -1. Находится порядок

$$\asymp \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; D_N)_Y$$

— информативная мощность набора вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$.

$K(B)П$ -2. Производится построение оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ с градацией “отклонение от точного значения функционала равно $\bar{\varepsilon}_N$ ” и “отклонение от точного значения функционала не больше $\bar{\varepsilon}_N$ ” из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\bar{\varepsilon}_N \equiv \bar{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y$ — $K(B)П$ -2-предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) такой, что

$$\delta_N(0; Tf; F; D_N)_Y \asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N; Tf; F; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup \left\{ \|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau(f)| \leq \bar{\varepsilon}_N^{(\tau)} (\tau = 1, \dots, N) \right\},$$

с одновременным выполнением условия

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; T f; F; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}))_Y}{\delta_N(0; T f; F; D_N)_Y} = +\infty.$$

К(В)П-3. Устанавливается массовость предельной погрешности $\bar{\varepsilon}_N \equiv \bar{\varepsilon}_N(D_N(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))$: находится как можно большее множество $D_N(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ (обычно связанных со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N) \equiv \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)$, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам $l_1, \dots, l_N$, таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; T f; F; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y}{\delta_N(0; T f; F; D_N)_Y} = +\infty.$$

3. Основная теорема. Пусть даны открытое множество $\Omega \subset E_2$ и число $r > 0$. Тогда для класса $H_0^r(\Omega)$, определенного через $W_2^r(E_2)$ и всякого $N = n^2$ ($n = 2, 3, \dots$) справедливы следующие утверждения.

К(В)П-1. Находится порядок

$$\begin{aligned} & \inf_{l_1, \dots, l_N - \text{все возможные линейные функционалы над } H_0^r(\Omega), \varphi_N} \sup_{f \in H_0^r} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp \\ & \asymp \inf_{(\alpha_\tau, t_\tau) \in E_2(\tau=1, \dots, N), \varphi_N} \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(Rf_\Omega(\alpha_1, t_1), \dots, Rf_\Omega(\alpha_N, t_N); x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp \\ & \asymp \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } R^{-1} D_N(x_1, x_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{+\infty} \Im D_N(\alpha, \gamma) e^{2\pi i(x_1 \gamma \cos 2\pi\alpha + x_2 \gamma \sin 2\pi\alpha)} \gamma d\gamma d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \tau) e^{2\pi i \gamma \tau} d\tau. \end{aligned}$$

К(В)П-2 (версия “равно $\tilde{\varepsilon}_N$ ”). Для вычислительного оператора

$$\frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)$$

и величины $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-(\frac{r}{2} + \frac{1}{4})}$ выполняются следующие соотношения.

$$1) \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\varepsilon} \right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

2) Для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-(\frac{r}{2} + \frac{1}{4})}; \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0; L_N(H_0^r(\Omega)) \times \{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

К(В)П-2 (версия “не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ ”). Для вычислительного оператора (1) и величины $\bar{\varepsilon}_N = N^{-(\frac{r}{2} + \frac{3}{4})}$ имеем

$$\sup_{f \in H_0^r(\Omega), |\gamma_N^{(k_1, k_2)}| \leq 1} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \left(Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n} \right) + \gamma_N^{(k_1, k_2)} \tilde{\varepsilon}_N \right) \times \right. \\ \left. \times R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Тем самым, при погрешности вычисления преобразования Радона с точностью, не большей $\bar{\varepsilon}_N = N^{-(\frac{r}{2} + \frac{3}{4})}$, итоговой потери точности восстановления f не будет.

В то же время, если в вычислении преобразования Радона ошибаться на постоянную величину $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-(\frac{r}{2} + \frac{1}{4})}$, то также не произойдет потери итоговой точности, но это обрушится для $\eta_N \tilde{\varepsilon}_N$ с любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}$.

Вопрос об окончательности погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ в версии “не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ ”, когда необходимо выяснить, найдется или нет $\bar{\eta}_N \rightarrow +\infty$ такая, что $\bar{\varepsilon}_N \bar{\eta}_N =: \tilde{\varepsilon}_N$, будет предельным в версии “не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ ”, остается открытым, известно только, что

$$\bar{\varepsilon}_N \leq \tilde{\varepsilon}_N \leq N^{-(\frac{r}{2} + \frac{1}{4})}.$$

Отметим, что доказательство Основной теоремы фактически состоит из результатов, ранее полученных при К(В)П-исследовании проблемы численного дифференцирования в [7], с тем лишь отличием, что здесь дополнительно используется теорема 5.1 из [3] $\|f\|_{W_2^r} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}}$.

4. Преобразование Радона в К(В)П-постановке и оценки снизу. Известные оценки снизу величины $\delta_N(F, L)_Y$ для классов F (см. [8]) и для всех возможных линейных функционалов (см., например, [9]–[12]) для преобразования Радона дают оценки снизу

$$<< \delta_N(F; L)_Y \leq \delta_N(F; R)_Y = \inf_{b_1, \dots, b_N; \varphi_N} \sup_{f \in F} \|f(x) - \varphi_N(l_{b_1}(f), \dots, l_{b_N}(f); x)\|_Y,$$

которые также относятся и ко всем линейным аналогам и модификациям преобразования Радона.

Из результатов [9] для преобразования Радона вытекают следующие оценки снизу ($s \geq 2$, $N = 2, 3, \dots$):

$$N^{-(r/s - (1/p - 1/q))} << \delta_N(0; f; W_p^r(0, 1)^s; L_N \times \varphi_N)_{L^q(0, 1)^s} << \\ << \delta_N(0; f; W_p^r(0, 1)^s; Rf \times \varphi_N)_{L^q(0, 1)^s} \quad (2 \leq p \leq q \leq \infty), \\ N^{-r/s} << \delta_N(0; f; W_p^r(0, 1)^s; L_N \times \varphi_N)_{L^q(0, 1)^s} << \\ << \delta_N(0; f; W_p^r(0, 1)^s; Rf \times \varphi_N)_{L^q(0, 1)^s} \quad (1 \leq q \leq p \leq 2), \quad (2)$$

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} << \delta_N(0; f; SW_2^r(0, 1)^s; L_N \times \varphi_N)_{L^\infty(0, 1)^s} << \delta_N(0; f; SW_2^r(0, 1)^s; Rf \times \varphi_N)_{L^\infty(0, 1)^s},$$

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r} << \delta_N(0; f; SW_2^r(0, 1)^s; L_N \times \varphi_N)_{L^2(0, 1)^s} << \delta_N(0; f; SW_2^r(0, 1)^s; Rf \times \varphi_N)_{L^2(0, 1)^s}.$$

Таким образом, в $K(V)$ -постановке радоновская проблематика сводится к оценкам сверху самой большой величины в (2) с последующим нахождением в рамках $K(V)$ П-2 предельной погрешности восстановления по числовым значениям преобразования Радона с завершением в $K(V)$ П-3.

5. Преобразование Радона и метод квази Монте-Карло. Каждому $b \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, t) \in [0, 1]^s$ в линейной параметризации $\theta_i = \theta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ и $\tau = \tau(t)$ (см. [7], VII, 2) формуле (1) соответствует своя гиперплоскость $(\tau(t)b)^\perp$.

Вместе с тем, естественно ожидать, что чем более равномерно распределена на $[0, 1]^s$ последовательность (сетка) точек $b_1, \dots, b_N$, тем ближе к $f(x)$ (в Y) функция

$$\bar{\varphi}_N(Rf(b_1), \dots, Rf(b_N); x)$$

(при надлежащем алгоритме $\bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x)$).

Тем самым, здесь можно применить теорию квази Монте-Карло, в которой степень равномерности распределения определяется через величину дискрепанса (χ_J - характеристическая функция множества J)

$$D_s(b_1, b_2, \dots, b_N) = \sup \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_J(b_k) - \prod_{j=1}^s (d_j - c_j) \right| : J = \prod_{j=1}^s [c_j, d_j] \subset [0, 1]^s \right\}.$$

В этом круге вопросов ориентиром служит эвристический принцип “Спектр больших тригонометрических коэффициентов Фурье данного класса функций несет в себе информацию, определяющую основные свойства функций класса”. Для (обычных) классов Соболева, Никольского и Бесова такой спектр составляют целочисленные точки соответствующей размерности куба с сопровождающей равномерной сеткой (как в основной теореме для класса Соболева $W_2^r(0, 1)^2$). Однако, для тех же (по названию) классов функций с доминирующей смешанной производной или разностью обозначенный спектр составляют так называемые “гиперболические кресты”, которым уже соответствуют равномерно распределенные сетки с дискрепансом предельного в степенной шкале порядка $\frac{\log^\beta N}{N}$ (подробности см. в [13]–[25]).

Так в случае класса $SW_2^r(0, 1)^2$ равномерные сетки заменяются на сетки [14], [16]

$$b_\tau = \left(\frac{\tau}{c_n}, \left\{ \frac{\tau c_{n-1}}{c_n} \right\} \right) \quad (\tau = 1, 2, \dots, N = c_n(n \geq 3)), \quad \{x\} - \text{дробная часть } x,$$

где $\{c_\tau\}$ есть последовательность Фибоначчи $c_0 = c_1 = 1$, $c_\tau = c_{\tau-1} + c_{\tau-2}$ ($\tau \geq 2$).

Опять же приходим к подлежащим дальнейшим исследованиям: перспективным связям между преобразованиями Радона и методом квази Монте-Карло.

К. Шерниязовым [24] (см. также [25]) получена серия точных в степенной шкале теорем восстановления функций по их значениям в узлах сеток, построенных на основе сеток Коробова [13] и являющихся их модификацией.

Применение этой теоремы к преобразованию Радона Rf приводит к задаче $\|f\|_{F^r} \asymp \|Rf\|_{F^{r+\frac{1}{2}}}$, т.е. получению аналога теоремы 5.1 из [3] для норм классов F^r из теоремы К. Шерниязова (и, вообще, всех классов из [8]).

В заключении отметим, что реализации намеченной здесь программы будут посвящены последующие публикации научных сотрудников ИТМиНВ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Radon J. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.* Berichte über die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, J. Math. Phys., № 69, 262–277 (1917).

- [2] *The first 100 years of the Radon transform*, Linz, Austria, 27-31 March, 1917.
- [3] Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography* (SIAM: Soc. for Industrial and Appl. Math., 2001).
- [4] Hetzenecker K., Limbeck-Lilienau C., Schweizer D., Laufersweiler B. *Innovation durch Grundlagenforschung. Der Beitrag wissenschaftlicher Theorien und Entdeckungen zum gesamtgesellschaftlichen Fortschritt*. Begleitheft zur Ausstellung an der Univ. Wien, 2016.
- [5] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. *Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) перечника*, Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. Сер. Матем. Информатика. Механика **124** (3), 8–88 (2018).
- [6] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. *Компьютерный (вычислительный) перечень в контексте общей теории восстановления*, Изв. вузов. Матем., №1, 89–97 (2019).
- [7] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. *Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения*, Изв. вузов. Матем., №3, 89–95 (2017).
- [8] Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators* (North-Holland Pub. Co. in Amsterdam, New York, 1978). (Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы* (Мир, М., 1980).
- [9] Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н. *Об информативной мощности линейных функционалов*, Матем. зам. **73** (6), 803–812 (2003).
- [10] Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е. *Точные порядки компьютерных (вычислительных) перечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье*, Современ. пробл. матем., №17, 179–207 (2013).
- [11] Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. *Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **55** (9), 1474–1485 (2015).
- [12] Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. *Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) перечника*, Изв. вузов. Матем., №8, 86–93 (2013).
- [13] Коробов Н.М. *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе* (Физматгиз, М., 1963).
- [14] Hua Loo Keng, Wang Yuan *Application of number theory of numerical analysis* (Springer Verlag, New York, 1981).
- [15] Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. *Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Mathematik* (Wien; München; Oldenbourg, 1981).
- [16] Бахвалов Н.С. *О приближенном вычислении кратных интегралов*, Вестн. МГУ. Сер., Матем., механика №4, 3–18 (1959).
- [17] Plaskota L., Wozniakowski H. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods* (Springer Sci. & Business Media, 2010).
- [18] Dick J., Pillichshammer F. *Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010).
- [19] Воронин С.М., Темиргалиев Н. *О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел*, Матем. заметки **46** (2), 34–41 (1989).
- [20] Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных*, Матем. сб. **181** (4), 490–505 (1990).
- [21] Байлов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. *Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных*, Докл. РАН **416** (2), 169–173 (2007).
- [22] Жубанышева А. Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **49** (1), 14–25 (2009).
- [23] Байлов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. *Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **54** (7), 1059–1077 (2014).
- [24] Шерниязов К. *Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B* , Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук (КазГУ им. аль-Фараби, 1998).
- [25] Темиргалиев Н. *Компьютерный (вычислительный) перечень. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье*, Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н.Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (2010).

Нурлан Темиргалиев

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажимукана, д. 13, г. Нур-Султан, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: ntmath10@mail.ru*

Шолпан Какимжановна Абикенова

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажимукана, д. 13, г. Нур-Султан, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: shabik_29@mail.ru*

Шапен Урынбасарович Ажгалiev

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажимукана, д. 13, г. Нур-Султан, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: nepash@mail.ru*

Галия Ерболовна Таугынбаева

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Кажимукана, д. 13, г. Нур-Султан, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: galija_1981tau@mail.ru*

N. Temirgaliyev, Sh.K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliev, and G.E. Taugynbayeva

The Radon transform in the scheme C(N)D-inverstigations and the quasi-Monte Carlo theory

Abstract. The article has a programmatic principles in the concept of studying the Radon transform according to the computational (numerical) diameter and applying the theory of uniform distribution. The principal result is that the Radon transforms are qualified as optimal among the all possible linear functionals that are used to extract numerical information for generating a computational aggregate.

Keywords: Radon transform, computational (numerical) diameter, quasi-Monte Carlo method, recoveryof functions, limiting error.

Nurlan Temirgaliyev

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, 010008 Republic of Kazakhstan,
e-mail: ntmath10@mail.ru*

Sholpan Kakimzhanovna Abikenova

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, 010008 Republic of Kazakhstan,
e-mail: shabik_29@mail.ru*

Shapen Urynbasarovich Azhgaliev

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, 010008 Republic of Kazakhstan,
e-mail: nepash@mail.ru*

Galiya Erbolovna Taugynbayeva

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, 010008 Republic of Kazakhstan,
e-mail: galija_1981tau@mail.ru*