Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Д. Андреев, А. И. Булыгин, О геометрии подобно однородных $\mathbb{R}$ -деревьев, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 3–15

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-3-15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:00:25

П.Д. АНДРЕЕВ, А.И. БУЛЫГИН

О ГЕОМЕТРИИ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ $\mathbb{R}$ -ДЕРЕВЬЕВ

Аннотация. Изучается геометрия локально полных подобно однородных $\mathbb{R}$ -деревьев. Для введенного нами ранее класса вертикальных $\mathbb{R}$ -деревьев доказана теорема существования таких $\mathbb{R}$ -деревьев, не являющихся строго вертикальными. Аналогичный метод применим и к другим классам локально полных подобно однородных $\mathbb{R}$ -деревьев.

Ключевые слова: подобно однородное пространство, вертикальное $\mathbb{R}$ -дерево, пилообразная функция.

УДК: 514.774

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-3-15

ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем геометрию локально полных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой. Задача изучения локально компактных пространств этого вида была поставлена в [1]. В частности, в [1] была сформулирована гипотеза о строении локально полных локально компактных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой, доказанная в диссертации [2]. Основной результат, доказанный совместно В.Н. Берестовским и И.А. Гундыревым, приведен в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть (X, ρ) — локально компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой. Тогда

- 1) топологическая группа (Γ, δ_{x_0}) подобий пространства X изоморфна полупрямому топологическому произведению групп $\mathbb{R}_+ \ltimes \Gamma$, где $\mathbb{R}_+$ — мультипликативная группа положительных действительных чисел, Γ — группа изометрий X ;
- 2) пространство (X, ρ) гомеоморфно прямому топологическому произведению $c^{-1}(a) \times \mathbb{R}$, где $c^{-1}(a)$ — произвольное множество уровня функции радиуса полноты c на X .

Возникает естественный вопрос, какова роль условия локальной компактности? П.Д. Андреевым в статье [3] построен пример, показывающий, что если условие локальной компактности отбросить, то теорема 1 будет не верна. Пример в работе [3] представляет собой локально полное подобно однородное $\mathbb{R}$ -дерево, т. е. геодезическое пространство, в котором любые две точки можно соединить единственной дугой. Под дугой здесь понимается образ пути из первой точки во вторую без самопересечений и самоналожений. $\mathbb{R}$ -дерево, построенное в [3], таково, что каждая его точка является точкой ветвления. Примером тривиального локально полного подобно однородного $\mathbb{R}$ -дерева является пространство $\mathbb{R}_+$. Основываясь на этом, формулируем следующую гипотезу.

Поступила в редакцию 25.03.2019, после доработки 25.03.2019. Принята к публикации 19.06.2019.

Гипотеза. Пусть (X, d) — локально полное подобно однородное неоднородное геодезическое пространство. Тогда оно гомеоморфно прямому топологическому произведению $Y \times T$, где Y — линейно связное однородное пространство, содержащееся в множестве $c^{-1}(a)$ произвольного уровня функции радиуса полноты на X , а T — локально полное подобно однородное $\mathbb{R}$ -дерево. При этом множество $c^{-1}(a)$ представляется как дизъюнктивное объединение образов $\bigcup_g g(Y)$ множества Y под действием элементов группы $G \subset \text{Isom}(T)$, транзитивной на $T \cap c^{-1}(a)$.

В случае $T = \mathbb{R}_+$ группа G , о которой здесь идет речь, тривиальна.

В общем случае прежде всего следует выяснить, каким может быть геометрическое строение локально полного подобно однородного $\mathbb{R}$ -дерева. Этой задаче была посвящена статья авторов [4]. В ней были определены классы вертикальных и строго вертикальных $\mathbb{R}$ -деревьев. Вертикальность $\mathbb{R}$ -дерева X здесь означает, что если на отрезке $[xy] \subset X$ функция радиуса полноты s монотонна, то она линейна с угловым коэффициентом $k = \pm 1$. Точные определения приводятся в следующем разделе. В частности, статья [4] содержит полную геометрическую классификацию строго вертикальных $\mathbb{R}$ -деревьев. Показано, что всякое такое $\mathbb{R}$ -дерево изометрично одному из модельных $\mathbb{R}$ -деревьев, которые строятся по образцу примера, приведенного в [3]. Для вертикального $\mathbb{R}$ -дерева, не являющегося строго вертикальным, показано, что его число ветвления не меньше континуума. Но в [4] не было показано, что такие $\mathbb{R}$ -деревья могут существовать, что, конечно же, является значительным недостатком. Цель настоящей статьи в том, чтобы построить пример вертикального $\mathbb{R}$ -дерева, не являющегося строго вертикальным, доказав тем самым теорему существования.

Статья организована следующим образом. В первом разделе мы приводим необходимые определения и факты. Построению основного примера посвящен второй раздел, разбитый на две части. В первой части мы вводим понятие маршрута на базе группы G и изучаем свойства маршрутов. Целью является доказательство транзитивности бинарного отношения τ , определенного здесь же. В итоге отношение τ оказывается отношением эквивалентности, и основное множество X определяется как фактор множества всех маршрутов с данной базой по отношению τ . Во второй части на множестве X вводится метрика d и показывается, что пространство (X, d) действительно является локально полным подобно однородным $\mathbb{R}$ -деревом. При этом оно вертикально, но не строго вертикально.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Для числа $\varepsilon > 0$ точка $m \in X$ называется ε -серединой между точками $x, y \in X$, если выполнены неравенства

$$d(x, m), d(y, m) < \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon.$$

Метрика d называется внутренней, если для любых точек $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -середина m между x и y , и строго внутренней, если для любых $x, y \in X$ между ними имеется середина m :

$$d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Под отрезком в X с концами $x, y \in X$ понимается образ в X числового отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом вложении $i : [a, b] \rightarrow X$, при котором $i(a) = x$ и $i(b) = y$. Пространство X называется геодезическим, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком. В

частности, всякое полное метрическое пространство со строго внутренней метрикой является геодезическим пространством.

Подобием пространства (X, d) с коэффициентом $k > 0$ называется биекция $\varphi : X \rightarrow X$, при которой для любых $x, y \in X$ выполнено

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = k \cdot d(x, y).$$

В частности, подобие φ с коэффициентом $k = 1$ является изометрией X .

Пространство X называется подобно однородным, если для любых точек $x, y \in X$ существует подобие φ , переводящее x в $\varphi(x) = y$. Если для любых $x, y \in X$ существует изометрия φ , переводящая x в y , пространство X называется однородным. Другими словами, пространство X однородно (соответственно подобно однородно), если его группа изометрий $\text{Isom}(X)$ (соответственно группа подобий $\text{Sim}(X)$) действует на X транзитивно.

Пространство X называется локально полным, если для любой точки $x \in X$ определено число $r > 0$, для которого замкнутый шар $B(x, r)$ полон в метрике d . Очевидно, в этом случае полными будут и шары $B(x, r')$ при всех положительных $r' \leq r$. Точная верхняя грань радиусов r , для которых шар $B(x, r)$ полон, называется радиусом полноты в точке x . Для радиуса полноты в [1] принято обозначение $c(x)$. Если $c(x_0) = +\infty$ хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то пространство X полное и $c(x) = +\infty$ во всех точках $x \in X$.

Теорема 2 ([1]). *Локально полное подобно однородное пространство X однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

Далее рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными, поэтому функция $c(x)$ всюду конечна. В этом случае легко доказать, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|c(x) - c(y)| \leq d(x, y).$$

Если $\varphi : X \rightarrow X$ — подобие с коэффициентом $k > 0$, то для любой точки $x \in X$ выполнено

$$c(\varphi(x)) = k \cdot c(x).$$

Мы изучаем подобно однородные пространства, которые являются так называемыми $\mathbb{R}$ -деревьями. Это геометрическое обобщение понятия дерева, принятого в теории графов.

Определение 1. Дугой в пространстве (X, d) с концами $x, y \in X$ называется образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении (не обязательно изометрическом) $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, при котором $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$. Геодезическое пространство X называется $\mathbb{R}$ -деревом, если в нем любые две точки $x, y \in X$ соединяются единственной дугой. В этом случае всякая дуга автоматически является отрезком.

Примеры применения $\mathbb{R}$ -деревьев приведены в [5], [6] и ряде других работ. Некоторые свойства и признаки $\mathbb{R}$ -деревьев доказаны в [3], [7].

Полезный критерий $\mathbb{R}$ -дерева в терминах метрических полурешеток доказан в [3]. Основные свойства частично упорядоченных множеств, решеток и полурешеток изучены в книге [8].

Определение 2. Пусть на метрическом пространстве (X, d) задано отношение частичного порядка $\preceq$, по отношению к которому множество X является $\wedge$ -полурешеткой. Это значит, что для любых двух точек $u, v \in X$ определен их инфимум $z = u \wedge v$, т.е. такая точка z , что $z \preceq u$, $z \preceq v$, и для произвольной точки $w \in X$ из $w \preceq u, v$ следует $w \preceq z$. Из антисимметричности отношения $\preceq$ вытекает, что для любых $u, v \in X$ инфимум $z = u \wedge v$

определен однозначно. Полурешетка $(X, \preceq)$ называется ниже полулинейной, если для любой точки $x \in X$ ее нижний конус

$$K_x = \{y \in X \mid y \preceq x\}$$

линейно упорядочен относительно порядка $\preceq$. Тройка $(X, d, \preceq)$ называется метрической $\wedge$ -полурешеткой, если $(X, \preceq)$ является $\wedge$ -полурешеткой, и для любых точек $u, v \in X$ выполняется равенство

$$d(u, v) = d(u, u \wedge v) + d(u \wedge v, v).$$

Теорема 3 ([3]). Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Оно является $\mathbb{R}$ -деревом тогда и только тогда, когда на X существует частичный порядок $\preceq$, по отношению к которому тройка $(X, d, \preceq)$ является ниже полулинейной метрической $\wedge$ -полурешеткой.

В силу двойственности утверждение этой теоремы остается истинным, если рассматривать верхне полулинейные $\vee$ -полурешетки. В [3] применен именно этот вариант. При доказательстве теоремы существования воспользуемся критерием в приведенной здесь формулировке.

Определение 3. Непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется пилообразной, если

- 1) f не является постоянной ни на каком интервале $(c, d) \subset [a, b]$;
- 2) из того, что f монотонна на интервале $(c, d) \subset [a, b]$ следует, что $f|_{(c, d)}$ — линейная функция с угловым коэффициентом ± 1 .

Определение 4. Пусть (Y, d) — локально полное подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$ -дерево. Оно называется вертикальным, если на каждом отрезке $[xy]$, параметризованном натуральной параметризацией $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ так, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$, функция радиуса полноты $c(\gamma(t))$ является пилообразной. Вертикальное $\mathbb{R}$ -дерево (Y, d) называется строго вертикальным, если на любом отрезке функция $c(\gamma(t))$ имеет не более одной внутренней точки локального экстремума.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНОГО ПРИМЕРА

2.1. Маршруты и экзит-маршруты. Здесь мы приводим построение примера вертикального $\mathbb{R}$ -дерева X , не являющегося строго вертикальным. Этим доказывается теорема существования таких $\mathbb{R}$ -деревьев. При построении мы будем представлять X как лабиринт, имеющий единственный вход и бесконечно много выходов. При этом каждая точка в X отождествляется с маршрутом, ведущим в нее из входа. В одну и ту же точку лабиринта ведут несколько разных маршрутов. Ниже вводится некоторое бинарное отношение, которое оказывается отношением эквивалентности. Для доказательства транзитивности этого отношения мы введем вспомогательное понятие экзит-маршрута. Если маршрут ведет в какую-то точку лабиринта, то экзит-маршрут ведет к одному из выходов. Маршрутом он не является, но обладает теми же свойствами. Дадим точные определения.

Определение 5. Пусть задана группа G с единицей e . Мы будем рассматривать пары функций (f, φ) , для которых выполнены следующие условия:

- 1) функция $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ пилообразная, причем
 - (1a) $f(0) = 0$ и $f(t) > 0$ при $t \in (0, a]$,
 - (1b) существует такое $\delta > 0$, что $f(t) = t$ при всех $t \in [0, \delta]$;
- 2) функция φ определена на открытом (в топологии полуинтервала $[0, a)$) подмножестве $A \subset [0, a)$ полной меры Лебега, т. е. $\mu_L([0, a) \setminus A) = 0$, и действует в G , причем
 - (2a) φ постоянна на связных подмножествах, т. е. если $[\alpha, \beta] \subset A$, то $\varphi|_{[\alpha, \beta]} = \text{const}$,

(2b) $0 \in A$ и $\varphi(0) = e$, откуда следует $[0, \sigma) \subset A$ для некоторого $\sigma > 0$ и $\varphi(t) = e$ для всех $t \in [0, \sigma)$; далее мы будем считать, что выполняется равенство $\sigma = \delta$.

Всякую такую пару функций мы будем называть маршрутом на базе группы G . Число a при этом — длина маршрута. Если задан маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a , то функции f и φ называются его первой и второй компонентой соответственно. Их смысл состоит в том, что f связана с радиусом полноты на X : в точке, определяемой маршрутом M длины a , радиус полноты равен $f(a)$, а φ задает ветвление.

Если в условии (1a) определения 5 неравенство $f(a) > 0$ заменить равенством $f(a) = 0$, а остальные условия оставить неизменными, то получим понятие экзит-маршрута (см. рис. 1). К экзит-маршрутам отнесем также нулевой экзит-маршрут $M_0 = (f_0, \varphi_0)$, длина которого равна нулю. Он определяется на множестве $\{0\}$ равенствами $f_0(0) = 0$ и $\varphi_0(0) = e$.

Рис. 1. Графики маршрута $M = (f, \varphi)$ длины a и экзит-маршрута $\bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$ длины $\bar{a}$ на базе группы $G = \mathbb{Z}_3 = \langle g \mid g^3 = e \rangle$. Многоточия означают, что f может иметь бесконечно много точек локального экстремума, а φ — бесконечно много интервалов постоянства. Маршрут M в точке s имеет дыру, а на отрезке $[uv]$ — возвращение

Далее в качестве основного множества X принимается множество всевозможных маршрутов на базе G . Наша первая задача состоит в том, чтобы на X ввести некоторое отношение эквивалентности τ так, чтобы маршруты, ведущие в одну и ту же точку лабиринта, были бы эквивалентны. Метрику искомого $\mathbb{R}$ -дерева мы будем задавать на фактор-множестве $X^* = X/\tau$. Для определения отношения τ введем следующие понятия.

Определение 6. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a , функция φ определена на множестве $A \subset [0, a)$. Точка $s \in [0, a) \setminus A$ называется дырой, если $\varphi|_{(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap A} = \text{const}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Заметим, что дыра может быть изолированной, т.е. обладать окрестностью, в которой нет других дыр (рис. 1), или быть точкой накопления дыр.

Определение 7. Пусть заданы два маршрута одной и той же длины a : $M = (f, \varphi)$ и $\bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$, причем функция φ определена на множестве $A \subset [0, a)$, а $\bar{\varphi}$ — на множестве $\bar{A}$

и $A \subseteq \hat{A}$. Первые компоненты маршрутов M и $\hat{M}$ совпадают. Будем говорить, что маршрут $\hat{M}$ получен из M заполнением дыр, если $\hat{\varphi}|_A = \varphi$. В этом случае M получен из $\hat{M}$ прокалыванием дыр. В частности, каждый маршрут можно получить из самого себя как операцией заполнения пустого множества дыр, так и операцией прокалывания пустого множества дыр. Маршрут M называется маршрутом без дыр, если не существует маршрута $\hat{M}$, полученного из M заполнением дыр, отличного от M .

Лемма 1. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a . Тогда существует единственный маршрут $\hat{M} = (f, \hat{\varphi})$ без дыр, полученный из M заполнением дыр.

Доказательство. Если M не имеет дыр, то он сам является единственным требуемым маршрутом. Предположим, что M не является маршрутом без дыр. Пусть его вторая компонента φ задана на множестве $A \subset [0, a]$. Будем говорить, что число $t \in (0, a) \setminus A$ добавляемо к A , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $t + \varepsilon < a$, и φ постоянна на $A \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. В частности, все числа множества $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \setminus A$ также добавляемы к A . Отсюда следует, что объединение A с множеством добавляемых к нему чисел открыто в топологии полуинтервала $[0, a)$. Обозначим это множество через $\hat{A}$. Тогда существует функция $\hat{\varphi} : \hat{A} \rightarrow G$, постоянная на интервалах в $\hat{A}$ и совпадающая с φ на A . Маршрут $\hat{M} = (f, \hat{\varphi})$ является единственным маршрутом, полученным из A заполнением дыр. $\square$

В дальнейшем для краткости при описании второй компоненты φ произвольного маршрута $M = (f, \varphi)$ не будем отдельно останавливаться на задании ее области определения A , считая, что если приводится значение $\varphi(t)$, то $t \in A$.

Определение 8. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a . Будем говорить, что он имеет возвращение на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h] \subset [0, a]$, если для любого $s \in (0, h)$ выполняются условия

- 1) $f(t_0 - s) = f(t_0 + s)$;
- 2) $\varphi(t_0 - s) = (\varphi(t_0 + s))^{-1}$.

Возвращение называется элементарным, если f на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ имеет единственный локальный экстремум в точке t_0 , а φ постоянна на интервале $(t_0 - h, t_0)$ (а следовательно, и на интервале $(t_0, t_0 + h)$). Если M не имеет возвращений ни на одном отрезке в $[0, a]$, то говорим, что M — маршрут без возвращений.

Определение 9. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a , имеющий возвращение на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, и $\bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$ — маршрут длины $a - 2h$. Будем говорить, что $\bar{M}$ получен из M удалением возвращения на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, если $\bar{f}|_{[0, t_0 - h]} = f|_{[0, t_0 - h]}$, $\bar{\varphi}|_{[0, t_0 - h]} = \varphi|_{[0, t_0 - h]}$, и при $t \in (t_0 - h, a - 2h]$ выполняются равенства

$$\bar{f}(t) = f(t + 2h), \quad \bar{\varphi}(t) = \varphi(t + 2h).$$

При таком удалении возвращения на маршруте $\bar{M}$ может возникнуть дыра в точке $t_0 - h$. Она может быть заполнена в соответствии с определением 7 и леммой 1. Будем говорить, что маршрут $\bar{M}$ получен из M удалением возвращений, если он получен за некоторое, не более чем счетное, число шагов, где каждый шаг состоит в заполнении имеющихся дыр и удалении одного возвращения.

Аналогично определяются понятие возвращения и операция удаления возвращения, если $M = (f, \varphi)$ является экзит-маршрутом.

Лемма 2. Пусть маршрут (экзит-маршрут) $M = (f, \varphi)$ имеет элементарные возвращения на отрезках $[u_1, v_1]$ и $[u_2, v_2]$, причем $[u_1, v_1] \cap [u_2, v_2] = [u_2, v_1]$. Тогда

- 1) $\frac{1}{2}(u_1 + v_1) \leq u_2$, $v_1 \leq \frac{1}{2}(u_2 + v_2)$;
- 2) для любого $h \in [0, v_1 - u_2]$ часть маршрута M на отрезке $[u_1 + h, u_2 + v_2 - v_1 + h]$ может быть удалена методом удаления двух элементарных возвратов;
- 3) результат удаления отрезка $[u_1 + h, u_2 + v_2 - v_1 + h]$ не зависит от h и от порядка, в котором выполняются удаления элементарных возвратов на нем.

Рис. 2. Удаление пары элементарных возвратов на отрезке $[u_1, v_2]$. Здесь $v'_2 = u_1 + v_1 - u_2$

Утверждение становится очевидным после анализа иллюстрации на рис. 2.

Как следствие, применяя индукцию, получаем следующие два результата. Под удаляющей процедурой для множества P понимается конечная или счетная последовательность операций, состоящих в заполнении дыр или удалении возвратов, в результате которой все внутренние точки P оказываются удаленными. Мы опускаем доказательства ввиду их значительной громоздкости при том, что рассуждения на каждом шаге тривиальны.

Лемма 3. Пусть дан маршрут (экзит-маршрут) $M = (f, \varphi)$ длины a . Предположим, что для замкнутого подмножества $P \subset [0, a]$ существует удаляющая его процедура. Предположим также, что отрезок $[u, v] \subset P$ содержит элементарное возвращение. Тогда для множества P существует удаляющая процедура, в которой отрезок $[u, v]$ удаляется первым.

Лемма 4. Пусть дан маршрут (экзит-маршрут) $M = (f, \varphi)$ длины a . Предположим, что для замкнутых подмножеств $P \subset [0, a]$ и $Q \subset P$ существуют удаляющие процедуры. Тогда для множества P существует удаляющая процедура, в которой сначала удаляется множество Q .

Определение 10. Экзит-маршрут $M = (f, \varphi)$ называется стягиваемым, если он может стать нулевым экзит-маршрутом после выполнения некоторой удаляющей процедуры.

Следствие 1. Пусть экзит-маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a стягиваем и допускает удаляющую процедуру на некотором множестве $Q \subset [0, a]$. Тогда экзит-маршрут $\bar{M}$, полученный из M после выполнения указанной процедуры, также стягиваем.

Утверждение автоматически следует из леммы 4.

Сформулируем основную теорему о возвращениях на маршрутах.

Теорема 4. *Для любого маршрута M существует единственный маршрут $\bar{M}$ без дыр и возвращений, который совпадает с M или получен из M выполнением удаляющей процедуры.*

Доказательство. Существование. Если M после заполнения дыр не имеет возвращений, то утверждение доказано. В противном случае заметим, что при удалении любого числа возвращений начальная часть M останется не удаленной, и результатом будет некоторый маршрут. Всякий раз при удалении возвращения мы удаляем некоторое рациональное число, поэтому такое удаление можно выполнить не более чем счетное число раз. В результате получится искомый маршрут без возвращений.

Единственность. Введем еще одну вспомогательную операцию. Пусть заданы два маршрута $M_1 = (f_1, \varphi_1)$ длины a_1 и $M_2 = (f_2, \varphi_2)$ длины a_2 , причем $f_1(a_1) = f_2(a_2)$. Будем говорить, что экзит-маршрут $M = (f, \varphi)$ длины $a_1 + a_2$ получен обратным присоединением маршрута M_2 к M_1 , если выполнены равенства

$$M(t) = M_1(t) \quad \text{при } t \leq a_1,$$

$$f(s) = f_2(a_1 + a_2 - s), \quad \varphi(s) = (\varphi_2(a_1 + a_2 - s))^{-1}$$

при $a_1 \leq s \leq a_1 + a_2$. Обозначим $M = M_1 * M_2$. Легко видеть, что если $M_1 = M_2$, то экзит-маршрут $M_1 * M_2$ стягиваем. Из леммы 4 и ее следствия получаем, что если оба маршрута M_1 и M_2 получены из одного и того же маршрута посредством выполнения удаляющих процедур, то для них $f_1(a_1) = f_2(a_2)$, экзит-маршрут $M = M_1 * M_2$ корректно определен и стягиваем.

С другой стороны, если предположить, что оба маршрута M_1, M_2 не имеют дыр и возвращений, и при этом различны, то существует число $t_0 \in [0, \min\{a_1, a_2\}]$, для которого либо $f_1(a_1 - t_0) \neq f_2(a_2 - t_0)$, либо $\varphi_1(a_1 - t_0) \neq \varphi_2(a_2 - t_0)$. Следовательно, экзит-маршрут $M_1 * M_2$ не содержит возвращения, удаляющего его целиком. В нем можно лишь удалить отрезок с центром в точке a_1 , после чего останутся две непустые части маршрутов M_1 и M_2 , не имеющие возвращений. Итоговый экзит-маршрут не содержит вообще ни одного возвращения и поэтому не стягиваем. Противоречие доказывает утверждение. $\square$

Определение 11. Будем говорить, что для маршрутов $M_1 = (f_1, \varphi_1)$ и $M_2 = (f_2, \varphi_2)$ выполнено отношение $M_1 \tau M_2$, если существует маршрут $M = (f, \varphi)$ без дыр и без возвращений, который можно получить удаляющими процедурами как из M_1 , так и из M_2 . Из леммы 1 и теоремы 4 следует, что отношение τ транзитивно. Его рефлексивность и симметричность очевидны, следовательно, τ — отношение эквивалентности, и корректно определено пространство $X^* = X/\tau$.

Далее для простоты мы будем называть маршрутами элементы пространства X^* , а само это пространство просто обозначать X , не различая в нем эквивалентные маршруты: достаточно только указать на их эквивалентность, если это необходимо. При этом каждый маршрут при необходимости можно заменить эквивалентным ему маршрутом.

2.2. Доказательство основной теоремы. В этом пункте мы покажем, что на множестве X может быть введена метрика d , по отношению к которой X является вертикальным $\mathbb{R}$ -деревом. В силу теоремы 4 можем рассматривать только маршруты без дыр и без возвращений. Поэтому примем следующее соглашение. Любой элемент множества X рассматривается как маршрут без дыр и возвращений, а если дыры или возвращения возникают, то они сразу же ликвидируются: дыры заполняются, а возвращения удаляются.

В первую очередь на X определим частичный порядок. Будем говорить, что маршрут $\hat{M} = (\hat{f}, \hat{\varphi})$ длины $\hat{a}$ предшествует маршруту $M = (f, \varphi)$ длины a , и обозначать $\hat{M} \preceq M$, если $\hat{a} \leq a$, $f|_{[0, \hat{a}]} = \hat{f}$, функции φ и $\hat{\varphi}$ определены на множествах A и $\hat{A}$ соответственно, причем $\hat{A} \subset A$ и $\varphi|_{\hat{A}} = \hat{\varphi}$. На языке лабиринта отношение $\hat{M} \preceq M$ означает, что любой маршрут от входа до точки M обязательно пройдет через точку $\hat{M}$.

Теорема 5. *Частично упорядоченное множество $(X, \preceq)$ является нижнеполулинейной $\wedge$ -полурешеткой.*

Доказательство. Для любых двух маршрутов $M = (f, \varphi)$, $\bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $t \in [0, \delta]$ выполняются равенства $f(t) = \bar{f}(t) = t$ и $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) = e$. Следовательно, однозначно определен маршрут M_0 максимальной длины a_0 , также не имеющий дыр и возвращений, удовлетворяющий отношениям $M_0 \preceq M$ и $M_0 \preceq \bar{M}$. Отсюда получаем, что $(X, \preceq)$ — это $\wedge$ -полурешетка. Далее считаем, что маршрут M_0 является инфимумом маршрутов M_1 и M_2 в смысле порядка $\preceq$, и применяем обозначение $M_0 = M_1 \wedge M_2$.

Пусть $M_0 = (f_0, \varphi_0) \in X$ — произвольный маршрут без дыр и возвращений длины a_0 . Тогда его нижний конус

$$K_-(M_0) = \{M \in X \mid M \preceq M_0\} = \{M_0|_{[0, a]}, 0 < a \leq a_0\},$$

и $K_-(M_0)$ линейно упорядочен. □

Далее на множестве X определим метрику d . Напомним, что по соглашению все рассматриваемые маршруты — без дыр и возвращений. Если $M_1, M_2 \in X$ связаны отношением $M_1 \preceq M_2$, то полагаем

$$d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) = a_2 - a_1,$$

где a_i — длина маршрута M_i . Теперь для произвольных маршрутов $M_1, M_2 \in X$ расстояние

$$d(M_1, M_2) = d(M_1, M_1 \wedge M_2) + d(M_1 \wedge M_2, M_2).$$

Легко видеть, что функция d удовлетворяет аксиомам метрики, а пространство (X, d) является метрической $\wedge$ -полурешеткой по отношению к порядку $\preceq$.

Лемма 5. *Пространство (X, d) является геодезическим.*

Доказательство. Если для маршрутов M_i длин a_i , $i = \overline{1, 2}$, выполнено $M_1 \preceq M_2$, то отрезок $[M_1 M_2]$ задается отображением $\gamma : [0, a_2 - a_1] \rightarrow X$,

$$\gamma(t) = M_2|_{[0, a_1 + t]}.$$

Если же маршруты M_1 и M_2 не связаны порядком $\preceq$, то соединяющий их отрезок

$$[M_1 M_2] = [M_1 M_0] \cup [M_0 M_2],$$

где $M_0 = M_1 \wedge M_2$. □

Следствие 2. Пространство (X, d) является $\mathbb{R}$ -деревом.

Доказательство следует из теорем 3, 5 и леммы 5.

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы показать, что $\mathbb{R}$ -дерево X является локально полным и подобно однородным.

Теорема 6. *$\mathbb{R}$ -дерево X локально полно, причем радиус полноты в точке, задаваемой маршрутом $M = (f, \varphi)$ длины a , равен $c(M) = f(a)$.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{M_i\}_{i=1}^\infty \subset X$, для которой $d(M, M_i) < f(a) - h$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и некоторого $h > 0$. Пусть длина маршрута M_i равна a_i . Для каждой пары $i, j \in \mathbb{N}$ определен маршрут $M_{i,j,0} = M_i \wedge M_j$, причем

$$d(M, M_{i,j,0}) \leq \min\{d(M, M_i), d(M, M_j)\}$$

и при всяком $k \in \mathbb{N}$ верно

$$d(M_{i,j,0}, M_{i,k,0}) \leq d(M_j, M_k).$$

Следовательно, при любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$ последовательность $\{M_{i,j,0}\}_{j=1}^\infty$ также фундаментальна. Обозначив через $a_{i,j,0}$ длину маршрута $M_{i,j,0}$, получим фундаментальную числовую последовательность $\{a_{i,j,0}\}_{j=1}^\infty$, для которой определен предел

$$a_{i,0} = \lim_{j \rightarrow +\infty} a_{i,j,0} \leq a_i.$$

Следовательно, предел $M_{i,0} = (f_{i,0}, \varphi_{i,0})$ длины $a_{i,0}$ определен и для последовательности $\{M_{i,j,0}\}_{j=1}^\infty$, причем $a_{i,0} \leq a_i$ и $M_{i,0} = M_i|_{[0, a_{i,0}]}$.

Поскольку из фундаментальности исходной последовательности M_i следует равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\lim_{j \rightarrow \infty} d(M_i, M_j)) = 0,$$

то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = M_0,$$

где $M_0 = (f_0, \varphi_0)$ — маршрут длины $a_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$, совпадающий с $M_{i,0}$ на отрезке $[0, a_{i,0}]$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $d(M, M_i) < a - h$, то $f_0(a_0) \geq h > 0$, и маршрут M_0 определен корректно. Следовательно, при любом $h > 0$ замкнутый шар $B(M, a - h) \subset X$ является полным, и для радиуса полноты $c(M)$ имеем оценку $c(M) \geq f(a)$.

Для оценки рассмотрим последовательность маршрутов $M_k = (f_k, \varphi_k)$ длин $a_k = a + f(a) \cdot (1 - 1/k)$, определенную следующими условиями:

- 1) $f_k(t) = f(t)$ при $0 \leq t \leq a$ и всех $k \in \mathbb{N}$;
- 2) $f_k(a + s) = f(a) - s$ при всех $0 < s < f(a) - 1/k$ и всех $k \in \mathbb{N}$;
- 3) $\varphi_k(t) = \varphi(t)$ при $0 < t < a$;
- 4) $\varphi_k(a + s) = e \in G$ при $0 < s < f(a) - 1/k$.

Очевидны равенства

$$d(M, M_k) = f(a) - \frac{1}{k}, \quad d(M_k, M_n) = \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right|,$$

из которых следует, что последовательность M_k фундаментальна и содержится в шаре $B(M, f(a))$. Ее пределом служит экзит-маршрут длины $a + f(a)$, не являющийся маршрутом. Следовательно, шар $B(M, f(a))$ не полон, и $c(M) = f(a)$. $\square$

Далее мы изучаем группу $\text{Sim}(X)$ подобий пространства X и ее подгруппу $\text{Isom}(X)$ движений с тем, чтобы показать подобную однородность X . Нам не обязательно рассматривать все подобия, выделим только два класса, которые порождают подгруппу в $\text{Sim}(X)$, действующую на X транзитивно.

В первую очередь определим на X группу гомотетий. Гомотетией пространства X с коэффициентом $k > 0$ будем называть отображение $h_k : X \rightarrow X$, действующее по следующему правилу. Пусть дан маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a . Функция φ задана на множестве $A \subset [0, a)$. Тогда $h_k(M)$ определяется как маршрут $M_k = (f_k, \varphi_k)$ длины $k \cdot a$, в котором

- 1) $f_k(t) = k \cdot f(t/k)$ при всех $t \in [0, k \cdot a]$;

- 2) область определения A_k функции φ_k определена условием $t \in A_k$ тогда и только тогда, когда $t/k \in A$;
- 3) $\varphi_k(t) = \varphi(t/k)$ при всех $t \in A_k$.

Легко проверяется, что такое определение корректно: образ $h_k(M)$ маршрута M вновь является маршрутом, а образы эквивалентных маршрутов вновь эквивалентны, причем $d(h_k(M_1), h_k(M_2)) = k \cdot d(M_1, M_2)$ для любых маршрутов $M_1, M_2 \in X$. То есть h_k является подобием пространства X с коэффициентом k .

Более тонким является определение подгруппы Γ в $\text{Isom}(X)$, которая транзитивно действует на множестве $X_1 = c^{-1}(1)$. Для определения нам понадобится следующая операция над маршрутами.

Определение 12. Пусть даны два маршрута $M_1 = (f_1, \varphi_1), M_2 = (f_2, \varphi_2) \in X$ длин a_1 и a_2 соответственно, A_1, A_2 — области определения функций φ_1 и φ_2 . Их конкатенацией будем называть маршрут $M = M_1 \oplus M_2$, определенный следующим образом. Пусть число $\delta > 0$ таково, что $f_2(t) = t$, и $\varphi_2(t) = e$ при всех $t \in (0, \delta)$. Будем также считать, что $\delta < f_1(a_1)$. Тогда маршрут $M_1 \oplus M_2 = (f_1 \oplus f_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2)$ задается следующими условиями:

- 1) длина $M_1 \oplus M_2$ равна $\bar{a} = a_1 + a_2 + f_1(a_1) - 2\delta$;
- 2) $f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{если } t \leq a_1; \\ f_1(a_1) + a_1 - t, & \text{если } a_1 \leq t \leq a_1 + f_1(a_1) - \delta; \\ f_2(t - a_1 - f_1(a_1) + 2\delta), & \text{если } a_1 + f_1(a_1) - \delta \leq t \leq \bar{a}. \end{cases}$

В общем случае маршрут $M_1 \oplus M_2$ имеет элементарное возвращение с центром в точке $t_0 = a_1 + f_1(a_1) - \delta$, которое в соответствии с начальным соглашением следует удалить.

Заметим, что это определение вновь является корректным: класс маршрута $M_1 \oplus M_2$ не зависит ни от выбора числа δ с указанными условиями, ни от выбора маршрутов M_1 и M_2 в их классах эквивалентности: если $\tilde{M}_1 \tau M_1$ и $\tilde{M}_2 \tau M_2$, то $(\tilde{M}_1 \oplus \tilde{M}_2) \tau (M_1 \oplus M_2)$.

Теорема 7. Множество $X_1 = c^{-1}(1) \subset X$ по отношению к операции $\oplus$ является группой.

Доказательство. Ассоциативность операции $\oplus$ очевидна. Нейтральным элементом служит маршрут $E = (\text{Id}, e)$ единичной длины. Здесь $\text{Id}(t) = t$, а функция e — это константа $e(t) = e \in G$. Действительно, для любого маршрута $M = (f, \varphi)$ длины a , приняв $\delta = 1$, можно получить $M \oplus E = M$ в силу определения 12. С другой стороны, пусть $E \oplus M = \bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$. Тогда маршрут $\bar{M}$ имеет длину $a + 2 - 2\delta$, где число δ определено для маршрута M условием (1b) определения 5. Пусть

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0, 1]; \\ 2 - t & \text{при } t \in [1, 2 - \delta]; \\ f(t - 2 + 2\delta) & \text{при } t \in [2 - \delta, a + 2 - 2\delta], \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} e, & \text{если } t < 2 - \delta; \\ \varphi(t - 2 + 2\delta), & \text{если } t \in [2 - \delta, a + 2 - 2\delta]. \end{cases}$$

Мы видим, что маршрут $\bar{M}$ имеет возвращение на отрезке $[\delta, 2 - \delta]$, удалив которое, получим исходный маршрут M .

Наконец, покажем, что каждый маршрут в X_1 обладает обратным маршрутом в смысле операции $\oplus$. Для маршрута $M = (f, \varphi) \in X_1$ длины a определим маршрут $\tilde{M} = (\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ длины $a + 2 - 2\delta$, где число $\delta > 0$ определено для M условиями (1b) и (2b) определения 5.

В частности, $\delta \leq 1$. Определяются функции

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq 1; \\ f(a+1-t), & \text{если } 1 \leq t \leq a+1-\delta; \\ t+2\delta-a-1, & \text{если } a+1-\delta \leq t \leq a+2-2\delta, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} e, & \text{если } t \leq 1; \\ (\varphi(a+1-t))^{-1}, & \text{если } 1 \leq t \leq a+1-\delta; \\ e, & \text{если } a+1-\delta \leq t \leq a+2-2\delta. \end{cases}$$

Легко видеть, что маршрут $\tilde{M}$ определен корректно и $\tilde{M} \in X_1$. После выполнения удаляющих процедур как маршрут $M \oplus \tilde{M}$, так и маршрут $\tilde{M} \oplus M$ становятся маршрутом E . $\square$

Теперь мы готовы показать, что группа $\text{Isom}(X)$ действует на $X_1 \subset X$ транзитивно. Для произвольного маршрута $M \in X$ рассмотрим отображение левого сдвига $L_M : X \rightarrow X$, определенное равенством $L_M(M_1) = M \oplus M_1$. Во-первых, если на маршрутах не удалять возвращения, то получаем, что порядок $\bar{\preceq}$, аналогичный $\preceq$, сохраняется: если $M_1 \preceq M_2$, то $L_M M_1 \bar{\preceq} L_M M_2$ и

$$d(L_M M_1, L_M M_2) = d(M_1, M_2). \quad (2.1)$$

Сам порядок $\preceq$ при условии возможности удаления возвращений может нарушаться, лишь если $M = \tilde{M} \oplus (\tilde{M})^{-1}$ для некоторых маршрутов без возвращений $\tilde{M}$ и $\tilde{M}$ при условии $M_1 \preceq \tilde{M} \preceq M_2$ или $M_2 \preceq \tilde{M}$. Но и в этих случаях равенство (2.1) остается истинным. Оно выполняется и в общем случае, когда маршруты M_1 и M_2 не сравнимы в смысле порядка $\preceq$. Следовательно, группа левых сдвигов, порожденных элементами множества X_1 , является подгруппой в $\text{Isom}(X)$ и транзитивно действует на X_1 . Отсюда автоматически получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пространство X является локально полным подобно однородным неоднородным $\mathbb{R}$ -деревом. При этом X вертикально, но не строго вертикально.*

Если при рассмотрении пространства X вместо пилообразных функций рассматривать более обширный подкласс класса 1-липпшицевых функций, например, все функции такого вида, то получим следующее утверждение.

Теорема 9. *Существует локально полное подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$ -дерево X , не являющееся вертикальным.*

В целом вопрос о метрической классификации таких $\mathbb{R}$ -деревьев, аналогичной классификации строго вертикальных $\mathbb{R}$ -деревьев, представляется необозримым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Берестовский В.Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой, Изв. вузов. Матем., № 11, 3–22 (2004).
- [2] Гундырев И.А. Подобно однородные пространства с внутренней метрикой, Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук., Омск (2015).
- [3] Андреев П.Д. Полулинейные метрические полурешетки на $\mathbb{R}$ -деревьях, Изв. вузов. Матем., № 6, 3–13 (2007).
- [4] Andreev P.D., Bulygin A.I. On the vertical similarly homogeneous $\mathbb{R}$ -trees, Lobachevskii J. Math. **40** (2), 127–139 (2019).
- [5] Bestvina M. $\mathbb{R}$ -trees in topology, geometry and group theory, Handbook of geometric topology, edited by R.J.Daverman, R.B.Sher., Elsevier Sci., North-Holland, Amsterdam, London, New York, 55–91 (2002).

- [6] Berestovskii V.N., Plaut C. *Covering $\mathbb{R}$ -trees, $\mathbb{R}$ -free groups, and dendrites*, Adv. Math. **224** (5), 1765–1783 (2010).
- [7] Андреев П.Д., Берестовский В.Н. *Размерности $\mathbb{R}$ -деревьев и самоподобные фрактальные пространства неположительной кривизны*, Матем. тр. **9** (2), 3–22 (2006).
- [8] Биркгоф Г. *Теория решеток*, 3-е изд. (Наука, М., 1984).

Павел Дмитриевич Андреев

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: pdandreev@mail.ru

Алексей Иванович Булыгин

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: alexey.buligin@gmail.com

P.D. Andreev and A.I. Bulygin

On the geometry of similarly homogeneous $\mathbb{R}$ -trees

Abstract. We study the geometry of the locally complete similarly homogeneous $\mathbb{R}$ -trees. We prove the existence theorem for the class of vertical $\mathbb{R}$ -trees which are not strongly vertical introduced earlier. The analogous method is applicable to other classes of locally complete similarly homogeneous $\mathbb{R}$ -trees.

Keywords: similarly homogenous space, vertical $\mathbb{R}$ -tree, saw-like function.

Pavel Dmitrievich Andreev

*Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk, 163002 Russia,*

e-mail: pdandreev@mail.ru

Alexey Ivanovich Bulygin

*Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk, 163002 Russia,*

e-mail: alexey.buligin@gmail.com