Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Гаджимирзаев, Интегральные оценки многочленов Лагерра с экспоненциальным весом, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 16–25

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-16-25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:41:40

Р.М. ГАДЖИМИРЗАЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГЕРРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

Аннотация. Рассматривается система функций $\lambda_{1+n}(x)$, порожденная системой функций Лагерра. Для функций $\lambda_{1+n}(x)$ получены представления через полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$. Посредством этих представлений и асимптотических формул для полиномов $L_n^\alpha(x)$ исследовано поведение функций $\lambda_{1+n}(x)$ на $[0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$ и получены оценки, аналогичные оценкам для функций Лагерра.

Ключевые слова: полином Лагерра, функция Лагерра, асимптотика.

УДК: 517.15

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-16-25

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Через $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \sqrt{\rho(x)} l_n^\alpha(x)$ ($l_n^\alpha(x)$ — ортонормированный полином Лагерра, $n = 0, 1, \dots$) обозначим функции Лагерра, которые при $\alpha > -1$ ортонормированы относительно скалярного произведения

$$\langle \mathcal{L}_n^\alpha, \mathcal{L}_k^\alpha \rangle = \int_0^\infty \mathcal{L}_n^\alpha(x) \mathcal{L}_k^\alpha(x) dx.$$

В работе [1] для заданного $r \in \mathbb{N}$ была введена система функций

$$\lambda_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \mathcal{L}_n^\alpha(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\lambda_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1,$$

ортонормированная на $[0, \infty)$ относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(x) g^{(r)}(x) dx \quad (0.1)$$

и порожденная системой функций $\{\mathcal{L}_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$.

Поступила в редакцию 05.03.2019, после доработки 17.09.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №18-31-00477 мол. а.

В данной работе рассмотрим частный случай системы $\{\lambda_{r,n}^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ при $r = 1$ и $\alpha = 0$:

$$\lambda_0(x) = \lambda_{1,0}^0(x) = 1,$$

$$\lambda_{1+n}(x) = \lambda_{1,1+n}^0(x) = \int_0^x \mathcal{L}_n^0(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (0.2)$$

В этом случае для порожденных функций $\lambda_{1+n}(x)$ получены представления через классические полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ (теоремы 1 и 2). С помощью этих представлений и асимптотических формул для $L_n^\alpha(x)$ исследовано поведение функций $\lambda_{1+n}(x)$ при $x \in [0, \infty)$, $n \rightarrow \infty$ (теоремы 3–5) и получены оценки, аналогичные оценкам для функций $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ И ФУНКЦИЯХ ЛАГЕРРА

Для произвольного действительного α полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ можно определить [2] с помощью формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}^{(n)}.$$

Если $\alpha > -1$, то полиномы $L_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют на $[0, \infty)$ ортогональную систему относительно веса $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, т. е.

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) \rho(x) dx = \delta_{nm} h_n^\alpha,$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, $h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1)$. В частности, если $L_n(x) = L_n^0(x)$, то

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm}.$$

Нам понадобятся следующие свойства полиномов Лагерра:

- формула дифференцирования ([3], с. 191, формула (27))

$$[x^\alpha L_n^\alpha(x)]^{(m)} = (n-m+\alpha+1)_m x^{\alpha-m} L_{n-m}^{\alpha-m}(x), \quad (1.1)$$

где $(n)_0 = 1$, $(n)_m = n(n+1) \cdots (n+m-1)$;

- оценка ([3], с. 206, формула (14))

$$|L_n^\alpha(x)| \leq (\alpha+1)_n (n!)^{-1} e^{\frac{x}{2}}, \quad \alpha \geq 0; \quad (1.2)$$

- равенства ([4], с. 400, формула 1; [3], с. 192, формула (40))

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k L_n^{\lambda+k}(x)}{(\lambda+n+1)_k} = \frac{\lambda+n}{n} L_{n-1}^\lambda(x), \quad (1.3)$$

$$L_n^\alpha(\lambda x) = \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \lambda^{n-m} (1-\lambda)^m L_{n-m}^\alpha(x); \quad (1.4)$$

- асимптотические формулы [5]

и) если $\alpha \geq 0$, $0 \leq x \leq b\nu$, $0 < b < 1$, $n > n_0$, то

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1) 2^{\alpha-1/2} e^{x/2} \psi^{1/2}}{n! \nu^{\alpha/2-1/2} x^{\alpha/2+1/2} (\psi')^{1/2}} \left[J_\alpha(\nu\psi) + O\left(\frac{x^{1/2}}{\nu^{3/2}} \tilde{J}_\alpha(\nu\psi)\right) \right]; \quad (1.5)$$

ii) если $\alpha \geq 0$, $a\nu \leq x$, $0 < a$, $n > n_0$, то

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2} 2^{5/6} N^{N+1/6} e^{\frac{\pi}{2}}}{n! x^{\alpha/2+1/2} e^N (-\phi')^{1/2}} \left[Ai(-\nu^{\frac{2}{3}} \phi) + O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\nu^{\frac{2}{3}} \phi)}{x}\right) \right]. \quad (1.6)$$

В (1.5) и (1.6) $N = n + (\alpha + 1)/2$, $\nu = 4n + 2\alpha + 2$, $t = x/\nu$,

$$\psi = \psi(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t - t^2} + \arcsin(\sqrt{t}) \right), \quad 0 \leq t < 1,$$

$J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода, для которой справедлива асимптотическая формула ([2], с. 30, формула 1.71.7)

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(x^{-\frac{3}{2}} \right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.7)$$

$$\tilde{J}_\alpha(u) = \begin{cases} u^\alpha, & 0 < u \leq 1; \\ u^{-1/2}, & 1 < u, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\phi = \phi(t) = \begin{cases} \left[\frac{3}{4} \left(\arccos \sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)} \right) \right]^{2/3}, & 0 < t \leq 1; \\ - \left[\frac{3}{4} \left(\sqrt{t(t-1)} + \text{Arch} \sqrt{t} \right) \right]^{2/3}, & 1 < t, \end{cases} \quad (1.9)$$

$\text{Arch}(t)$ — функция, обратная к гиперболическому косинусу

$$\text{Arch}(t) = \ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right),$$

$Ai(u)$ — функция Эйри, для которой при $u > 0$ справедливы оценки

$$|Ai(-u)| = O \left(u^{-1/4} \right), \quad (1.10)$$

$$|Bi(-u)| = O \left(u^{-1/4} \right), \quad (1.11)$$

$$|Ai(u)| = O \left(u^{-1/2} \exp \left(-2/3 u^{3/2} \right) \right), \quad (1.12)$$

$$\widetilde{Ai}(u) = \begin{cases} Ai(u), & u \geq 0; \\ (|Ai(u)|^2 + |Bi(u)|^2)^{1/2}, & u \leq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Посредством асимптотических формул (1.5) и (1.6) в работе [6] были получены оценки для функций Лагерра $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$:

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \begin{cases} O(x^{\alpha/2} n^{\alpha/2}), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ O(n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}), & \frac{1}{n} \leq x \leq \eta n; \\ O(n^{-1/4} (\nu - x)^{-1/4}), & \eta n \leq x \leq \nu - \nu^{1/3}; \\ O(n^{-1/3}), & \nu - \nu^{1/3} \leq x \leq \nu + \nu^{1/3}; \\ O \left(n^{-1/4} (x - \nu)^{-1/4} e^{-\frac{1}{3}(x-\nu)^{\frac{3}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}}} \right), & \nu + \nu^{1/3} \leq x \leq (1 + \delta)\nu; \\ O(e^{-x/4}), & (1 + \delta)\nu \leq x, \end{cases} \quad (1.14)$$

где η, δ — достаточно малые положительные числа.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $\lambda_{1+n}(x)$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\lambda_{1+n}(x) = e^{-x/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k L_n^k(x)}{2^{k-1}(n+1)_k}, \quad (2.1)$$

в котором ряд сходится к $\lambda_{1+n}(x)$ равномерно на любом отрезке $[0, A]$, где $0 \leq A < \infty$.

Доказательство. Интегрируя по частям равенство (0.2) и используя соотношение (1.1), получим

$$\begin{aligned} \lambda_{1+n}(x) &= \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-\frac{t}{2}}, \quad du = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \\ dv = L_n(t) dt, \quad v = \frac{t}{n+1} L_n^1(t) \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x L_n^1(x)}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-\frac{t}{2}}, \quad du = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \\ dv = t L_n^1(t) dt, \quad v = \frac{t^2}{n+2} L_n^2(t) \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x L_n^1(x)}{n+1} + \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^2 L_n^2(x)}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \int_0^x t^2 e^{-\frac{t}{2}} L_n^2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Продолжая N раз этот процесс интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \lambda_{1+n}(x) &= e^{-x/2} \sum_{k=1}^N \frac{x^k L_n^k(x)}{2^{k-1}(n+1)_k} + \frac{1}{2^N(n+1)_N} \int_0^x t^N e^{-\frac{t}{2}} L_n^N(t) dt = \\ &= e^{-x/2} \sum_{k=1}^N \frac{x^k L_n^k(x)}{2^{k-1}(n+1)_k} + R_N(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \lambda_{1+n}(x) - e^{-x/2} \sum_{k=1}^N \frac{x^k L_n^k(x)}{2^{k-1}(n+1)_k} \right| = |R_N(x)|.$$

Покажем, что $|R_N(x)| \Rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и $x \in [0, A]$. С этой целью воспользуемся оценкой (1.2), тогда

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \frac{1}{2^N(n+1)_N} \int_0^x t^N e^{-\frac{t}{2}} (N+1)_n (n!)^{-1} e^{\frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2^N(n+1)_N} \frac{(N+1)_n}{n!} \frac{x^{N+1}}{N+1} = \frac{x^{N+1}}{2^N(N+1)!} \Rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad x \in [0, A]. \quad \square \end{aligned}$$

Используя равенство (2.1), можно получить еще одно представление для функций $\lambda_{1+n}(x)$ через полиномы Лагерра.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 1$. Тогда имеет место равенство*

$$\lambda_{1+n}(x) = (-1)^n 2 - 2e^{-x/2} L_n(x) + 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m 2^{n-m} \binom{n}{m} L_{n-m-1} \left(\frac{x}{2} \right). \quad (2.3)$$

Доказательство. Из (2.1), последовательно применяя равенства (1.4) при $\lambda = 2$ и (1.3) при $\lambda = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{1+n}(x) &= 2e^{-x/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k L_n^k(x)}{2^k (n+1)_k} = 2e^{-x/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k L_n^k(x)}{2^k (n+1)_k} - 2e^{-x/2} L_n(x) = \\
&= 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^n (-1)^m 2^{n-m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k L_{n-m}^k\left(\frac{x}{2}\right)}{(n+1)_k} - 2e^{-x/2} L_n(x) = \\
&= 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^n (-1)^m 2^{n-m} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k L_{n-m}^k\left(\frac{x}{2}\right)}{(n-m+1)_k} - 2e^{-x/2} L_n(x) = \\
&= (-1)^n 2 - 2e^{-x/2} L_n(x) + 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m 2^{n-m} \binom{n}{m} L_{n-m-1}\left(\frac{x}{2}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание 1. Если положить $L_{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, то равенство (2.3) верно и для $n = 0$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $\lambda_{1+n}(x)$

В этом разделе рассмотрим вопрос о поведении функций $\lambda_{1+n}(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $x \in [0, \infty)$. С этой целью представим $\lambda_{1,1+n}(x)$ в виде

$$\lambda_{1+n}(x) = \frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{n+1} L_n^1(x) + R_n(x),$$

где согласно (2.2)

$$R_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt. \quad (3.1)$$

Теорема 3. Пусть $x \in [0, b\theta]$, $0 < b < 1$, $\theta = 4n + 4$. Тогда для величины $R_n(x)$, определенной равенством (3.1), справедливы оценки

$$R_n(x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n^2}\right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\theta^{\frac{1}{2}}(\theta-x)^{\frac{3}{4}}}\right), & \frac{1}{n} < x \leq b\theta. \end{cases}$$

Доказательство. Для оценки величины $R_n(x)$ рассмотрим два случая:

1) пусть $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, тогда из (1.14) следует

$$|R_n(x)| \leq \frac{c}{2(n+1)} \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} |L_n^1(t)| dt \leq \frac{c\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} \int_0^x t dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

2) пусть $\frac{1}{n} < x \leq b\theta$, тогда из (1.5) получим

$$|R_n(x)| = \frac{1}{2(n+1)} \left| \int_0^{1/n} t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt + \int_{1/n}^x t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt \right| \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2(n+1)} \left| \int_{1/n}^x t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt \right| =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2(n+1)} \frac{2^{1/2}\Gamma(n+2)}{n!} \left| \int_{1/n}^x \left(\frac{\psi}{\psi'}\right)^{1/2} \left(J_1(\theta\psi) + O\left(\frac{t^{1/2}}{\theta^{3/2}} \tilde{J}_1(\theta\psi)\right) \right) dt \right|.$$

Далее из определения функции $\psi(\tau)$ следует $\psi(\tau) = \tau^{1/2}(1 + O(\tau))$, $\tau = \frac{t}{\theta}$. Тогда

$$\theta\psi = \theta\sqrt{\tau}(1 + O(\tau)) = \sqrt{\theta t} + O\left(\frac{t^{3/2}}{\theta^{1/2}}\right) = O(\sqrt{\theta t}),$$

и с учётом равенств (1.7) и (1.8) получим

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{1/n}^x \left(\frac{\psi}{\psi'}\right)^{1/2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi\theta\psi}} \cos\left(\theta\psi - \frac{3\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{(\theta\psi)^{3/2}}\right) + O\left(\frac{t^{1/2}}{\theta^2\psi^{1/2}}\right) \right] dt \right| \leq \\ &\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{x^{3/4}}{\theta(\theta-x)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{x^{3/4}}{\theta^{5/4}}\right) + O\left(\frac{1}{\theta^{1/2}}\right) \left| \int_{1/n}^x \frac{t^{1/4}}{(\theta-t)^{1/4}} \cos\left(\theta\psi - \frac{3\pi}{4}\right) dt \right|. \end{aligned}$$

Отдельно оценим последний интеграл (попутно воспользуемся второй теоремой о среднем значении [7], с. 600):

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/n}^x \frac{t^{1/4}}{(\theta-t)^{1/4}} \frac{\psi'\left(\frac{t}{\theta}\right)}{\psi'\left(\frac{t}{\theta}\right)} \cos\left(\theta\psi\left(\frac{t}{\theta}\right) - \frac{3\pi}{4}\right) dt \right| &= 2 \left| \int_{1/n}^x \frac{t^{3/4}}{(\theta-t)^{3/4}} \psi'\left(\frac{t}{\theta}\right) \cos\left(\theta\psi\left(\frac{t}{\theta}\right) - \frac{3\pi}{4}\right) dt \right| = \\ &= 2 \left| \frac{(1/n)^{3/4}}{(\theta-1/n)^{3/4}} \int_{1/n}^{\xi} \psi'\left(\frac{t}{\theta}\right) \cos\left(\theta\psi\left(\frac{t}{\theta}\right) - \frac{3\pi}{4}\right) dt + \frac{x^{3/4}}{(\theta-x)^{3/4}} \int_{\xi}^x \psi'\left(\frac{t}{\theta}\right) \cos\left(\theta\psi\left(\frac{t}{\theta}\right) - \frac{3\pi}{4}\right) dt \right| = \\ &= O\left(\frac{1}{(n\theta-1)^{3/4}}\right) + O\left(\frac{x^{3/4}}{(\theta-x)^{3/4}}\right) = O\left(\frac{x^{3/4}}{(\theta-x)^{3/4}}\right), \quad \frac{1}{n} < \xi \leq x. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } R_n(x) = O\left(\frac{x^{3/4}}{\theta^{1/2}(\theta-x)^{3/4}}\right). \quad \square$$

Теорема 4. Пусть $\theta - \theta^{1/3} \leq x \leq (1+\delta)\theta$, $\theta = 4n+4$, δ — достаточно малое положительное число. Тогда для величины $R_n(x)$, определенной равенством (3.1), справедлива оценка $R_n(x) = O(1)$.

Доказательство. Из теоремы 3 и формулы (1.6) имеем (попутно воспользуемся формулой Стирлинга $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(1/n))$)

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{2(n+1)} \left| \left(\int_0^{\theta-\theta^{1/3}} + \int_{\theta-\theta^{1/3}}^x \right) t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt \right| \leq O(1) + \frac{1}{2(n+1)} \left| \int_{\theta-\theta^{1/3}}^x t e^{-\frac{t}{2}} L_n^1(t) dt \right| = \\ &= O(1) + \frac{1}{2(n+1)} \left| \int_{\theta-\theta^{1/3}}^x \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^{5/6} (n+1)^{n+7/6}}{n! e^{n+1}} \left[\frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{\sqrt{-\phi'}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) \right] dt \right| = \end{aligned}$$

$$= O(1) + O\left(\frac{1}{\theta^{1/3}}\right) \left| \int_{\theta-\theta^{1/3}}^x \left[\frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{\sqrt{-\phi'}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) \right] dt \right|. \quad (3.2)$$

Рассмотрим два случая: 1) $\theta - \theta^{1/3} \leq x \leq \theta$, 2) $\theta \leq x \leq (1+\delta)\theta$. В случае 1) из определения функции $\phi = \phi(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\theta}$ и (1.10), (1.13), (1.11) следует

$$\begin{aligned} \frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{\sqrt{-\phi'}} &= \frac{O(\theta^{-1/6}\phi^{-1/4})}{\sqrt{-\phi'}} = \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1/4} O\left(\frac{1}{\theta^{1/6}}\right) = \left(\frac{t}{\theta-t}\right)^{1/4} O\left(\frac{1}{\theta^{1/6}}\right), \\ O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) &= \frac{O(\theta^{-1/6}\phi^{-1/4})}{t\sqrt{-\phi'}} = \frac{1}{t} \left(\frac{t}{\theta-t}\right)^{1/4} O\left(\frac{1}{\theta^{1/6}}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= O(1) + O\left(\frac{1}{\theta^{1/2}}\right) \int_{\theta-\theta^{1/3}}^x \left(\frac{t}{\theta-t}\right)^{1/4} \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \\ &= O(1) + O\left(\frac{x^{1/4} [\theta^{1/4} - (\theta-x)^{3/4}]}{\theta^{1/2}}\right) = O(1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В случае 2) из (3.2) и оценки (3.3) имеем

$$|R_n(x)| = O(1) + O\left(\frac{1}{\theta^{1/3}}\right) \left| \int_{\theta}^x \left[\frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{\sqrt{-\phi'}} + O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) \right] dt \right|. \quad (3.4)$$

Далее нам понадобится некоторая информация о функции $\phi = \phi(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\theta}$, определенной равенством (1.9). Нетрудно проверить, что

$$-\phi' = \frac{\sqrt{\tau-1}}{2\sqrt{\tau}\sqrt{-\phi}} \quad (3.5)$$

и

$$-\phi = (\tau-1) \left[\frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1/2)_k}{(k+3/2)k!} (\tau-1)^k \right]^{2/3}.$$

Заметим, что это ряд лейбницевского типа, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1/2)_k}{(k+3/2)k!} (\tau-1)^k \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{5}(\tau-1) = \frac{13}{15} - \frac{1}{5}\tau$$

и

$$-\phi \geq (\tau-1) \left[\frac{1}{20} (13-3\tau) \right]^{2/3}. \quad (3.6)$$

Тогда из (1.12) и (1.13), с учетом (3.6), (3.5), получаем

$$\frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{\sqrt{-\phi'}} = \frac{O\left(\theta^{-1/3}(-\phi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{2}{3}\theta(-\phi)^{3/2}\right)\right)}{\sqrt{-\phi'}} = \frac{1}{\sqrt{-\phi}\sqrt{-\phi'} \exp\left(\frac{2}{3}\theta(-\phi)^{3/2}\right)} O\left(\theta^{-1/3}\right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq O\left(\frac{1}{\theta^{1/3}}\right) \frac{\tau^{1/4}}{(\tau-1)^{1/2}(13-3\tau)^{1/6} \exp\left(\frac{1}{30}\theta(\tau-1)^{3/2}(13-3\tau)\right)} = \\
&= O\left(\theta^{1/12}\right) \frac{t^{1/4}}{(t-\theta)^{1/2}(13\theta-3t)^{1/6} \exp\left(\frac{1}{30}\left(\frac{t-\theta}{\theta}\right)^{3/2}(13\theta-3t)\right)}, \\
&\quad O\left(\frac{\widetilde{Ai}(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) = O\left(\frac{Ai(-\theta^{2/3}\phi)}{t\sqrt{-\phi'}}\right) \leq \\
&\leq O\left(\theta^{1/12}\right) \frac{t^{1/4}}{(t-\theta)^{1/2}(13\theta-3t)^{1/6} \exp\left(\frac{1}{30}\left(\frac{t-\theta}{\theta}\right)^{3/2}(13\theta-3t)\right)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4) выводим

$$|R_n(x)| = O(1) + O\left(\frac{1}{\theta^{1/4}}\right) \int_{\theta}^x \frac{t^{1/4}}{(t-\theta)^{1/2}(13\theta-3t)^{1/6}} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{30}\left(\frac{t-\theta}{\theta}\right)^{3/2}(13\theta-3t)\right)} dt. \quad (3.7)$$

Оценим последний интеграл

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta}^x \frac{t^{1/4}}{(t-\theta)^{1/2}(13\theta-3t)^{1/6} \exp\left(\frac{1}{30}\left(\frac{t-\theta}{\theta}\right)^{3/2}(13\theta-3t)\right)} dt \leq \frac{c_1}{\theta^{1/6}} \int_{\theta}^x \frac{t^{1/4}}{(t-\theta)^{1/2} \exp\left(c_2 \frac{(t-\theta)^{3/2}}{\theta^{1/2}}\right)} dt = \\
&= \frac{c_1}{\theta^{1/6}} \int_0^{\sqrt{x-\theta}} \frac{(y^2+\theta)^{1/4}}{\exp\left(c_2 \frac{y^3}{\theta^{1/2}}\right)} dy \leq \frac{c_1 x^{1/4}}{\theta^{1/6}} \int_0^{\sqrt{x-\theta}} \frac{1}{\exp\left(c_2 \frac{y^3}{\theta^{1/2}}\right)} dy. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Для оценки этого интеграла рассмотрим два случая: 1) $\theta \leq x \leq \theta + \theta^{1/3}$, 2) $\theta + \theta^{1/3} \leq x \leq (1+\delta)\theta$. В случае 1) имеем

$$\frac{c_1 x^{1/4}}{\theta^{1/6}} \int_0^{\sqrt{x-\theta}} \frac{1}{\exp\left(c_2 \frac{y^3}{\theta^{1/2}}\right)} dy \leq \frac{c_1 x^{1/4} \sqrt{x-\theta}}{\theta^{1/6}}. \quad (3.9)$$

Аналогично оценим и случай 2):

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1 x^{1/4}}{\theta^{1/6}} \int_0^{\sqrt{x-\theta}} \frac{1}{\exp\left(c_2 \frac{y^3}{\theta^{1/2}}\right)} dy = \frac{c_1 x^{1/4}}{\theta^{1/6}} \left(\int_0^{\theta^{1/6}} + \int_{\theta^{1/6}}^{\sqrt{x-\theta}} \right) \frac{dy}{\exp\left(c_2 \frac{y^3}{\theta^{1/2}}\right)} \leq \\
&\leq c_1(\theta + \theta^{1/3})^{1/4} + \frac{c_1 x^{1/4}}{\theta^{1/6}} \frac{(\sqrt{\theta})^{1/3}}{c_2^{1/3}} \int_{c_2}^{\frac{c_2(x-\theta)^{3/2}}{\sqrt{\theta}}} \frac{1}{\tau^{2/3}} e^{-\tau} d\tau = O(\theta^{1/4}). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Собирая оценки (3.7)–(3.10), получаем $R_n(x) = O(1)$, $\theta \leq x \leq (1+\delta)\theta$. $\square$

Наконец, рассмотрим случай, когда $x > (1+\delta)\theta$. Справедлива

Теорема 5. Пусть $x \in ((1 + \delta)\theta, \infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_{1+n}(x) = (-1)^n 2 + r_n,$$

в которой $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из (2.3) и оценки (1.14) имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_{1+n}(x) - (-1)^n 2| &\leq 2e^{-x/2} |L_n(x)| + 2e^{-x/2} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{n-m} \binom{n}{m} \left| L_{n-m-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq 2ce^{-x/4} + 2ce^{-3x/8} \sum_{m=0}^n 2^{n-m} \binom{n}{m} = \\ &= 2ce^{-x/4} + 2ce^{-3x/8} (3^n - 1) \leq 2c \frac{1}{e^{n+1}} + 2c \left(\frac{3}{e^{3/2}} \right)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Из теорем 3–5 и оценки (1.14) вытекает

Следствие. Имеют место оценки

$$\lambda_{1+n}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n}\right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ O\left(\frac{x^{1/4}}{n^{3/4}}\right), & \frac{1}{n} \leq x \leq \eta n; \\ O\left(\frac{n^{1/4}}{(\theta - x)^{3/4}}\right), & \eta n \leq x \leq \theta - \theta^{1/3}; \\ O(1), & \theta - \theta^{1/3} \leq x, \end{cases}$$

где η — достаточно малое положительное число.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gadzhimirzaev R.M. *Sobolev-orthonormal system of functions generated by the system of Laguerre functions*, Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**:1, 32–46 (2019); doi 10.15393/j3.art2019.5150
- [2] Сега Г. *Ортогональные многочлены* (Физматгиз, М., 1962).
- [3] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 2 (Наука, М., 1966).
- [4] Брычков Ю.А. *Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. Справочник* (Физматлит, М., 2006).
- [5] Erdélyi A. *Asymptotic forms for Laguerre polynomials*, J. Indian Math. Soc., 24, 1960, 235–250.
- [6] Askey R., Wainger S. *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series*, Amer. J. Math., **87**, 698–708 (1965).
- [7] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2 (Физматлит, М., 2001).

Рамис Махмудович Гаджимирзаев

Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук,
ул. М. Гаджиева, д. 45, г. Махачкала, 367000, Россия,

e-mail: ramis3004@gmail.com

R.M. Gadzhimirzaev

Integral estimates for Laguerre polynomials with exponential weight function

Abstract. In this paper we consider the system of functions $\lambda_{1+n}(x)$ generated by the system of Laguerre function. For the functions $\lambda_{1+n}(x)$ different representations in terms of the Laguerre polynomials $L_n^\alpha(x)$ are obtained. Using these representations and asymptotic formulas for the $L_n^\alpha(x)$ polynomials, we investigated the behavior of the functions $\lambda_{1+n}(x)$ on $[0, \infty)$ as $n \rightarrow \infty$ and obtained estimates similar to those for the Laguerre functions

Keywords: Laguerre polynomials, Laguerre functions, asymptotic properties.

Ramis Makhmudovich Gadzhimirzaev

*Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
45 M. Gadjeva str., Makhachkala, 367000 Russia,*

e-mail: ramis3004@gmail.com