Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Некоторые свойства почти абелевых алгебр Ли, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 26–42

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-26-42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:41:20

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Аннотация. Изучаются конечномерные алгебры Ли, имеющие абелев идеал коразмерности 1. Доказаны некоторые их свойства, в том числе и связанные со строением пространства всех алгебр Ли. Также вычислены группы автоморфизмов таких алгебр Ли.

Ключевые слова: почти абелева алгебра Ли, нильпотентная алгебра Ли, сжатие, матрица Жордана.

УДК: 512.554

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-26-42

ВВЕДЕНИЕ

В статье изучаются свойства конечномерных алгебр Ли, имеющих абелев идеал коразмерности 1. Такие алгебры Ли можно рассматривать как следующие по простоте их строения после абелевых. Имеется и другой класс алгебр Ли, очень близких к абелевым — это алгебры Ли, у которых коммутант одномерен (их описать очень легко — это прямые суммы алгебр Гейзенберга и абелевых алгебр Ли).

Алгебры Ли предполагаются в статье всегда конечномерными и определенными над некоторым полем K характеристики 0. Но модельными для нас будут конечномерные вещественные и комплексные алгебры Ли.

Если конечномерная алгебра Ли L над полем K характеристики 0 имеет абелев идеал коразмерности 1, то она разрешима и может быть представлена в виде полупрямой суммы $K +_{\phi} K^{n-1}$ (здесь и далее K^m рассматривается как абелева алгебра Ли), определяемой гомоморфизмом $\phi : K \rightarrow gl_{n-1}(K)$, который однозначно определяется линейным оператором (и его матрицей) $\Phi = \phi(1)$. Абелева алгебра Ли L соответствует нулевой матрице $\Phi = 0$.

Полезно отметить, что для разрешимых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем наличие абелевого идеала коразмерности 1 эквивалентно наличию абелевой подалгебры Ли коразмерности 1 — это доказано, например, в [1], где также приведен пример четырехмерной вещественной алгебры Ли, для которой (из-за алгебраической незамкнутости поля $\mathbf{R}$) подобное утверждение неверно.

Обозначим через $L_n(K)$ пространство всех n -мерных алгебр Ли над полем K . Это пространство является алгебраическим подмножеством в K^{n^3} . Оно состоит из наборов структурных констант c_{ij}^k (упорядоченных некоторым способом, например, лексикографически), кососимметричных по нижним индексам и удовлетворяющих известным квадратичным соотношениям, вытекающих из тождества Якоби для алгебр Ли. На $L_n(K)$ естественным образом действует группа $GL_n(K)$. Орбиты этого действия соответствуют классам изоморфных между собой алгебр Ли, а стационарные подгруппы — группам автоморфизмов

этих алгебр Ли. В пространстве $L_n(K)$ рассмотрим подпространство $AA_n(K)$, состоящее из алгебр Ли, имеющих абелев идеал коразмерности 1 (такие алгебры Ли будем называть почти абелевыми), и подпространство $AAN_n(K)$, состоящее из нильпотентных алгебр Ли, в которых существует абелев идеал коразмерности 1 (такие алгебры Ли будем называть почти абелевыми нильпотентными). Те алгебры Ли, которые не лежат в $AA_n(K)$, характеризуются следующим свойством: у них любой идеал коразмерности 1 неабелев. Такие алгебры Ли, конечно, существуют — например, таковы прямые суммы неабелевых почти абелевых алгебр Ли.

Отметим, что алгебраическое подмножество $L_n(K)$ является конусом, т. е. если $\{c_{ij}^k\} \in L_n(K)$, то и $\{tc_{ij}^k\} \in L_n(K)$ при любом $t \in K$, причем при $t \neq 0$ соответствующие алгебры Ли изоморфны между собой, а при $t = 0$ мы получаем абелеву алгебру Ли. Также конусами будут $AA_n(K)$ и $AAN_n(K)$, учитывая, что абелева алгебра Ли тоже имеет абелев идеал коразмерности 1.

Цель данной статьи — изучение некоторых свойств множеств $AA_n(K)$ и $AAN_n(K)$. Множеству $AAN_n(K)$ будет уделено особое внимание.

Одной из мотивировок рассмотрения пространства $AAN_n(K)$ для автора было изучение пересечения всех неприводимых компонент алгебраического множества $L_n(K)$ (см. [2]–[4]); это пересечение было названо в [4] каркасом пространства $L_n(K)$. Было доказано, что для алгебраически замкнутого поля K и для $K = \mathbf{R}$ все алгебры Ли из этого пересечения являются почти абелевыми нильпотентными алгебрами Ли, т. е. это пересечение содержится в $AAN_n(K)$. Однако не все алгебры Ли из $AAN_n(K)$ лежат в указанном пересечении. Например, некоторые из алгебр Ли $N \in AAN_n(K)$ при $n \geq 8$ не содержатся в неприводимой компоненте, получающейся замыканием орбиты жесткой разрешимой алгебры Ли $r_2 \oplus r_2 \cdots \oplus r_2$, где r_2 — двумерная разрешимая неабелева, хотя и почти абелева, алгебра Ли; она единственна с точностью до изоморфизма. Напомним, что алгебра Ли называется жесткой, если ее $GL_n(K)$ -орбита открыта в $L_n(K)$ (или, как возможный вариант, в некотором заданном подпространстве, тогда говорят о жесткости в этом подпространстве). При этом открытость можно рассматривать как в евклидовой топологии (при $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$), так и в топологии Зарисского (для произвольного поля K).

Всякая алгебра Ли L из $AA_n(K)$ может быть представлена в виде полупрямой суммы $L = \langle X \rangle + A$, где $\langle X \rangle$ — одномерное подпространство в L , порожденное ненулевым элементом $X \in L$, а A — абелев идеал коразмерности 1. Рассмотрим линейный оператор $\Phi = ad_X|_A$ — ограничение действия (с помощью присоединенного представления ad алгебры Ли L) оператора ad_X на идеал A . Идеал A можно разложить в прямую сумму двух инвариантных подпространств $A = A_0 \oplus A_1$, где A_0 — корневое подпространство, соответствующее собственному значению 0 оператора Φ , а A_1 — сумма корневых подпространств оператора Φ , соответствующих всем ненулевым собственным значениям оператора Φ . Ясно, что при фиксированном идеале $A \subset L$ эти два инвариантных подпространства определены однозначно — они не зависят от выбора вектора X , дополнительного к идеалу A . Оба этих подпространства являются, очевидно, абелевыми идеалами в L . Нас будет интересовать подпространство A_0 . Как выяснится, с подпространством A_1 работать намного проще. Что касается всей алгебры Ли L , то она задается в виде полупрямой суммы $\langle X \rangle +_\phi A$, а линейный оператор $\Phi = \phi(1)$ есть прямая сумма операторов Φ_{A_0} и Φ_{A_1} , действующих на A_0 и A_1 соответственно. Собственные значения оператора Φ на A_0 нулевые, а собственные значения на A_1 , предполагая, что поле K алгебраически замкнуто (нам особо важен случай, когда $K = \mathbf{C}$), мы обозначим через λ_i .

Отметим, что идеал A_1 характеристичен в L , поскольку он равен $C^\infty(L)$ — предельному члену нижнего центрального ряда алгебры Ли L . Что же касается идеала A_0 , то он в общем случае не является характеристическим. Подробнее это будет рассмотрено ниже.

Так как по условию действие оператора Φ на A_0 нильпотентно, то матрица ограничения Φ_0 линейного оператора Φ на A_0 представляется в виде прямой суммы жордановых клеток $\bigoplus_i J_{k_i}(0)$, соответствующих нулевому собственному значению, и эта прямая сумма матриц, как легко понять, не зависит (с точностью до перестановки клеток) от выбора ненулевого элемента X вне A — даже от умножения X на ненулевое число. При этом $k_1 + k_2 + \dots = n_0$, где $n_0 = \dim A_0$. Упорядочим порядки k_i этих клеток по убыванию (точнее, по невозрастанию) и положим $\mathcal{K} = (k_1, k_2, \dots)$ — этот целочисленный вектор характеризует нильпотентную матрицу однозначно с точностью до подобия. При $k_i = 1$ имеем нулевую матрицу порядка 1; иногда удобно все такие матрицы в указанной выше прямой сумме объединить в одно прямое слагаемое. Число векторов $\mathcal{K}$ при фиксированной сумме n_0 его компонент конечно — оно равно числу упорядоченных разбиений числа n_0 и может быть легко вычислено явно (нам это не понадобится). Такого рода векторы можно изображать графически, используя распространенные в комбинаторике диаграммы Юнга. Они образованы набором клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность. Набор чисел, состоящий из длин таких строк, задает в нашем случае разбиение неотрицательного целого числа n_0 (связанное с вектором $\mathcal{K}$), которое равно общему количеству клеток диаграммы.

Если поле K алгебраически замкнуто и характеристики 0, то матрица оператора Φ_1 приводится к жордановой форме. Мы можем считать (выбрав подходящий базис в A_1), что эта матрица имеет вид $\bigoplus J_{q_j}(\lambda_j)$; здесь q_j — порядки жордановых клеток. Так как элемент X , дополнительный к абелеву идеалу A в L , можно умножать на любое ненулевое число, то мы можем при желании нормировать каким-либо способом матрицу оператора Φ . Например, для $K = \mathbb{C}$ можно предполагать, что сумма модулей всех собственных значений оператора Φ равна 1 для ненильпотентных почти абелевых алгебр Ли L (эта сумма равна 0 для случая нильпотентных почти абелевых алгебр Ли).

Если $A = A_0$, то алгебра Ли L будет нильпотентна (верно, конечно, и обратное). Тогда вектор $\mathcal{K}$ однозначно описывает алгебру Ли L в виде полупрямой суммы (указанного выше вида). В этом случае L — элемент пространства $AAN_n(K)$.

Для произвольной нильпотентной матрицы U , разложенной в прямую сумму жордановых клеток $J_{k_i}(0)$, отметим, что $\dim \text{Ker}(U)$ равно числу (которое обозначим через p) этих жордановых клеток.

Алгебра Ли L называется несократимой, если ее нельзя представить в виде прямой суммы некоторой абелевой алгебры Ли положительной размерности и некоторой другой алгебры Ли положительной размерности. Например, абелева алгебра Ли размерности ≥ 2 всегда сократима, а одномерная алгебра Ли несократима. Как хорошо известно, произвольная алгебра Ли размерности ≥ 2 несократима тогда и только тогда, когда ее центр $Z(L)$ содержится в ее коммутанте $[L, L]$. Ясно также, что произвольная (конечномерная, как всегда в данной статье) алгебра Ли L может быть представлена в виде прямой суммы некоторой абелевой алгебры Ли и несократимой алгебры Ли. При этом абелево прямое слагаемое определяется по L однозначно с точностью до изоморфизма. То же верно, как известно, и для второго прямого слагаемого (нам этот факт не понадобится).

Отметим без доказательства

Предложение 1. *Сократимая алгебра Ли $L = L' \oplus A$ (где алгебра Ли L' несократима, а A абелева) будет почти абелевой тогда и только тогда, когда такова L' .*

Введем еще одно понятие, тесно связанное с понятием несократимости. Алгебра Ли L называется разложимой, если она может быть представлена в виде прямой суммы $L = L_1 \oplus L_2$ двух алгебр Ли положительной размерности. Ясно, что сократимая алгебра Ли разложима. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, прямая сумма $n_3 \oplus n_3$ двух трехмерных нильпотентных (и неабелевых) алгебр Ли несократима, но, очевидно, разложима. Однако оказывается, что для изучаемого нами класса алгебр Ли — почти абелевых — понятия несократимости и неразложимости эквивалентны (как, конечно, и понятия сократимости и разложимости). А именно, имеет место

Предложение 2. *Почти абелева алгебра Ли L несократима тогда и только тогда, когда она неразложима.*

Доказательство. Из неразложимости любой алгебры Ли, очевидно, следует ее несократимость. Рассмотрим обратное утверждение.

Пусть L — несократимая почти абелева алгебра Ли. Предположим, что L разложима, т. е. $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1, L_2 — две алгебры Ли положительной размерности. Обозначим через $p_i : L \rightarrow L_i$, $i = 1, 2$, проекции на прямые слагаемые.

Так как L почти абелева, то в ней имеется абелев идеал A коразмерности 1. Положим $A_i = p_i(A)$. Тогда A_i — абелевы идеалы коразмерности ≤ 1 в L_i , $i = 1, 2$. Ясно, что идеал A содержится в прямой сумме $A_1 \oplus A_2$. Если какой-то идеал A_i имеет коразмерность 0, то это значит, что соответствующая алгебра Ли L_i абелева. Но поскольку она положительной размерности, то получаем, что алгебра Ли L сократима, а это противоречит нашему предположению.

В результате получаем, что оба идеала A_i имеют коразмерности 1. Но тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ имеет в L коразмерность 2. А так как идеал A содержится в $L_1 \oplus L_2$, то он не может иметь коразмерности 1 в L . Полученное противоречие показывает, что наше предположение о разложимости алгебры Ли L неверно. Другими словами, L будет неразложимой. $\square$

Предложение 2 понадобится при вычислении групп автоморфизмов почти абелевых алгебр Ли.

Исходя из жорданова разложения, указанного выше, абелев идеал A_0 раскладывается в прямую сумму корневых подпространств $A = \bigoplus_i V_i$. Если последний из элементов вектора K равен единице, то алгебра Ли N сократима; верно, конечно, и обратное. Объединив те V_i , для которых $k_i = 1$, в одно прямое слагаемое, получим разложение $L = L' \oplus K^q$, где $q \geq 0$, а L' — несократимая алгебра Ли. Рассмотрим теперь естественное действие группы $GL_n(K)$ на $AAN_n(K)$. Пространство орбит этого действия состоит из классов попарно изоморфных алгебр Ли из $AAN_n(K)$. Из данного выше описания почти абелевых нильпотентных алгебр Ли следует (см. теорему 1), что число этих орбит конечно, поскольку оно не превосходит количества невозрастающих разбиений натурального числа n (на самом деле оно равно ему, см. ниже).

После написания первоначального варианта данной статьи автор познакомился со статьей [5]. Там содержится некоторый аналог теоремы 1 (он приведен без доказательства) и утверждение, эквивалентное теореме 3, которая ранее была известна автору в некоторых частных случаях для почти абелевых нильпотентных алгебр Ли. Однако доказательство этого утверждения в [5] только намечено и содержит некоторую неточность (см. доказательство теоремы 3).

В разделе 1 рассмотрены некоторые общие свойства почти абелевых нильпотентных алгебр Ли. В частности, дана классификация почти абелевых нильпотентных алгебр Ли с

точностью до изоморфизма — классы изоморфных среди таких алгебр Ли параметризуются диаграммами Юнга, задающими нильпотентный оператор присоединенного действия на абелевом идеале некоторого элемента, не принадлежащего этому идеалу. Также дано описание произвольных почти абелевых алгебр Ли. В разделе 2 изучена структура множества почти абелевых нильпотентных алгебр Ли с точки зрения отношения сжатия между такими алгебрами Ли. В разделе 3 вычисляются группы автоморфизмов почти абелевых алгебр Ли. В разделе 4 рассмотрены некоторые сжатия разрешимых алгебр Ли, которые проясняют строение каркасов пространств произвольных алгебр Ли, изученных в предыдущих работах автора. Показано, что множество всех почти абелевых нильпотентных алгебр Ли строго больше, чем множество алгебр Ли в пересечении всех неприводимых компонент пространства всех алгебр Ли.

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Начнем с получения одной удобной характеристики алгебр Ли из $AA_n(K)$. Исходное определение здесь требует указания некоторого абелева идеала коразмерности 1, что не всегда легко и удобно делать (напомним, что алгебра Ли называется почти абелевой, если она имеет абелев идеал коразмерности 1). При этом если алгебра Ли L нильпотентна, то здесь достаточно предполагать лишь существование в ней подалгебры Ли коразмерности 1, так как любая такая подалгебра Ли в нильпотентной L автоматически будет идеалом.

Предложение 3. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем K характеристики 0, причем L не является нильпотентной класса ≤ 2 . Эта алгебра будет почти абелевой тогда и только тогда, когда централизатор $Z_L([L, L])$ в L ее коммутанта $[L, L]$ абелев и имеет коразмерность 1.*

Доказательство. Отметим, что централизатор идеала всегда является идеалом и потому $Z_L([L, L])$ — всегда идеал в L .

Предположим, что $Z_L([L, L])$ — абелев идеал коразмерности 1. Тогда сразу получаем, что алгебра Ли L почти абелева. Заметим, что здесь предположение о том, что алгебра Ли L не является нильпотентной класса ≤ 2 , нами не использовалось. Оно понадобится только для доказательства обратного утверждения.

Докажем обратное утверждение. Пусть алгебра Ли L почти абелева и A — некоторый абелев идеал в ней коразмерности 1. Алгебра Ли L/A одномерна, поэтому абелева и потому $A \supseteq [L, L]$. Следовательно, $Z_L([L, L]) \supseteq A$ и потому изучаемый нами централизатор имеет коразмерность 0 или 1. Предположим, что коразмерность эта равна нулю, т. е. $Z_L([L, L]) = L$. Тем самым коммутант $[L, L]$ централен в L и потому L должна быть нильпотентной класса 1 или 2. Но это противоречит нашему предположению относительно L . Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $Z_L([L, L])$ — идеал коразмерности 1. Но он содержит абелев идеал A , который сам имеет коразмерность 1, и потому $Z_L([L, L]) = A$. В частности, централизатор $Z_L([L, L])$ абелев. Тем самым доказано, что $Z_L([L, L])$ — абелев идеал коразмерности 1. $\square$

Заметим, что в $AA_n(K)$ выделяются своими специфическими свойствами алгебры Ли L класса нильпотентности ≤ 2 . Для них коммутант всегда централен и потому его централизатор совпадает со всей алгеброй Ли (которая может быть и неабелевой).

Из предложения 3 получаем, что если нильпотентная алгебра Ли N имеет класс нильпотентности ≥ 3 , то она принадлежит $AA_n(K)$, т. е. является почти абелевой, тогда и только тогда, когда централизатор $Z_N([N, N])$ является абелевой подалгеброй коразмерности 1.

В связи с ограничением, наложенным на алгебры Ли L в предложении 3, естественно возникает необходимость изучить почти абелевы нильпотентные алгебры Ли класса нильпотентности 2. Алгебры же Ли класса нильпотентности 1 абелевы и их изучение тривиально, причем у них коммутант $[L, L]$ всегда тривиален (т.е. нулевой), а его централизатор совпадает со всей алгеброй Ли L . Поэтому предположим, что N — некоторая нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности 2 (иногда такие алгебры Ли называют метабелевыми).

Используем представление почти абелевой нильпотентной алгебры Ли N в виде полупрямой суммы $K +_{\phi} K^{n-1}$, как это было описано выше. Ясно, что в жордановом разложении нильпотентной матрицы $\phi(1)$ в 2-нильпотентном случае могут фигурировать только жордановы клетки $J_2(0)$ и $J_1(0)$ (и соответствующий вектор $\mathcal{K}$ имеет вид $(2, 2, \dots, 1, \dots, 1)$). При этом, если алгебра Ли N несократима, то клеток порядка 1 нет. Обозначим числа клеток вида $J_2(0)$ и $J_1(0)$ в жордановом разложении матрицы $\phi(1) = \bigoplus J_i(0)$ через k и l соответственно. Тогда $2k + l = n - 1$. Если N несократима, то $2k = n - 1$, что возможно только при нечетных значениях размерности n алгебры Ли N . Причем очевидно, что для таких n существует только одна с точностью до изоморфизма 2-нильпотентная несократимая почти абелева алгебра Ли. В общем случае, придавая l значения $0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, с точностью до изоморфизма получим ровно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 2-нильпотентных почти абелевых алгебр Ли. Из них “главной” является алгебра Ли, соответствующая вектору $(2, 2, \dots, 2)$ или $(2, 2, \dots, 2, 1)$ в зависимости от того, является ли число n четным или нечетным. Все остальные указанные алгебры Ли получаются из этих алгебр Ли некоторыми сжатиями (о сжатиях будет рассказано ниже).

Перейдем к подробному изучению произвольных почти абелевых нильпотентных алгебр Ли.

Алгебре Ли $N \in \text{AAN}_n(K)$ сопоставляется, как было описано выше, вектор $\mathcal{K} = (k_1, k_2, \dots)$ или, что то же, монотонно убывающее (невозрастающее) разбиение числа $n - 1$. Обратно, по такому вектору $\mathcal{K}$ можно построить (через жордановы клетки и полупрямую сумму — см. выше) алгебру Ли из $\text{AAN}_n(K)$, которую обозначим $N(\mathcal{K})$. Выясним степень однозначности этих соответствий, рассматривая алгебры Ли с точностью до изоморфизма.

Для произвольного вектора $\mathcal{K} = (k_1, k_2, \dots)$ положим $\tilde{\mathcal{K}} = (k_1, k_2, \dots, 1)$. Другими словами, вектор $\tilde{\mathcal{K}}$ получается из $\mathcal{K}$ приписыванием в его конце одной новой координаты, равной единице. Очевидно, что вектор $\tilde{\mathcal{K}}$ соответствует матрице линейного оператора ad_X , действующего на всей алгебре Ли N (тогда как $\mathcal{K}$ соответствует действию ad_X на идеале $A \subset N$ коразмерности 1), причем он не зависит от выбора абелева идеала A коразмерности 1 в L , так как действие ad_X на L можно представить в виде прямой суммы тривиального одномерного представления ($\text{ad}_X(X) = 0$) и представления на A . При этом ясно, что $\mathcal{K}$ и $\tilde{\mathcal{K}}$ друг друга взаимно однозначно определяют.

Теорема 1. 1) Две нильпотентные почти абелевы алгебры Ли $N = N(\mathcal{K})$ и $N' = N(\mathcal{K}')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$.

2) Две почти абелевы алгебры Ли одинаковой размерности изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие векторы $\mathcal{K}$ у них совпадают, а наборы пар (λ_j, q_j) (здесь q_j — порядки жордановых клеток — см. подробнее выше) одинаковы с точностью до их перестановки и пропорциональности наборов собственных значений λ_j .

Доказательство 1) Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$, то соответствующие алгебры Ли имеют изоморфные разложения в полупрямые суммы вида $\langle X \rangle + A$ и потому изоморфны. Докажем обратное утверждение.

Рассмотрим две изоморфные алгебры Ли N, N' из $\text{AAN}_n(K)$. Пусть A, A' — некоторые абелевы идеалы коразмерности 1 в них. Рассмотрим также два элемента X, X' в этих ал-

гебрах Ли, дополнительные к указанным идеалам. Так как идеалы A, A' абелевы, а сами алгебры Ли изоморфны, то соответствующие им векторы $\bar{K}, \bar{K}'$ должны совпадать. Отбросив у них последнюю координату, приходим к равенству $K = K'$.

2) Здесь для доказательства применима та же схема рассуждений, что и в п. 1). Нужно только вспомнить, что оператор Φ на A разлагается в прямую сумму операторов Φ_0 и Φ_1 . Для нильпотентного оператора Φ_0 все уже сделано в п. 1). Что касается оператора Φ_1 , то для него утверждение очевидно, поскольку соответствующий ему идеал A_1 характеристичен, как было показано выше.

Отметим, что для алгебры Ли $N = N(K)$ коразмерность коммутанта $[N, N]$, которая также равна минимальному числу образующих нильпотентной алгебры Ли, равна $p + 1$, где число p равно числу жордановых клеток у линейного оператора ad_X , ограниченного на идеал A .

2. О сжатиях нильпотентных почти абелевых алгебр Ли

Рассмотрим теперь замыкания орбит алгебр Ли из $AAN_n(K)$. Говоря о замыканиях, будем прежде всего исходить из топологии Зарисского. Однако напомним, что нас отдельно интересуют алгебры Ли над полями $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, где можно рассматривать и обычную евклидову топологию. Ниже несколько раз будет упомянута и эта топология.

Говорят, что имеется сжатие алгебры Ли L в алгебру Ли L' (мы используем обозначение $L \Rightarrow L'$), если L' принадлежит замыканию $GL_n(K)$ -орбиты алгебры Ли L . Например, известно, что любая алгебра Ли может быть сжата в абелеву, а любая неабелева алгебра Ли размерности ≥ 3 может быть сжата в алгебру Ли вида $n_3 \oplus K^{n-3}$, где n_3 — трехмерная нильпотентная неабелева алгебра Ли (такая алгебра Ли единственна, она изоморфна алгебре Ли нильпотентных матриц порядка 3). Подробнее о некоторых других интересных сжатиях см., например, [2]–[4], где хотя и рассматривалась в основном евклидова топология, но результаты справедливы и для произвольных полей характеристики 0 (иногда при дополнительном условии алгебраической замкнутости поля).

Кроме понятия сжатия алгебр Ли имеется понятие сжатия матриц. Говорят, что матрица U сжимается в матрицу U' (обозначение $U \Rightarrow U'$), если U' лежит в замыкании орбиты матрицы U при действии группы $GL_n(K)$ сопряжениями матриц. Естественно предполагать, что два понятия сжатия (для наших нильпотентных почти абелевых алгебр Ли и для соответствующих им нильпотентных матриц) между собой связаны. Это действительно верно и доказано ниже. Далее будем рассматривать только сжатия нильпотентных почти абелевых алгебр Ли и сжатия соответствующих им нильпотентных матриц. Для произвольных почти абелевых алгебр Ли и соответствующих им матриц (теперь уже произвольных) можно провести аналогичные приведенным ниже рассмотрения. Но они будут выглядеть заметно более громоздко и потому мы ими заниматься не будем.

Предварительно отметим один важный известный результат — критерий для сжатий нильпотентных матриц.

Предложение 4 (см., например, [6]). *Для двух заданных нильпотентных матриц $U, U' \in gl_m(K)$ существует сжатие $U \Rightarrow U'$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $\dim \text{Ker}(U^l) \leq \dim \text{Ker}(U'^l)$ при всех натуральных $l = 1, 2, \dots, m$.*

Существует немало интересных сжатий для алгебр Ли (они получаются с помощью применения теоремы 2, доказанной ниже, к примерам сжатий нильпотентных матриц, описанных в [6]). Например, имеют место следующие сжатия почти абелевых алгебр Ли размерностей 6 и 8 соответственно (подробнее см. [6], рис. 7):

$$N(4, 2) \Rightarrow N(3, 3),$$

$$N(5, 3) \Rightarrow N(4, 2, 1, 1).$$

Докажем, что изучение сжатий алгебр Ли из $AAN_n(K)$ полностью сводится к изучению сжатий нильпотентных матриц, которые уже давно были подробно исследованы.

Теорема 2. Пусть N, N' — две алгебры Ли из $AAN_n(K)$, для которых выбраны разложения вида $K + {}_\phi K^{n-1}$, задаваемые гомоморфизмами $\phi, \phi' : K \rightarrow gl_{n-1}(K)$ соответственно.

Сжатие $N \Rightarrow N'$ для этих алгебр Ли существует тогда и только тогда, когда существует сжатие $\phi(1) \Rightarrow \phi'(1)$ для соответствующих им нильпотентных матриц.

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы доказывается довольно просто. Но для пояснения сути дела будут даны два доказательства: первое “наивное” или классическое, подходящее для случаев, когда $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, а второе для произвольного поля K .

Предположим, что $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. Здесь сжатие можно рассматривать как предел последовательности. Если имеется сжатие матриц $\phi(1) \Rightarrow \phi'(1)$, то оно получено при некотором предельном переходе для последовательности замен базисов в идеале A . Расширив эти базисы некоторыми фиксированными элементами до базисов пространства алгебр Ли N, N' , в пределе последовательности алгебр Ли из N получим алгебру Ли N' .

Пусть K — произвольное поле. Сжатие (матриц или алгебр Ли) здесь характеризуется тем, что одна орбита лежит в замыкании по Зарисскому другой. Пусть имеем сжатие матриц порядка $n - 1$, $\phi(1) \Rightarrow \phi'(1)$. Это значит, что $GL_{n-1}(K)$ -орбита матрицы $\phi'(1)$ содержится в замыкании орбиты матрицы $\phi(1)$. Рассмотрим соответствующее идеалу $K^{n-1} \triangleleft L$ естественное вложение группы $GL_{n-1}(K)$ в $GL_n(K)$ (именно оно в “наивном” доказательстве было осуществлено расширением базисов). Орбитам группы GL_{n-1} в пространстве матриц соответствуют орбиты группы $GL_n(K)$ в пространстве почти абелевых алгебр Ли. Ясно, что орбита алгебры Ли N' будет содержаться в замыкании орбиты алгебры Ли N , поскольку это верно для соответствующих $GL_{n-1}(K)$ -орбит матриц, т. е. существует нужное нам сжатие $N \Rightarrow N'$.

Докажем обратное утверждение. Пусть имеется сжатие алгебр Ли $N \Rightarrow N'$. Рассмотрим размерности членов нижнего центрального ряда C_i для обеих этих алгебр Ли (C_0 — центр алгебры Ли, C_1/C_0 — центр исходной алгебры Ли, профакторизованной по ее центру и так далее). Прежде всего отметим, что из существования сжатия Ли $N \Rightarrow N'$ вытекают неравенства $\dim C_i(N) \leq \dim C_i(N')$, так как при замыкании орбиты или же предельном переходе указанные размерности, как нетрудно понять, не убывают.

С другой стороны, имеет место

Лемма. Размерности факторов членов (кроме последнего) нижнего центрального ряда нильпотентной алгебры Ли N вида $\langle X \rangle + {}_\phi K^{n-1}$, которая соответствует однозначно ее определяющей нильпотентной матрице $\phi(1) = \bigoplus_i J_{k_i}(0)$, равны числам, образующим диаграмму Юнга, двойственную диаграмме Юнга для вектора K .

Доказательство. Размерность центра такой алгебры Ли N равна, очевидно, числу клеток Жордана в прямом разложении матрицы $\bigoplus_i J_{k_i}(0)$, а это число равно высоте, т. е. размеру по вертикали, диаграммы Юнга. Далее факторизуем алгебру Ли N по центру и рассуждаем по индукции. $\square$

Что касается размерности последнего фактора нижнего центрального ряда, упомянутого в формулировке леммы 1 в качестве исключения, то она равна числу элементов последней

строки двойственной диаграммы плюс 1 (эта добавка соответствует элементу X). Так что и эта размерность однозначно вычисляется по диаграмме Юнга.

Возвращаемся к доказательству нашей теоремы. Рассмотрим векторы $\tilde{K}$ и $\tilde{K}'$, описанные выше как расширения векторов K и K' и получающиеся добавлением одной новой, последней, координаты, равной единице. В силу сказанного выше получаем, что при всех l имеют место неравенства $\dim \text{Ker} \phi(1)^l \leq \dim \text{Ker} \phi(1)'^l$. Но тогда в силу предложения 4 существует нужное нам сжатие матриц $\phi(1) \Rightarrow \phi'(1)$. $\square$

Отметим одно применение векторов вида $\tilde{K}$. Часто при изучении и классификации нильпотентных алгебр Ли используется понятие характеристики. Характеристика алгебры Ли в данном случае — это вектор, составленный из порядков жордановых клеток с упорядоченными по неубыванию координатами, максимальный относительно лексикографического упорядочения среди такого рода векторов, построенных для всех операторов присоединенного представления. Для нильпотентных алгебр Ли вида $N = K +_{\phi} K^{n-1}$ эта характеристика вычисляется следующим образом. Если $X \in N \setminus K^{n-1}$, то для ad_X указанный вектор равен $\tilde{K}$. Если же $X \in K^{n-1}$, то жордановы клетки оператора ad_X либо нулевые первого порядка, либо одна из них имеет порядок 2 в силу строения алгебры Ли N . Поэтому составленный здесь из порядков жордановых клеток для ad_X вектор имеет вид $(2, 1, \dots, 1)$. Теперь ясно, что характеристика алгебры Ли N рассматриваемого нами вида равна в точности $\tilde{K}$ — вектору, вычисленному для произвольного элемента из N , лежащего вне абелева идеала коразмерности 1.

Теорема 2 при изучении сжатий алгебр Ли из пространства $AAN_n(K)$ позволяет применять хорошо изученные методы вычисления сжатий нильпотентных матриц, простейшие из которых описаны в [6]. Два примера такого рода при $n = 8, 9$ были приведены выше.

Ясно, что отношения сжатия алгебр Ли и матриц на соответствующих множествах задают отношения частичного порядка (превращая эти множества в посеты — частично упорядоченные множества).

Для матриц отношение сжатия имеет минимальный элемент — это нулевая матрица. К ней, как известно, может быть сжата любая (в том числе и нильпотентная) матрица. Для нильпотентных матриц имеется и максимальный элемент — матрица, сжатием которой может быть получена любая нильпотентная матрица того же порядка. Это — жорданова клетка максимального порядка. С помощью этих фактов и теоремы 2 можно получить явное описание частичного порядка на $AAN_n(K)$. Здесь минимальным элементом будет, естественно, абелева алгебра Ли, соответствующая нулевой матрице. Отметим, что в абелеву алгебру Ли можно сжать и любую алгебру Ли, а не только нильпотентную.

Рассмотрим теперь максимальный элемент в посете $AAN_n(K)$. Это будет алгебра Ли вида $N_{\max} = K +_{\phi} K^{n-1}$, где $\phi(1) = J_{n-1}(0)$ — жорданова матрица порядка $n - 1$, соответствующая нулевому собственному значению. Из предложения 4 легко следует, что любая нильпотентная матрица порядка $n - 1$ может быть получена сжатием матрицы $J_{n-1}(0)$ (это можно доказать и конструктивно, явно указав соответствующие сжатия, а точнее, последовательности некоторых “элементарных” сжатий). Поэтому получаем, что алгебра Ли $N_{\max}$ действительно максимальна в посете $AAN_n(K)$. Ее GL_n -орбита открыта и плотна (в топологии Зарисского и в евклидовой топологии при $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$) в AAN_n в силу ее единственности и максимальной. Можно более подробно описать и все “дерево” сжатий в $AAN_n(K)$, расположенное между указанными выше максимальным и минимальным элементами. Укажем только алгебры Ли, лежащие на ближайших к экстремальным элементам этажах. Внизу этого дерева (предполагая, что оно расположено вертикально) расположено

сжатие $n_3 \oplus K^{n-3} \Rightarrow K^n$, где n_3 — трехмерная неабелева нильпотентная алгебра Ли (см. выше). Вверху же расположено сжатие алгебры Ли $N_{\max}$ в алгебру Ли, соответствующую нильпотентной матрице $J_{n-2}(0) \oplus J_1(0)$.

В заключение этого раздела отметим, что посет $AA_n(K)$ при $n > 6$ не является линейно упорядоченным (в нем имеются разветвления). Некоторые простые примеры деревьев можно нарисовать, исходя из матричных деревьев сжатий матриц (см., например, [6]).

3. АВТОМОРФИЗМЫ ПОЧТИ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этом разделе статьи изучаются группы автоморфизмов почти абелевых алгебр Ли. Напомним, что эти группы являются стационарными подгруппами орбит в $AA_n(K)$ для соответствующих алгебр Ли. Существует много разных подходов к вычислению групп автоморфизмов алгебр Ли, принадлежащих к различным специальным классам. Самые общие конструкции для вычислений групп автоморфизмов произвольных полупрямых сумм дают очень громоздкие ответы. Наш подход ориентирован однако на специфику алгебр Ли из $AA_n(K)$.

Рассмотрим произвольную алгебру Ли L , имеющую абелев идеал A коразмерности 1. Этот идеал не будет, вообще говоря, характеристическим (даже для нильпотентных алгебр Ли), т. е. при некотором автоморфизме алгебры Ли L он может переходить в другой, отличный от него, идеал. Так будет, например, при $n = 3$ для n_3 — трехмерной нильпотентной алгебры Ли, у которой любое двумерное подпространство, содержащее одномерный центр, будет абелевым идеалом коразмерности 1. Здесь группа автоморфизмов алгебры Ли транзитивна на множестве идеалов коразмерности 1. Неединственность будет иметь место и для сократимых алгебр Ли (например, для абелевых алгебр Ли или же для алгебр Ли вида $n_3 \oplus K^l$). Следующая теорема показывает, в частности, что во всех остальных случаях идеал A для почти абелевых алгебр Ли все же характеристичен. В качестве замечания (с наброском доказательства) этот факт отмечен в [5]. Так как для нас это утверждение очень существенно, то ниже приводится его полное доказательство.

Теорема 3. *Пусть $L = \langle X \rangle + A$ — произвольная алгебра Ли из $AA_n(K)$, где A — абелев идеал коразмерности 1, а I — некоторый абелев идеал коразмерности 1 в L . Тогда $I = A$ или же L — это одномерная абелева алгебра Ли или она изоморфна $n_3(K) \oplus K^{n-3}$. Другими словами, в большинстве случаев абелев идеал A единственен и потому характеристичен в L .*

Доказательство. Пусть I_1, I_2 — два различных абелевых идеала коразмерности 1 в L . Их пересечение $J = I_1 \cap I_2$ будет абелевым идеалом коразмерности 2 в L . Ясно, что существуют такие элементы $X_i \in I_2$, что $I_i = \langle X_i \rangle + J$, $i = 1, 2$, где $\langle X_i \rangle$ — это прямые, натянутые на элементы X_i . При этом очевидно, что X_i не лежит в I_j при $i \neq j$, следовательно, $\langle X_i \rangle + I_j = L$. Пусть $W = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle$ — это двумерное подпространство в L , причем $W + J = L$.

Вычислим теперь коммутант $[L, L]$. Имеем $[L, L] = [W + J, W + J] \subset [W, W] + [W, J] + [J, J]$. Так как J — абелев идеал, то $[J, J] = \{0\}$. Далее ясно, что $[W, W]$ натянуто на элемент $[X_1, X_2]$, который может оказаться и нулевым. Остается рассмотреть $[W, J]$. Докажем, что этот коммутант равен нулю. Подпространство $[W, J]$, очевидно, порождено двумя подпространствами $[X_1, J]$ и $[X_2, J]$. Но J содержится в обоих абелевых идеалах I_1, I_2 , а потому оба подпространства $[X_i, J]$ нулевые. В результате получаем $[L, L] = \langle [X_1, X_2] \rangle$.

Пусть элемент $[X_1, X_2] = 0$, тогда $[L, L] = \{0\}$, т. е. алгебра Ли абелева. Если ее размерность больше единицы, то в ней есть много абелевых идеалов коразмерности 1.

Предположим теперь, что $[X_1, X_2] \neq 0$. Тогда порожденная им прямая содержит, как было показано выше, коммутант $[L, L]$ алгебры Ли L . Рассмотрим почти абелевы алгебры

Ли $L = \langle X \rangle + A$, коммутант которых одномерен. Другими словами, здесь образ линейного оператора ad_X , ограниченного на A , должен быть одномерен. Для несократимой алгебры Ли L это может быть только в двух случаях: 1) A одномерен и указанное ограничение — это умножение на ненулевое число, 2) A двумерен и это ограничение есть нильпотентный оператор (квадрат которого равен нулю). В случае 1) алгебра Ли L будет изоморфна прямой сумме абелевой и разрешимой неабелевой двумерной алгебре Ли r_2 , в случае 2) L должна быть изоморфна прямой сумме абелевой и алгебры Ли $n_3(K)$. Однако очевидно, что алгебра Ли $r_2 \oplus K^{n-2}$ имеет только один абелев идеал коразмерности 1. Поэтому при нашем предположении о существовании в L различных абелевых идеалов коразмерности 1 случай $L = r_2 \oplus K^{n-2}$ невозможен (отметим, что в статье [5] этот случай не исключен). Тем самым получаем, что алгебра Ли L должна быть изоморфна $n_3(K) \oplus K^{n-2}$. Наличие у нее бесконечного множества различных абелевых идеалов коразмерности 1 уже было указано выше. $\square$

Отметим, что если алгебра Ли L в теореме 3 нильпотентна, то относительно подалгебр Ли I коразмерности 1 можно и не предполагать, что I — идеал, поскольку подалгебра Ли коразмерности 1 в нильпотентной алгебре Ли всегда является идеалом в нильпотентной алгебре Ли L .

Переходим к описанию группы автоморфизмов алгебр Ли из $AA_n(K)$.

В последующем изложении важную роль будут играть централизаторы в пространстве $M_m(K)$ всех матриц и в группе всех невырожденных матриц. Централизатор матрицы U в пространстве квадратных матриц порядка m обозначим через $Z_{M_m}(U)$. Нам достаточно будет знать описание централизаторов лишь для прямых сумм жордановых клеток. Оно в виде описания матриц, коммутирующих с данной, приведено, например, в [7]. В частности, известно, что для нильпотентной матрицы вида $\bigoplus_i J_{k_i}(0)$ размерность централизатора в пространстве всех матриц порядка $n - 1$ равна $k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \dots$ (здесь $\sum_i k_i = n - 1$). Есть и другие по форме выражения для этой размерности, например, $n - 1 + 2(k_2 + 2k_3 + \dots)$. Однако обычных централизаторов нам будет недостаточно. Нужно ввести еще понятие проективного централизатора.

Две квадратные матрицы U и V с элементами из поля K будем называть проективно перестановочными (допустим и термин “проективно коммутирующие”), если $UV = \alpha VU$ для некоторого $\alpha \in K$. Отношение проективной перестановочности при таком определении имеет недостаток — оно не симметрично (и, конечно, не ассоциативно). Например, может оказаться, что $VU = 0$, а $UV \neq 0$ (здесь берем $\alpha = 0$). Чтобы исправить этот недостаток, правильнее было бы дать такое определение: матрицы U, V называются проективно перестановочными, если их произведения UV и VU линейно зависимы. Или, что эквивалентно, существуют такие элементы $\alpha, \beta \in K$, не равные нулю одновременно, что $\beta UV = \alpha VU$. Однако далее мы будем рассматривать только случай, когда одна матрица невырождена; здесь случай $\alpha = 0$ при $UV = \alpha VU$ возможен, очевидно, только если вторая матрица нулевая. Поэтому в дальнейшем можно пользоваться и более простым, хотя и несимметричным, определением отношения проективной перестановочности.

Проективным централизатором PZ_{M_m} матрицы U в пространстве всех матриц $M_m(K)$ порядка m называется множество матриц, проективно перестановочных с ней. Ясно, что PZ_{M_m} является полугруппой по умножению. А множество невырожденных матриц в PZ_{M_m} будет подгруппой в $GL_m(K)$, причем, как нетрудно понять, алгебраической.

Термин “проективный централизатор” связан с тем, что если мы рассмотрим проективизацию пространства матриц (рассматриваемого как векторное пространство), то получим в

ней полугруппу (по умножению) своего рода “проективных матриц” (матриц проективных преобразований), образы в которой для проективно перестановочных матриц уже будут перестановочны в обычном смысле этого слова.

Нетрудно проверить, что оба централизатора (при $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$) при пересечения их с группой невырожденных матриц будут подгруппами Ли.

Описание проективных централизаторов можно извлечь из работ начала XX-го в., в которых рассматривалось матричное уравнение $AX = XB$. Подробное решение этого уравнения изложено в [7], где не были цитированы первоисточники — две независимые и ныне труднодоступные статьи Ф.Сесиони 1908 г. и Ф.Фробениуса 1910 г., ссылки на которые можно найти в [8]. Проективный централизатор получается решением такого рода уравнений при $B = \alpha A$ для произвольных значений α . Размерность пространства решений уравнений вида $AB = \alpha BA$ и была указана в упомянутых выше статьях начала XX-го в. При этом нетрудно понять, что размерность проективного централизатора для нильпотентных матриц порядка ≥ 2 просто на 1 больше размерности обычного централизатора, для случая произвольных матриц это уже, вообще говоря, не так (см. ниже). Поэтому приведенных выше формул для размерности централизатора нам вполне достаточно. Для того, чтобы пояснить разницу между централизатором и проективным централизатором, рассмотрим один конкретный пример для нильпотентной матрицы $J_3(0)$. Здесь даже не требуется знание общих результатов, а достаточно просто непосредственно провести вычисления всех перестановочных и всех проективно перестановочных с $J_3(0)$ матриц. Получим

$$Z_{M_3}(J_3(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad PZ_{M_3}(J_3(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} t^2 a & tb & c \\ 0 & ta & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\},$$

где a, b, c, t — произвольные числа из K . Если же нам требуется централизатор в пространстве невырожденных матриц, то, очевидно, нужно просто потребовать, чтобы a, t были ненулевыми. Приведенные примеры позволяют легко понять, как будут выглядеть оба централизатора для произвольной жордановой клетки $J_n(0)$ при всех $n \geq 2$. В частности, мы видим, что оба этих централизатора состоят из верхнетреугольных матриц (правда, весьма специального вида). А вот централизаторы прямых сумм жордановых клеток уже не будут состоять только из треугольных матриц. Для дальнейшего нам будет важно не строение проективного централизатора, а только его главная диагональ, причем в основном для случая проективного централизатора нильпотентной жордановой клетки. Элементы этой диагонали нетрудно вычислить и без обращения к общим результатам. Она, по аналогии с приведенным выше примером при $n = 3$ для жордановой клетки $J_n(0)$, образована элементами $t^{n-1}a, t^{n-2}a, \dots, ta, a$ при произвольных $t, a \in K$.

Однако проективный централизатор может и совпадать с обычным. Например, так будет для централизаторов единичной матрицы и для нулевой матрицы порядка 1 (хотя она и нильпотентна). Поэтому строение проективного централизатора более сложно, чем обычного.

Следующее утверждение можно считать основным в данной статье. Его доказательство основано на двух соображениях: характеристичности абелевого идеала коразмерности 1 (при определенных условиях) и использовании понятия проективного централизатора матрицы.

Теорема 4. Пусть $L = \langle X \rangle +_{\phi} A$ — произвольная несократимая алгебра Ли из $AA_n(K)$, для которой $\dim L \geq 2$ или же L не изоморфна $p_3(K)$. Тогда группа автоморфизмов этой алгебры Ли может быть разложена в полупрямое произведение нормального делителя,

изоморфного абелевой группе R^{n-1} , и подгруппы, изоморфной проективному централизатору матрицы $\phi(1)$ в группе $GL(A)$ всех линейных преобразований идеала A , рассматриваемого как векторное пространство.

Доказательство. Используем запись алгебры Ли L в виде полупрямой суммы $\langle X \rangle +_{\phi} A$. Положим $\phi(1) = J$; здесь 1 — это координата вектора X в порожденном им одномерном подпространстве.

Рассмотрим произвольный элемент $f \in \text{Aut}(L)$. Так как в нашем случае в силу теоремы 3 абелев идеал A коразмерности 1 единственен, то $f(A) = A$, поэтому f индуцирует некоторое линейное преобразование $f|_A$ пространства A .

Рассмотрим элемент $f(X) \in L$, $f(X) = \alpha X + a$ при некоторых $\alpha \in K, a \in A$. Ясно, что элемент a может быть любым (сдвиг вектора X параллельно идеалу A всегда дает автоморфизм). Запишем условие гомоморфности линейного отображения $f : f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ для произвольного элемента $Y \in A$: $f([X, Y]) = f(J(Y))$ и $[f(X), f(Y)] = [\alpha X, f(Y)] = \alpha J(f(Y))$. Получаем $f \circ J = \alpha J \circ f$ на A . Но это означает, что $f|_A$ принадлежит проективному централизатору матрицы J . Проективный централизатор является подгруппой в $GL_{n-1}(\mathbf{R})$, элементы которой сохраняют прямую, натянутую на X . Все преобразования, при которых X переходит в $X + a$, образуют подгруппу, изоморфную группе A или, что то же, абелевой векторной группе R^{n-1} . Любой автоморфизм алгебры Ли L есть композиция действий элемента подгруппы R^{n-1} и элемента указанного выше проективного централизатора. Прямая проверка показывает, что R^{n-1} — нормальная подгруппа в группе всех автоморфизмов и ее пересечение с проективным централизатором тривиально. Это означает, что мы получили искомое разложение группы всех автоморфизмов алгебры Ли L в полупрямое произведение. $\square$

Отметим, что при $n = 3$ нильпотентная алгебра Ли $N = \langle X \rangle +_{\phi} A$ будет либо абелева (и сократима), либо изоморфна алгебре Ли n_3 . Группа автоморфизмов алгебры Ли n_3 не укладывается в схему из теоремы 4; здесь $\text{Aut}(n_3) = GL_2(K) \cdot K^2$.

Отметим также, что, как следует из сказанного выше, группа автоморфизмов максимальной алгебры Ли $N_{\max}$ из $AAN_n(\mathbf{C})$ будет разрешимой группой при $n > 3$.

Из теоремы 4 и известной размерности проективного централизатора нильпотентной матрицы (см. выше) получаем

Следствие. Для алгебр Ли $N = N(K)$ из $AAN_n(K)$ при $n > 3$ минимальная размерность группы автоморфизмов равна $2n$.

Размерности же групп автоморфизмов всех других несократимых алгебр Ли из $AAN_n(K)$ равны $2n + 2(k_2 + \dots)$, в частности, они всегда четны.

Рассмотрим вопрос об описании группы автоморфизмов сократимых (или, что эквивалентно в силу предложения 2, разложимых) алгебр Ли L , т.е. имеющих нетривиальное прямое абелево слагаемое. Для начала отметим, что группа автоморфизмов прямой суммы двух алгебр Ли (даже если одно прямое слагаемое — абелева алгебра Ли) имеет довольно сложное строение. Проиллюстрируем это на очень простом примере. Рассмотрим прямую сумму $K^m \oplus K^n$ двух абелевых алгебр Ли. Ее группа автоморфизмов — это группа $GL_{m+n}(K)$. Элементы этой группы можно записывать в виде блочных матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. При этом квадратные матрицы α, δ порядков m, n соответственно можно рассматривать как матрицы эндоморфизмов (но они — не обязательно автоморфизмы!) наших прямых слагаемых. Что касается матриц β, γ , то это матрицы некоторых линейных отображений прямых слагаемых друг в друга. При этом блочная матрица должна быть невырожденной, тогда как блоки α, δ вполне могут оказаться и вырожденными. Другими словами, группу

автоморфизмов прямой суммы $K^m \oplus K^n$ довольно трудно восстановить, исходя только из знания свойств прямых слагаемых.

Результаты такого рода, причем в более общей ситуации (для произвольных прямых сумм алгебр Ли), были получены для алгебр дифференцирований, которые являются алгебрами Ли, соответствующими группам автоморфизмов [9]. Ниже приведена комбинация результатов лемм 1 и 2 из этой статьи, адаптированная к нашему частному случаю.

Теорема 5 ([9]). Пусть $L = L' \oplus A$ — некоторая алгебра Ли, где L' — несократимая алгебра Ли, а A — абелева алгебра Ли. Элементы алгебры Ли $\text{Der}(L)$ дифференцирований алгебры Ли L запишем символически в блочном виде $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, соответствующем прямому разложению алгебры Ли L . Тогда имеют место следующие утверждения.

1) Линейные операторы α и δ — это эндоморфизмы алгебр Ли L' и A соответственно. При этом множества всех эндоморфизмов видов $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ соответственно образуют поэлементно перестановочные между собой подалгебры Ли D_1 и D_2 в $\text{Der}(L)$, изоморфные $\text{Der}(L')$ и $\text{Der}(A) = \text{gl}(A)$ соответственно.

2) Линейные операторы β и γ — это гомоморфизмы алгебр Ли $L' \rightarrow A$ и $A \rightarrow L'$ соответственно. Множества гомоморфизмов видов β и γ образуют две абелевы подалгебры Ли в $\text{Der}(L)$, которые мы обозначим через P_1 и P_2 соответственно, при этом $P_1 \cap P_2 = \{0\}$.

3) Каждая из подалгебр Ли $D_1, D_2 \subset \text{Der}(L)$ нормализует каждую из подалгебр Ли P_1, P_2 .

4) Гомоморфизмы β факторизуются через естественный эпиморфизм абелианизации $L' \rightarrow L'/[L', L']$. Образы гомоморфизмов γ лежат в центре алгебры Ли L' .

5) Коммутатор $[P_1, P_2]$ подалгебр Ли P_1 и P_2 лежит в подалгебре Ли алгебры Ли $\text{Der}(L')$, состоящей из центральных дифференцирований таких, образ которых лежит в центре алгебры Ли L' .

6) Алгебра Ли $\text{Der}(L)$, рассматриваемая как векторное пространство, разлагается в прямую сумму своих подпространств (на самом деле являющихся подалгебрами Ли) $\text{Der}(L) = D_1 \oplus D_2 \oplus P_1 \oplus P_2$.

Как видно из теоремы 5, строение $\text{Der}(L)$ для разложимых алгебр Ли довольно сложное. Для случая, когда алгебра Ли L почти абелева, возможна небольшая конкретизация: в силу теоремы 4 можно явно указать подалгебру Ли $D_1 = \text{Der}(L')$.

Из теоремы 5 автоматически можно вывести некоторое описание связной компоненты единицы групп автоморфизмов прямых сумм алгебр Ли. Однако чисто теоретико-групповое описание группы автоморфизмов (как всей, так и только связной компоненты единицы) здесь выглядит, вообще говоря, как уже было показано выше на простом примере, довольно запутанно по сравнению с описанием алгебры Ли дифференцирований. В частности, при записи автоморфизмов алгебры Ли $L = L' \oplus A$ в блочно-операторном виде $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ (блоки выделяются разложением нашей алгебры Ли в прямую сумму) в качестве блоков α и δ формально фигурируют не группы автоморфизмов прямых слагаемых, а полугруппы эндоморфизмов этих алгебр Ли L' и A соответственно. Однако, как сообщил автору рецензент, приведя соответствующее доказательство, действительно, α и δ будут невырождены и потому они — автоморфизмы алгебр Ли L' и A соответственно.

Несмотря на указанные выше сложности, для случая сократимых почти абелевых алгебр Ли удастся дать достаточно ясное описание всей группы автоморфизмов. Подробное изучение одного метода вычисления групп автоморфизмов было дано в [10]. Там используется разложение алгебры Ли в прямую сумму неразложимых. В нашем случае ответ из этой статьи резко упрощается, так как в силу предложения 2 любая почти несократимая абелева алгебра Ли неразложима. Основным результатом указанной статьи в нашем частном

случае, когда есть только одно “главное” неразложимое прямое слагаемое L' , а остальные неразложимые прямые слагаемые — одномерные алгебры Ли, принимает следующий вид.

Предложение 5. Пусть $L = L' \oplus A$ — некоторая почти абелева (и, вообще говоря, сократимая) алгебра Ли. Тогда любой автоморфизм f этой алгебры Ли L может быть записан в виде суммы $f = (\theta \cdot \delta) + c$, где θ — некоторый автоморфизм несократимой алгебры Ли L' , $c : L \rightarrow L$ — такое линейное отображение, что $\text{Im}(c) \subset Z(L)$, где $Z(L)$ — центр алгебры Ли L , и $\text{Ker}(c) \supset [L, L]$, а $\delta \in GL(A)$ — некоторое невырожденное линейное отображения абелева идеала A , рассматриваемого как векторное пространство. При этом θ и δ , очевидно, перестановочны.

Обратно, если отображения θ и c удовлетворяют указанным выше условиям и $(\theta \cdot \delta) + c$ — невырожденное линейное отображение, то $(\theta \cdot \delta) + c$ — автоморфизм алгебры Ли L при произвольном невырожденном линейном отображении $\delta \in GL(A)$.

Как сообщил автору рецензент, утверждение, выведенное из [10], можно усилить: условие невырожденности f автоматически следует из ограничений, наложенных на α, δ, c .

4. О СЖАТИЯХ НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ

Здесь рассматривается связь почти абелевых нильпотентных алгебр Ли с изучением неприводимых компонент пространства $L_n(K)$ всех алгебр Ли размерности n . Как было доказано в [3], пересечение всех таких неприводимых компонент (каркас пространства $L_n(K)$) содержится в $AAN_n(K)$. Причем при $n \leq 5$ указанное пересечение совпадает с $AAN_n(K)$ (это доказано в [4] для поля $K = \mathbf{C}$).

Изучение неприводимых компонент пространства $L_n(K)$ в [2]–[4] тесно связано с рассмотрением замыканий орбит некоторых разрешимых алгебр Ли. В этом разделе мы укажем дальнейшие шаги в этом направлении.

Рассмотрим разрешимые алгебры Ли вида $R = r_2 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_2$. Эти алгебры Ли жесткие, что вытекает из того, что $H^2(R, R) = \{0\}$ (это — давно известное достаточное условие жесткости алгебры Ли). Замыкания их орбит в пространстве алгебр Ли соответствующей размерности являются неприводимыми компонентами этого пространства $L_n(K)$. Представляет интерес вопрос: какие алгебры Ли из $AAN_n(K)$ лежат в замыкании этой орбиты? Полный ответ автору пока не известен (как и для случая алгебр Ли R' , введенных ниже). Отметим, что алгебры Ли вида $r_2 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_2$ борелевские в расщепимых полупростых алгебрах Ли $sl_2(\mathbf{R}) \oplus sl_2(\mathbf{R}) \oplus \cdots \oplus sl_2(\mathbf{R})$.

Алгебры Ли типа R , указанные выше, четномерны. В качестве их нечетномерного аналога размерности ≥ 5 (случай размерности 3 очень прост и будет рассмотрен отдельно) положим $R' = r_5 \oplus r_2 \oplus r_2 \oplus \cdots \oplus r_2$, где r_5 — борелевская подалгебра (пятимерная) в $sl_3(\mathbf{R})$, которая состоит из треугольных матриц с нулевым следом. Здесь тоже когомологии $H^2(R', R')$ тривиальны. Это утверждение верно и для любой борелевской подалгебры Ли в расщепимой полупростой алгебре Ли (см., например, [11], где рассматриваются алгебры Ли над $\mathbf{C}$, но все рассуждения справедливы и для произвольных расщепимых полупростых алгебр Ли). Поэтому и алгебры Ли R' тоже жесткие. Было бы лучше, если бы в R' использовалась не пятимерная (r_5), а какая-либо трехмерная жесткая алгебра Ли. Но, к сожалению, трехмерных разрешимых жестких алгебр Ли, как нетрудно проверить, не существует.

Теорема 6. Пусть алгебра Ли $N = \langle X \rangle +_{\phi} A \in AAN_n(K)$ получается сжатием алгебры Ли типа R или R' (в зависимости от четности $n = \dim N$). Тогда для числа p жордановых клеток в разложении нильпотентной матрицы $\phi(1)$, задающей алгебру Ли N , имеем

$$p \geq \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil;$$

здесь $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ — наименьшее натуральное число, большее чем $\frac{n}{2}$.

Доказательство. Вначале предположим, что размерность $n = \dim(N)$ четна, $n = 2m$. Здесь будем рассматривать сжатия алгебры Ли типа R . Имеем $\dim[R, R] = m$. Пусть имеется сжатие $R \Rightarrow N$ и $N \in AAN_n(K)$. Тогда, как известно, $\dim[N, N] \leq m$ (так как при сжатии размерность коммутанта не возрастает). Но $\dim[N, N]$ равна размерности образа нильпотентного линейного оператора $\phi(1)$, которая, в свою очередь, равна $\sum_{i=1}^{i=p} (k_i - 1)$ (см., например, [7]). Имеем $\sum k_i = n - 1$, и поэтому $\sum_{i=1}^{i=p} (k_i - 1) = 2m - 1 - p$. Получаем неравенство $2m - 1 - p \leq m$, откуда $p \geq m - 1 = \frac{n}{2} - 1$.

Если $n = \dim(N)$ нечетно, $n = 2m + 1$, то рассуждения аналогичны.

Начнем со случая $n = 3$. Здесь доказываемое неравенство выполняется тривиально.

Пусть $n = 2m + 1 \geq 5$. Рассуждаем аналогично четномерному случаю и используем алгебру Ли типа R' . Здесь получаем $\dim[N, N] \leq m + 1$ и неравенство $p \geq m - 1$, но $m = \frac{n-1}{2}$, и поэтому вытекает оценка $p \geq \lceil \frac{n-3}{2} \rceil$.

Для того, чтобы для обоих случаев получить общую формулу, несколько ухудшим первую оценку и в результате получим общую оценку $p \geq \lceil \frac{n-3}{2} \rceil$. $\square$

Так как замыкание орбиты разрешимой алгебры Ли из теоремы 6 — одна из неприводимых компонент пространства $L_n(K)$, то оценка из теоремы 6 справедлива и для всех алгебр Ли L из каркаса пространства $L_n(K)$. Некоторые другие оценки для параметров алгебр Ли L можно найти в [3], [4].

Отметим, что число p жордановых клеток, фигурирующее в теореме 6, равно числу строк диаграммы Юнга, построенной для соответствующего алгебре Ли вектора $\mathcal{K}$.

При $n \leq 5$ утверждение теоремы 6 тривиально, так как полученная там оценка дает не более чем $p \geq 1$. Только при $n \geq 6$ получаем оценку $p \geq 2$ и более сильные.

При $n \leq 5$ на самом деле $AAN_n(K)$ дает все пересечение неприводимых компонент [4].

Теперь мы видим, что при всех $n \geq 6$ для $L_n(K)$ пересечения неприводимых компонент содержат только такие алгебры Ли из $AAN_n(K)$, в которых вектор $\mathcal{K}$ имеет не менее двух координат. В частности, алгебры Ли $N_{\max} \in AAN_n(K)$ при $n \geq 5$ не принадлежат каркасу пространства $L_n(K)$. Отметим, что если некоторая алгебра Ли из $AAN_n(K)$ принадлежит каркасу, то все алгебры Ли, “меньшие” ее (т. е. расположенные ниже ее в дереве, вертикально изображающем посет $AAN_n(K)$), тоже лежат в каркасе. Для полного описания каркаса было бы достаточно описать только “локальные максимумы” указанного посета, но пока это сделать не удается.

Автор благодарен рецензенту за указание некоторых неточностей в первоначальном тексте статьи, а также за предложения по совершенствованию утверждений статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Burde D., Ceballos M. *Abelian Ideals of Maximal Dimension for Solvable Lie Algebras*, J. Lie Theory **22**, 741–756 (2012).
- [2] Горбацевич В.В. *О некоторых свойствах пространства n -мерных алгебр Ли*, Матем. сб., **200**, 31–60 (2009).
- [3] Горбацевич В.В. *О пересечении неприводимых компонент пространства конечномерных алгебр Ли*, Матем. сб., **203**, 436–450 (2012).
- [4] Горбацевич В.В. *О каркасах пространств конечномерных алгебр Ли размерностей не более 6*, Матем. сб. **205**, 23–36 (2014).
- [5] Andrada A., Origlia M. *Lattices in almost abelian Lie groups with locally conformal Kahler or symplectic structures*, Manuscripta math. **155**, 389–417 (2018).

- [6] Крафт Х. *Геометрические методы в теории инвариантов* (Мир, М., 1987).
- [7] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (Наука, М., 1966).
- [8] Mac Duffee C.C. *The theory of matrices* (Chelsea Publ., New-York, 1946).
- [9] Togo S. *On the derivation algebras of Lie algebras*, Canad. J., Math. **13**, 201–216 (1961).
- [10] Fisher D., Gray R., Hydon P. *Automorphisms of real Lie algebras of dimension five or less* J. Phys. A: Math. Theor. **46**. 225204 (2013).
- [11] Толпыго А.К. *О когомологиях параболических алгебр Ли*, Матем. заметки, **12**, 251–255 (1972).

Владимир Витальевич Горбачевич

Москва, Россия,

e-mail: vgorvich@yandex.ru

V.V. Gorbatsevich

Some properties of almost abelian Lie algebras

Abstract. Finite-dimensional Lie algebras, having an abelian ideal of codimension 1, are studied. Some of their properties are proved, including those related to the structure of the space of all Lie algebras. The automorphism groups of such Lie algebras are also calculated.

Keywords: almost abelian Lie algebra, nilpotent Lie algebra, contraction, Jordan matrix.

Vladimir Vital'evich Gorbatsevich

Moscow, Russia,

e-mail: vgorvich@yandex.ru