Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ч. Кулаев, А. Б. Шабат, Система Дарбу и разделение переменных в задаче Гурса для уравнения третьего порядка в $\mathbb{R}^3$, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 43–53

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-43-53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:32:04

Р. Ч. КУЛАЕВ, А. Б. ШАБАТ

СИСТЕМА ДАРБУ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В $\mathbb{R}^3$

Аннотация. В работе строится редукция трехмерной системы Дарбу для символов Кристоффеля, описывающей сопряженные криволинейные системы координат. Редукция определяется одним дополнительным алгебраическим условием на символы Кристоффеля. Показывается, что соответствующий класс решений системы Дарбу параметризуется шестью функциями одной переменной (по две на каждую из трех независимых переменных). Даются явные формулы решений системы Дарбу. Для случая, когда символы Кристоффеля являются константами, изучается ассоциированная с системой Дарбу линейная система. В такой постановке эта система сводится к трехмерной задаче Гурса для уравнения третьего порядка с данными на координатных плоскостях. Показывается, что решение задачи Гурса допускает разделение переменных и определяется своими значениями на координатных прямых.

Ключевые слова: трехмерная система Дарбу, интегрируемая система, задача Гурса с тремя переменными, система гидродинамического типа, гамильтонова система.

УДК: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-43-53

В данной статье изучается система шести дифференциальных уравнений (*система Дарбу*)

$$(\partial_j + \Gamma_{kj}) \Gamma_{ki} = \Gamma_{ki} \Gamma_{ij} + \Gamma_{kj} \Gamma_{ji}, \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3, \quad (1)$$

относительно функций Γ_{ij} трех переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$. Здесь и далее мы придерживаемся обозначений $\partial_1 = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$. Нас интересуют вопросы, связанные с интегрируемостью системы (1) и, в частности, вопрос построения ее явных решений.

Современный интерес к системе (1) вызван ее тесной связью с дифференциальной геометрией, которая возникает при описании сопряженных криволинейных систем координат. В терминологии дифференциальной геометрии неизвестные функции Γ_{ij} суть символы Кристоффеля $\Gamma_{ij} \equiv \Gamma_{ij}^i$, $i \neq j$, связности Леви–Чивита (см., например, [1]). На сегодняшний день существует несколько подходов к проблеме построения сопряженных и ортогональных систем координат. В работах [2]–[5] развивался подход, основанный на методе обратной задачи в теории интегрируемых уравнений. В работах Б.А. Дубровина, С.П. Новикова [6], В.Е. Захарова [3], С.П. Царева [1] и И.М. Кричевера [7] был предложен подход к построению таких координат, основанный на методах теории систем гидродинамического типа. В

Поступила в редакцию 17.04.2019, после доработки 17.07.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

частности, было установлено, что произвольной ортогональной системе координат соответствует семейство диагональных гамильтоновых систем гидродинамического типа, которые определяются из уравнений ассоциированной с (1) системы

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \frac{u_y}{v-u}, & \Gamma_{23} &= \frac{v_z}{w-v}, & \Gamma_{31} &= \frac{w_x}{u-w}, \\ \Gamma_{13} &= \frac{u_z}{w-u}, & \Gamma_{21} &= \frac{v_x}{u-v}, & \Gamma_{32} &= \frac{w_y}{v-w} \end{aligned} \quad (2)$$

относительно функций u, v, w переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$.

Решение систем (1), (2), к сожалению, пока не удастся без введения дополнительных условий. В работах [8]–[10] рассматривался вариант системы (2), соответствующий слабо нелинейным системам гидродинамического типа. Он характеризуется тем, что функция u не зависит от переменной x , функция v не зависит от y , а w – от z . Такая особенность дает возможность получить явные формулы решений системы (2):

$$u = \frac{g_2(y) - g_3(z)}{f_2(y) - f_3(z)}, \quad v = \frac{g_3(z) - g_1(x)}{f_3(z) - f_1(x)}, \quad w = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}, \quad (3)$$

где f_i, g_i – произвольные функции своих аргументов. В работе [11] был введен класс решений системы Дарбу, удовлетворяющий условию редукции

$$\partial_j \Gamma_{jk} = \partial_k \Gamma_{kj} = \Gamma_{jk} \Gamma_{kj}, \quad i \neq j \neq k. \quad (4)$$

Такая редукция обеспечила (локальную) разрешимость системы (1) на символы Кристоффеля в терминах их значений на осях координат, а также позволила получить явные формулы для решений ассоциированной системы (2). В частности, было показано, что решения системы (2) параметризуются девятью функциями одной переменной (по три на каждую из переменных x, y, z), а редукция к слабо нелинейной системе (формулы (2)) является частным случаем рассматриваемого подхода.

В данной работе дается еще один подход к нахождению явных решений систем уравнений (1), (2). В разделе 2 строится редукция трехмерной системы Дарбу (1), обусловленная одним дополнительным алгебраическим условием на функции Γ_{ij} . Соответствующий класс решений характеризуется тем, что функция Γ_{ij} не зависит от k -й переменной, где индексы i, j, k попарно различны. Показывается, что выделенный класс решений параметризуется шестью функциями одной переменной (по две на каждую из трех переменных). Здесь также прослеживается некоторая идейная связь с формулами (3). Однако сразу отметим, что построенный в данной статье класс решений системы Дарбу отличается от класса решений, соответствующих редукции (4), и ему отвечают ассоциированные системы (2), которые, вообще говоря, не связаны со свойством слабой нелинейности.

В разделе 3 обсуждаются вопросы интегрируемости переопределенных линейных систем. Одним из таких вопросов является обобщение теории преобразований Дарбу–Лапласа для уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными [12] на случай трехмерных линейных гиперболических уравнений третьего порядка. В статье [13] были построены примеры таких преобразований и рассмотрены их приложения к задаче о сопряженных криволинейных системах координат в $\mathbb{R}^3$. В данной работе для случая, когда функции Γ_{ij} являются константами, изучается ассоциированная с системой Дарбу (1) задача (2). В такой постановке система (2) сводится к трехмерной задаче Гурса для уравнения третьего порядка, решение которой допускает разделение переменных и определяется своими значениями на координатных прямых. В этой связи стоит упомянуть, что трехмерные гиперболические уравнения третьего порядка активно изучаются представителями казанской школы (см. [14]–[16] и библиографию там же), которыми на основе модификации метода

Римана изучаются вопросы разрешимости различных трехмерных задач третьего порядка и смежные вопросы.

1. Ассоциированная задача. Хорошо известно (см., например, [1],[3], [6]), что система Дарбу (1) возникает при определении условий совместности системы первого порядка (2). Подстановка равенств (2) в систему уравнений Дарбу (1) сводит уравнения с квадратичной нелинейностью к линейным уравнениям второго порядка на функции u , v , w .

Лемма 1. Пусть выполнены уравнения (2). Тогда функции Γ_{ij} удовлетворяют системе уравнений (1), а функции u , v , w – системе уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} w_{xy} + (\Gamma_{32} - \Gamma_{32}\Gamma_{21}/\Gamma_{31})w_x + (\Gamma_{31} - \Gamma_{31}\Gamma_{12}/\Gamma_{32})w_y &= 0, \\ u_{yz} + (\Gamma_{13} - \Gamma_{13}\Gamma_{32}/\Gamma_{12})u_y + (\Gamma_{12} - \Gamma_{12}\Gamma_{23}/\Gamma_{13})u_z &= 0, \\ v_{zx} + (\Gamma_{21} - \Gamma_{21}\Gamma_{13}/\Gamma_{23})v_z + (\Gamma_{23} - \Gamma_{23}\Gamma_{31}/\Gamma_{21})v_x &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим пару уравнений системы (2)

$$w_y + \Gamma_{32}w = \Gamma_{32}v, \quad w_x + \Gamma_{31}w = \Gamma_{31}u.$$

Дифференцируя первое уравнение системы по x , а второе – по y , получим

$$\begin{aligned} w_{xy} + \Gamma_{32,x}w + \Gamma_{32}w_x - \Gamma_{32,x}v - \Gamma_{32}v_x &= 0, \\ w_{xy} + \Gamma_{31,y}w + \Gamma_{31}w_y - \Gamma_{31,y}u - \Gamma_{31}u_y &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

К первым производным функции w слева привлекаем уравнения данной системы, а для производных функций u , v справа привлекаем уравнения из других пар:

$$\begin{aligned} \Gamma_{32}w_x &= \Gamma_{32}\Gamma_{31}(u - w), \quad \Gamma_{31}w_y = \Gamma_{31}\Gamma_{32}(v - w), \\ \Gamma_{32}v_x &= \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u - v), \quad \Gamma_{31}u_y = \Gamma_{31}\Gamma_{12}(v - u). \end{aligned}$$

Тогда, вычитая первое уравнение в (6) из второго, получим пару уравнений на функции Γ_{ij}

$$\Gamma_{32,x} = \Gamma_{31,y}, \quad \Gamma_{32,x} = \Gamma_{32}\Gamma_{21} + \Gamma_{31}\Gamma_{12} - \Gamma_{32}\Gamma_{31},$$

с помощью которых, в свою очередь, получаются уравнения на функции u , v , w . Действительно, взяв первое равенство в (6), имеем

$$\begin{aligned} w_{xy} + \Gamma_{32}w_x - \Gamma_{32,x}(v - w) - \Gamma_{32}v_x &= w_{xy} + \Gamma_{32}w_x - \Gamma_{32,x}(v - w) - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u - v) = \\ &= w_{xy} + \Gamma_{32}w_x - \frac{\Gamma_{32,x}}{\Gamma_{32}}w_y - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u - w) + \Gamma_{32}\Gamma_{21}(v - w) = \\ &= w_{xy} + \left(\Gamma_{32} - \frac{\Gamma_{32}\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}}\right)w_x + \left(\Gamma_{31} - \frac{\Gamma_{31}\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}}\right)w_y. \end{aligned}$$

Оставшиеся уравнения можно получить аналогично. $\square$

Лемма 2. Пусть выполнены уравнения (2). Тогда функция u удовлетворяет системе двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} u_{xy} + \Gamma_{12}u_x + \left(\Gamma_{21} - \frac{\Gamma_{12,x}}{\Gamma_{12}}\right)u_y &= 0, \\ u_{xz} + \Gamma_{13}u_x + \left(\Gamma_{31} - \frac{\Gamma_{13,x}}{\Gamma_{13}}\right)u_z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство предыдущей леммы. Для вывода первого уравнения нужно рассмотреть пару уравнений системы (2) с функциями Γ_{12} и Γ_{21} , а для второго – пару с Γ_{13} и Γ_{31} .

Замечание 1. Путем циклических перестановок

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \quad (8)$$

из (7) можно получить еще две системы такого же вида для функций v и w . Следовательно, каждая из функций u, v, w удовлетворяет системе трех гиперболических уравнений второго порядка.

Замечание 2. Уравнения Дарбу (1) допускают калибровочные преобразования

$$x \rightarrow X(x), \quad y \rightarrow Y(y), \quad z \rightarrow Z(z),$$

которые переводят решение Γ_{ij} системы (1) в следующий набор функций:

$$\frac{\Gamma_{21}}{X'(x)}, \quad \frac{\Gamma_{31}}{X'(x)}, \quad \frac{\Gamma_{12}}{Y'(y)}, \quad \frac{\Gamma_{32}}{Y'(y)}, \quad \frac{\Gamma_{13}}{Z'(z)}, \quad \frac{\Gamma_{23}}{Z'(z)}.$$

В частности, постоянное решение переходит в систему функций одной переменной.

2. Редукция системы Дарбу. В данном пункте рассматривается редукция системы Дарбу, определяемая следующим свойством: *при $i \neq j \neq k \neq i$ функция Γ_{ij} не зависит от k -й переменной*. Очевидно, что в рассматриваемом классе функций Γ_{ij} содержатся все постоянные решения системы (1). Легко проверить, что в данном случае система Дарбу (1) сводится к системе трех алгебраических уравнений

$$\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}} + \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{12}} + \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_{23}} + \frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{21}} = 1. \quad (9)$$

В наших дальнейших рассмотрениях ключевую роль будет играть определитель $\det \mathbf{\Gamma} = \Gamma_{12}\Gamma_{23}\Gamma_{31} + \Gamma_{13}\Gamma_{32}\Gamma_{21}$ матрицы

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & 0 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Поэтому прежде чем переходить к решению системы Дарбу, сначала установим взаимосвязь системы (9) с определителем матрицы $\mathbf{\Gamma}$.

Лемма 3. *Общее решение алгебраических уравнений (9) зависит от четырех свободных параметров. При этом всякое решение системы (9) удовлетворяет условию*

$$\det \mathbf{\Gamma} = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть Γ_{12}, Γ_{21} и Γ_{13}, Γ_{31} выбраны в качестве свободных параметров. Из первого и третьего уравнений системы (9) следуют равенства

$$\Gamma_{23} = \frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{21} - \Gamma_{31}}, \quad \Gamma_{32} = \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{31} - \Gamma_{21}}. \quad (12)$$

Подставляя во второе уравнение системы (9) правые части уравнений (12) вместо Γ_{23}, Γ_{32} , получим тождество. Следовательно, уравнения (12) эквивалентны (9).

Для доказательства второй части утверждения леммы заметим, что согласно (12)

$$\frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{23}} = -\frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{32}}.$$

Условие (11) очевидно в силу (10). □

Замечание 3. “Калибровочные” преобразования $x \rightarrow X(x), y \rightarrow Y(y), z \rightarrow Z(z)$ не только сохраняют вид уравнений (9), но и не меняют значение определителя матрицы $\mathbf{\Gamma}$.

Пример 1. Легко проверить, что если $\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{21} = 1$, $\Gamma_{31} = 2$, $\Gamma_{23} = s$ и $\Gamma_{32} = -2s$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ является вырожденной при любом $s \in \mathbb{R}$. При этом подстановка данных значений в левые части первого и третьего уравнений в (9) дает

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{-2s} = \frac{s-1}{2s}, \quad \frac{1}{s} + \frac{2}{1} = \frac{2s+1}{s}.$$

Заметим, что уравнения (9) выполнены только при $s = -1$.

Далее мы покажем, что решения системы трех алгебраических уравнений (9) параметризуются шестью функциями одной переменной (по две на каждую из переменных x, y, z).

Поскольку при $k \neq i \neq j \neq k$ функция Γ_{ij} не зависит от k -й переменной, то из леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{21}\Gamma_{32}}{\Gamma_{12}\Gamma_{23}} = -\frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{13}} &\Rightarrow \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12}} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{23}} = \frac{Y'(y)}{Z'(z)}, \\ \frac{\Gamma_{21}\Gamma_{13}}{\Gamma_{12}\Gamma_{31}} = -\frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{32}} &\Rightarrow \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12}} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_{31}} = -\frac{Z'(z)}{X'(x)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где X, Y, Z — некоторые функции одной переменной.

Задействуем первое уравнение из (9). Ввиду (5) имеем

$$\frac{X'\Gamma_{12}}{Y'\Gamma_{31}} + \frac{Z'\Gamma_{12}}{Y'\Gamma_{23}} = 1 \Rightarrow \frac{\Gamma_{12}}{Y'} \left(\frac{X'}{\Gamma_{31}} + \frac{Z'}{\Gamma_{23}} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\Gamma_{12}}{Y'} \left(-\frac{Z'}{\Gamma_{13}} + \frac{Y'}{\Gamma_{32}} \right) = 1,$$

а следовательно,

$$\frac{X'}{\Gamma_{31}} + \frac{Z'}{\Gamma_{23}} = \frac{Y'}{\Gamma_{12}}, \quad \frac{Z'}{\Gamma_{13}} + \frac{Y'}{\Gamma_{12}} = \frac{Y'}{\Gamma_{32}}. \quad (14)$$

Привлекая другие уравнения системы (9), получим

$$\frac{X'}{\Gamma_{21}} + \frac{Z'}{\Gamma_{13}} = \frac{Z'}{\Gamma_{23}}, \quad \frac{X'}{\Gamma_{31}} + \frac{Y'}{\Gamma_{32}} = \frac{X'}{\Gamma_{21}}. \quad (15)$$

Поскольку каждая дробь в (14), (15) зависит только от двух переменных, то

$$\begin{aligned} \frac{X'}{\Gamma_{31}} &= f_3 - f_1, & \frac{Z'}{\Gamma_{23}} &= f_2 - f_3, & \frac{Y'}{\Gamma_{12}} &= f_2 - f_1, \\ \frac{Z'}{\Gamma_{13}} &= f_1 - f_3, & \frac{Y'}{\Gamma_{32}} &= f_2 - f_3, & \frac{X'}{\Gamma_{21}} &= f_2 - f_1, \end{aligned}$$

где f_i — произвольные функции, каждая из которых зависит только от i -й переменной из упорядоченного набора $\{x, y, z\}$. Отсюда окончательно получаем решение системы Дарбу (1), которое, учитывая произвольность f_i и замечание 1, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{31} &= \frac{X'}{f_3(Z) - f_1(X)}, & \Gamma_{23} &= \frac{Z'}{f_2(Y) - f_3(Z)}, & \Gamma_{12} &= \frac{Y'}{f_2(Y) - f_1(X)}, \\ \Gamma_{13} &= \frac{Z'}{f_1(X) - f_3(Z)}, & \Gamma_{32} &= \frac{Y'}{f_2(Y) - f_3(Z)}, & \Gamma_{21} &= \frac{X'}{f_2(Y) - f_1(X)}. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу леммы 3 условие (11) является следствием алгебраической системы (9), а пример 1 показывает, что условие (11) и система (9) не одно и то же. Далее покажем, что если дополнить (1) условием (11), то решения Γ_{ij} полученной системы будут независимы от k -й переменной, т. е. соотношения (1), (11) сводятся к алгебраической системе (9).

Лемма 4. Для решений системы Дарбу (1) выполнение равенства (11) эквивалентно условиям

$$\partial_x(\Gamma_{32}\Gamma_{23}) = \partial_y(\Gamma_{13}\Gamma_{31}) = \partial_z(\Gamma_{12}\Gamma_{21}) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Из уравнений (1) получаем

$$\begin{aligned} \partial_x(\Gamma_{32}\Gamma_{23}) &= \Gamma_{32}\partial_x\Gamma_{23} + \Gamma_{23}\partial_x\Gamma_{32} = \Gamma_{32}(\Gamma_{23}\Gamma_{31} + \Gamma_{21}\Gamma_{13} - \Gamma_{23}\Gamma_{21}) + \\ &+ \Gamma_{23}(\Gamma_{32}\Gamma_{21} + \Gamma_{31}\Gamma_{12} - \Gamma_{32}\Gamma_{31}) = \Gamma_{32}\Gamma_{21}\Gamma_{13} + \Gamma_{23}\Gamma_{31}\Gamma_{12}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\partial_x(\Gamma_{32}\Gamma_{23}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{32}\Gamma_{21}\Gamma_{13} + \Gamma_{23}\Gamma_{31}\Gamma_{12} = 0.$$

Остальная часть утверждения леммы может быть получена путем циклических перестановок индексов $\{1, 2, 3\}$ и переменных $\{x, y, z\}$. $\square$

Пусть Γ_{ij} – решения системы Дарбу, удовлетворяющие (11). Тогда из леммы 4 следует, что произведение $\Gamma_{12}\Gamma_{21}$ не зависит от z , а значит, существуют функции $a_{12}(x, y)$, $a_{21}(x, y)$ и $c(z)$ такие, что

$$\Gamma_{12} = a_{12}c, \quad \Gamma_{21} = \frac{a_{21}}{c}. \quad (18)$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{13} &= a_{13}b, \quad \Gamma_{31} = \frac{a_{31}}{b}, \\ \Gamma_{23} &= a_{23}a, \quad \Gamma_{32} = \frac{a_{32}}{a}, \end{aligned} \quad (19)$$

где функции a_{ij} зависят только от i -й и j -й переменных, а функции a и b зависят только от x и y соответственно. Здесь возможны два варианта: либо $a'(x)b'(y)c'(z) = 0$, либо $a'(x)b'(y)c'(z) \neq 0$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

Пусть сначала $a'(x)b'(y)c'(z) = 0$. Поскольку функции Γ_{ij} удовлетворяют условиям полугамильтоновости $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ik,j}$ для любой тройки $i \neq j \neq k \neq i$ (см. (1)), то

$$a_{12}c' = a_{13}b'. \quad (20)$$

Отсюда $c(z) = c$, $b(y) = b$, где c и b – константы, не равные нулю. Тогда из равенства $\Gamma_{31,y} = \Gamma_{32,x}$ имеем, что и функция $a(x)$ не зависит от x . Следовательно, функция Γ_{ij} не зависит от k -й переменной при $k \neq i \neq j \neq k$, а значит, Γ_{ij} удовлетворяют системе (9).

Пусть $a'(x)b'(y)c'(z) \neq 0$. Тогда из (20) вытекает

$$\frac{a_{12}}{b'} = \frac{a_{13}}{c'}.$$

Левая часть не зависит от z , а правая часть не зависит от y . Следовательно,

$$a_{12} = a_1(x)b', \quad a_{13} = a_1(x)c',$$

а значит, допускаются представления

$$\Gamma_{12} = a_1(x)b'(y)c(z), \quad \Gamma_{13} = a_1(x)b(y)c'(z).$$

С помощью аналогичных рассуждений получаются равенства для оставшихся четырех функций Γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{23} &= b_1(y)a(x)c'_2(z), \quad \Gamma_{21} = b_1(y)a'(x)c_2(z), \\ \Gamma_{31} &= c_1(z)a'_2(x)b_2(y), \quad \Gamma_{32} = c_1(z)a_2(x)b'_2(y). \end{aligned}$$

Сопоставление полученных выражений для Γ_{ij} с формулами (18), (19) приводит к заключению, что решение системы Дарбу (1) параметризуется шестью функциями одной переменной и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_{12} &= \frac{\tilde{X}(x)Y'(y)Z(z)}{Y^2(y)}, \quad \Gamma_{23} = \frac{\tilde{Y}(y)X(x)Z'(z)}{Z^2(z)}, \quad \Gamma_{31} = \frac{\tilde{Z}(z)X'(x)Y(y)}{X^2(x)}, \\ \Gamma_{13} &= -\frac{\tilde{X}(x)Z'(z)}{Y(y)}, \quad \Gamma_{21} = -\frac{\tilde{Y}(y)X'(x)}{Z(z)}, \quad \Gamma_{32} = -\frac{\tilde{Z}(z)Y'(y)}{X(x)},\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$X'(x)Y'(y)Z'(z) \neq 0.\tag{22}$$

При этом ввиду уравнений Дарбу (1) все шесть функций одной переменной, задающие параметризацию, связаны между собой одним функциональным уравнением

$$\frac{X\tilde{Y}}{Z} + \frac{Y\tilde{Z}}{X} + \frac{Z\tilde{X}}{Y} = 1,\tag{23}$$

инвариантным относительно циклических перестановок символов $\{X, Y, Z\}$.

Покажем, что система соотношений (22), (23) несовместна. Для этого перепишем уравнение (23) в виде

$$X^2Y\tilde{Y} + Y^2Z\tilde{Z} + Z^2X\tilde{X} = XYZ$$

и продифференцируем обе части по переменной x :

$$2XX'Y\tilde{Y} + Z^2(X\tilde{X})' = X'YZ.$$

Далее, дифференцируя полученное равенство по переменной z , имеем

$$2ZZ'(X\tilde{X})' = X'YZ' \Rightarrow Z'(2Z(X\tilde{X})' - X'Y) = 0.$$

Отсюда следует $Z(z) = \text{const}$, что противоречит (22).

Резюмирует результаты данного пункта

Теорема 1. Пусть выполнено условие (11). Тогда решения системы Дарбу (1) параметризуются шестью функциями одной переменной (по две на каждую из переменных x, y, z) и представляются формулами (16).

Пример 2. Легко проверить, что система функций

$$\Gamma_{31} = \frac{1}{e^x + e^{-z}} = -\Gamma_{13}, \quad \Gamma_{23} = \frac{1}{2e^y - e^{-z}} = \Gamma_{32}, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{e^x + 2e^y} = \Gamma_{21}$$

является решением системы Дарбу (1), для которого выполнено условие (11) и не выполнено (4).

3. Характеристическая задача для уравнения третьего порядка. Всюду в данном пункте мы рассматриваем случай, когда решения системы Дарбу являются постоянными. Как будет показано ниже, такая редукция приводит к одному уравнению третьего порядка в $\mathbb{R}_+^3$, для которого имеет место своеобразное разделение переменных. Для гиперболических уравнений второго порядка такое разделение переменных проводится с помощью характеристик, совпадающих с координатными осями (см. [14], гл. 1, §1). В случае уравнения третьего порядка разделение переменных проводится в два этапа. Сначала роль характеристик играют три грани октанта $\mathbb{R}_+^3$ (см. [14], гл. 1, §2), а затем на каждой из граней – прилегающие к ней координатные лучи.

Далее нас будут интересовать свойства решений системы трех гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} u_{xy} + \Gamma_{12}u_x + \Gamma_{21}u_y &= 0, \\ u_{xz} + \Gamma_{13}u_x + \Gamma_{31}u_z &= 0, \\ u_{yz} + \Gamma_{23}u_y + \Gamma_{32}u_z &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

которая получается из уравнений на функцию u систем (5), (7) при постоянных Γ_{ij} (см. замечание 1).

Очевидно, что система (24) всегда имеет тривиальное решение $u(x, y, z) = \text{const}$, но оно не представляет для нас интереса. Имеет место

Теорема 2. *Уравнения (9) эквивалентны условию совместности переопределенной системы (24).*

Доказательство получается сравнением результатов дифференцирования каждого из уравнений (24) по дополнительной переменной, которое приводит к одному уравнению третьего порядка. Кроме того, отсюда же вытекает, что всякое решение системы (24) удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} u_{xyz} &= \Gamma_{13}\Gamma_{12}u_x + \Gamma_{23}\Gamma_{21}u_y + \Gamma_{31}\Gamma_{32}u_z, \\ \Gamma_{12}u_{xz} + \Gamma_{21}u_{yz} &= \Gamma_{13}u_{xy} + \Gamma_{31}u_{zy}, \quad \Gamma_{12}u_{xz} + \Gamma_{21}u_{yz} = \Gamma_{23}u_{yx} + \Gamma_{32}u_{zx}, \end{aligned} \quad (25)$$

которые после умножения на Γ_{32} и на Γ_{13} соответственно, сводятся к одному уравнению второго порядка

$$\Gamma_{13}\Gamma_{32}u_{xy} + \Gamma_{31}\Gamma_{12}u_{zy} = \Gamma_{32}\Gamma_{12}u_{zx}. \quad (26)$$

Лемма 5. *Для того чтобы переопределенная система (24) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы функции Γ_{ij} удовлетворяли условию (11).*

Доказательство. Подставляя в уравнение (26) выражения вторых производных из (24), получим равенство

$$(\Gamma_{13}\Gamma_{32}\Gamma_{21} + \Gamma_{31}\Gamma_{12}\Gamma_{23})u_z = 0,$$

из которого следует доказываемое утверждение. $\square$

Замечание 4. Если функция u известна, то функции v и w могут быть найдены с помощью соответствующих уравнений системы (2):

$$v = \frac{u_y}{\Gamma_{12}} + u, \quad w = \frac{u_z}{\Gamma_{13}} + u.$$

Пример 3. При постоянных Γ_{ij} подстановка $u(x, y, z) = \exp(x\alpha + y\beta + z\gamma)$ в систему (24) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно обратных величин α^{-1} , β^{-1} , γ^{-1} :

$$1 + \Gamma_{12}\beta^{-1} + \Gamma_{21}\alpha^{-1} = 0, \quad 1 + \Gamma_{23}\gamma^{-1} + \Gamma_{32}\beta^{-1} = 0, \quad 1 + \Gamma_{31}\alpha^{-1} + \Gamma_{13}\gamma^{-1} = 0.$$

При выполнении условия (11) определитель этой системы равен нулю. Решая систему, получаем однопараметрическое семейство решений

$$\alpha^{-1} = s\Gamma_{12} - \Gamma_{31}^{-1}, \quad \beta^{-1} = -s\Gamma_{21} - \Gamma_{32}^{-1}, \quad \gamma^{-1} = s\Gamma_{32}\Gamma_{21}/\Gamma_{23}.$$

Соответствующее семейство решений линейной системы (24) можно трактовать как разделение переменных.

Теорема 3. *Если функции Γ_{ij} удовлетворяют (9), то решения системы (24) параметризуются их значениями на координатных осях.*

Доказательство. Содержательную часть теоремы несет случай, когда система (9) имеет нетривиальные решения. Как сказано выше, всякое нетривиальное решение системы (9) удовлетворяет равенствам (25), (26). В силу леммы 5 для решений системы (24) уравнение (26) превращается в тождество. Поэтому остается только уравнение (25). Согласно результатам монографии ([14], §9) это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям на координатных плоскостях.

Если теперь нам известны значения $u_1(x)$, $u_2(y)$, $u_3(z)$ функции u на координатных осях, то мы можем решить три задачи Гурса для каждого из уравнений системы (24) на соответствующей координатной плоскости. Например, для $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ имеем задачу

$$\begin{aligned} u_{xy} + \Gamma_{12}u_x + \Gamma_{21}u_y &= 0, \\ u|_{y,z=0} &= u_1(x), \quad u|_{x,z=0} = u_2(y), \end{aligned} \quad (27)$$

где u_1 , u_2 удовлетворяют условиям сопряжения и дифференцируемости. Решение задачи (27) существует и единственно ([14], гл. 1, §1) в прямоугольнике

$$\Pi = \{0 < x \leq x_0, 0 < y \leq y_0\}$$

при любых положительных x_0 , y_0 . Следовательно, значения функции $u(x, y, z)$ на координатных осях однозначно определяют следы $u_{12}(x, y)$, $u_{13}(x, z)$, $u_{23}(y, z)$ функции u на гранях октанта $\mathbb{R}_+^3$. Теперь доказываемое утверждение получается, если рассмотреть в $\mathbb{R}_+^3$ задачу Гурса для уравнения третьего порядка (25) с условиями на координатных плоскостях

$$u|_{z=0} = u_{12}(x, y), \quad u|_{y=0} = u_{13}(x, z), \quad u|_{x=0} = u_{23}(y, z)$$

и воспользоваться результатами монографии ([14], гл. 1, §2). $\square$

Заключение. Основным результатом работы являются явные формулы (16) для частных решений системы Дарбу (1), которые с помощью калибровочных преобразований приводятся к виду

$$\frac{1}{\Gamma_{31}} = Z - X = -\frac{1}{\Gamma_{13}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{23}} = Y - Z = \frac{1}{\Gamma_{32}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{12}} = Y - X = \frac{1}{\Gamma_{21}},$$

где $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ – произвольные функции. Эти формулы позволяют перейти к вопросу о решении ассоциированной задачи (2). Однако даже в случае постоянных функций

$$\Gamma_{31} = -\Gamma_{13}, \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$$

задача интегрирования уравнений (2) приводит к вопросу об условиях совместности гиперболической системы (5) и системы двух уравнений (25), (26). Ключевую роль здесь играет условие (11). Например, для решений системы (2) наряду с (5) выполняются однородные уравнения первого порядка

$$\Gamma_{12}v_x + \Gamma_{21}u_y = 0, \quad \Gamma_{23}w_y + \Gamma_{32}v_z = 0, \quad \Gamma_{31}u_z + \Gamma_{13}w_x = 0. \quad (28)$$

При нарушении (11) из (28) следует $u_{yz} = v_{xz} = w_{xy} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Царев С.П. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **54** (5), 1048–1068 (1990).
- [2] Захаров В.Е., Манаков С.В. *Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений*, Функци. анализ и его прилож. **19** (2), 11–25 (1985).
- [3] Zakharov V.E. *Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I. Integration of the Lamé equations*, Duke Math. J. **94** (1), 103–139 (1998).

- [4] Dryuma V.S. *Geometrical properties of the multidimensional nonlinear differential equations and the Finsler metrics of phase spaces of dynamical systems*, Теор. матем. Физика. **99** (2), 241–249 (1994).
- [5] Bogdanov L.V., Konopelchenko B.G. *Generalized integrable hierarchies and Combescure symmetry transformations*, J. Phys. A: Math. and General. **30** (5), 1591–1603 (1997).
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток: Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория*, УМН **44** (6), 29–98 (1989).
- [7] Кричевер И.М. *Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности*, Функц. анализ и его прилож. **31** (1), 32–50 (1997).
- [8] Ферапонтов Е.В. *Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестиугольной 3-тканью характеристик на решениях*, Функц. анализ и его прилож. **23** (2), 79–80 (1989).
- [9] Ферапонтов Е.В. *Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей*, Матем. сб. **181** (9), 1220–1235 (1990).
- [10] Павлов М.В. *Гамильтонов формализм слабонелинейных систем гидродинамики*, Теор. и матем. физика. **73** (2), 316–320 (1987).
- [11] Кулаев Р.Ч., Погребков А.К., Шабат А.Б. *Система Дарбу: лиувиллева редукция и явное решение*, Тр. МИАН. **302**, 268–286 (2018).
- [12] Шабат А.Б. *К теории преобразований Лапласа–Дарбу*, Теор. и матем. физика. **103** (1), 170–175 (1995).
- [13] Кулаев Р.Ч., Погребков А.К., Шабат А.Б. *Система Дарбу как трехмерный аналог уравнения Лиувилля*, Изв. вузов. Матем. **12**, 60–69 (2018).
- [14] Жегалов В.И., Миронов А.И. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*, Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2001.
- [15] Миронов А.Н. *Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка*, Матем. заметки. **102** (1), 64–71, (2017).
- [16] Жегалов В.И., Уткина Е.А., Шакирова И.М. *Об условиях разрешимости задачи Гурса для обобщенного уравнения Аллера*, Изв. вузов. Матем. **8**, 21–26 (2018).

Руслан Черменович Кулаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,

ул. Ватутина, д. 46, г. Владикавказ, 362025, Россия;

Южный математический институт ВНЦ РАН,

ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027, Россия;

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,

ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,

e-mail: kulaev@smath.ru

Алексей Борисович Шабат

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,

пр. Ак. Семенова, д. 1-А, г. Черноголовка, 142432, Россия;

Адыгейский государственный университет,

ул. Первомайская, д. 208, г. Майкоп, 385000, Россия,

e-mail: shabatab@mail.ru

R.Ch.Kulaev and A.B.Shabat

Darboux system and separation of variables in the Goursat problem for a third order equation in $\mathbb{R}^3$

Abstract. We construct a reduction of the three-dimensional Darboux system for the Christoffel symbols, which describes conjugate curvilinear coordinate systems. The reduction is determined by one additional algebraic condition on the Christoffel symbols. It is shown that the corresponding class of solutions of the Darboux system is parametrized by six functions of one variable (two for each of three independent variables). Explicit formulas for Darboux system solutions are given. For the case when Christoffel symbols are constants, the linear system associated with the Darboux system is studied. In this formulation, this system is reduced to the three-dimensional Goursat problem for a third-order equation with data on the coordinate planes. It is shown that the solution to the Goursat problem allows the separation of variables and is determined by its values on the coordinate lines.

Keywords: three-dimensional Darboux system, integrable systems, three-dimensional Goursat problem, systems of hydrodynamic type equations, Hamiltonian system.

Ruslan Chermenovich Kulaev

North Ossetia State University

46 Vatutina str., Vladikavkaz, 362025 Russia;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,

22 Markusa str., Vladikavkaz, 362027 Russia;

Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre RAS,

112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008 Russia,

e-mail: kulaev@smath.ru

Alexey Borisovich Shabat

Landau Institute for Theoretical Physics RAS,

1-A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka, 142432 Russia;

Adygea State University,

208 Pervomayskaya str., Maykop, 385000 Russia,

e-mail: shabatab@mail.ru