Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Э. Ниёзов, Регуляризация нестандартной задачи Коши для динамической системы Ламе, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 54–63

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-54-63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 02:15:14

И.Э. НИЁЗОВ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕСТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ

Аннотация. Рассматривается задача Коши для динамических систем Ламе в цилиндре $G_T = D \times (0, T)$, построенном над областью D в трехмерном пространстве, с начальными данными, заданными на некоторой полосе на боковой поверхности цилиндра. Полоса имеет вид $S \times (0, T)$, где S — открытое подмножество границы области D . Эта задача некорректная. При некоторых ограничениях на конфигурацию S , получена явная формула, описывающая решения этой задачи.

Ключевые слова: система Ламе, формула Карлемана, задача Коши, преобразование Лапласа.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-54-63

ВВЕДЕНИЕ

Наш подход к задаче Коши для параболических систем уравнений в цилиндре $G_T = D \times (0, T)$, построенном над областью $D \in R^3$, с неполными граничными и начальными данными берет свое начало в работе [1]. Точнее, если применить преобразование Фурье или Лапласа по временной переменной $t \geq 0$ к параболическому уравнению, то это уравнение преобразуется в семейство эллиптических уравнений с комплексным параметром τ в области D . Аналогичные преобразования начальных данных на боковой поверхности цилиндра G_T дают семейство задач Коши для эллиптического уравнения с параметром в области D и начальными данными на некотором непустом открытом подмножестве S границы ∂D . Эту задачу можно сразу решать конструктивными методами, тщательно разработанными в работе [2]. Затем остается применить обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Фурье является важным методом изучения задач математической физики и дифференциальных уравнений. В классических работах предполагалось, что преобразования Фурье применяются к функциям, интегрируемым на бесконечности. В физике преобразования Фурье часто применяются к медленно растущим функциям без каких-либо достаточных обоснований. Строгая математическая теория преобразования Фурье для медленно растущих функций была впервые строго обоснована в работе [3]. Никакого систематического изучения преобразования Фурье для быстро растущих функций таких, как e^x , e^{x^2} и т. д., не проводилось до появления работы [4], где была тщательно разработана теория преобразования Фурье для функций с произвольно быстрым ростом. Обобщение преобразования Фурье на случай быстро растущих функций имеет глубокую мотивацию. Напомним один из примеров, где для уравнения теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$ естественной областью, в которой задача Коши разрешима и имеет единственное решение, служит совокупность всех

функций, растущих при $|x| \rightarrow \infty$ медленнее, чем e^{x^2} , при каждом фиксированном $t \geq 0$. Заметим, что отличительным признаком работы [4] является выход в комплексную область и рассмотрение функционалов на классах аналитических (обычно целых) функций.

Мы будем изучать применимость данного подхода к задаче Коши для уравнения теплопроводности в цилиндре, построенном над областью типа "шапочки" D в пространстве R^3 . Применяв преобразование Лапласа, получим задачу Коши для уравнения Гельмгольца в области D с начальными данными на части границы этой области, лежащей в плоскости $x_3 = 0$. Потенциал уравнения Гельмгольца равен it . Явная функция Карлемана была впервые получена в работе [5]. В работе [6] содержится частный случай построения функции Карлемана для задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерной области типа "шапочки".

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D — ограниченная область с гладкой границей в R^3 , и пусть S — непустая открытая часть граничной поверхности ∂D . Рассмотрим задачу Коши для динамических систем уравнений Ламе в цилиндре $G_T = D \times (0, T)$ с начальными данными на полосе $S \times (0, T)$ боковой поверхности цилиндра, где $T > 0$ — некоторое фиксированное число. Точнее, при заданных функциях f на G_T и u_0, u_1 на $S \times (0, T)$ требуется найти функцию $u \in C^1(\overline{G_T}) \cap C^2(G_T)$ в цилиндре G_T , удовлетворяющую условиям задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= A(\partial_x)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in G_T; \\ u(y, t) &= u_0(y, t), \quad (y, t) \in S \times (0, T); \\ T(\partial_y, n(y))u(y, t) &= u_1(y, t), \quad (y, t) \in S \times (0, T), \end{aligned} \quad (1)$$

где $A(\partial_x) = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\text{grad div}$, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, λ, μ — постоянные Ламе, $n(y)$ — единичный вектор внешней нормали к границе в точке $y \in \partial D$.

Из результатов работы [7] следует, что задача (1) имеет не более одного гладкого решения u .

На боковой поверхности нет характеристических точек динамических систем уравнений теории упругости. По теореме Коши–Ковалевской, если S является действительно аналитической, то для всех действительных аналитических начальных данных f и u_0, u_1 эта задача имеет локально близкое к $S \times (0, T)$ действительное аналитическое решение u . Из предыдущих соображений следует, что это решение единственно.

Чтобы построить приближенное решение задачи Коши (1), продолжим начальные данные f и u_0, u_1 на весь полуцилиндр $t > 0$, т.е. в дальнейшем будем считать $T = \infty$.

Теперь мы можем получить решение нестационарной задачи (1). Метод решения опирается на тот факт, что задачу (1) можно свести к некоторой другой задаче (2), содержащей на одну независимую переменную меньше. Обе эти задачи эквивалентны, что устанавливается с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа, но во многих случаях вторую задачу можно решить просто и в явной форме. Желательно, чтобы предположения, при которых можно применять преобразование, были достаточно широкими и охватили бы важные практические применения.

Мы потребуем, чтобы решение $u(x, t)$ задачи (1) удовлетворяло следующему условию: существует такое действительное α_0 , что функции

$$u(x, t)e^{-\alpha_0 t}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t)e^{-\alpha_0 t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} u(x, t)e^{-\alpha_0 t}$$

остаются ограниченными равномерно по x при стремлении t к бесконечности. При этом предположении соответствующее преобразование Лапласа запишем в виде

$$U(x, \tau) = \mathcal{L}u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-\tau t} dt,$$

которое существует для $\operatorname{Re} \tau = \alpha > \alpha_0$ и является регулярной аналитической функцией от $\tau = \alpha + i\beta$ в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$. На основании наших предположений мы получаем следующие формулы для производных этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} U(x, \tau) &= \mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t) \right) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t) e^{-\tau t} dt, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} U(x, \tau) &= \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} u(x, t) \right) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} u(x, t) e^{-\tau t} dt. \end{aligned}$$

Из наших условий заключаем, что преобразования Лапласа для функции $u_t(x, t)$ также существуют:

$$\int_0^T u_t(x, t) e^{-\tau t} dt = \int_0^T e^{-\tau t} du(x, t) = u(x, T) e^{-\tau T} - u(x, 0) + \tau \int_0^T u(x, t) e^{-\tau t} dt.$$

Так как правая часть имеет предел при $T \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re} \tau > \alpha_0$, то левая часть также имеет предел, т. е.

$$\int_0^\infty u_t(x, t) e^{-\tau t} dt = \tau U(x, \tau) - u(x, 0).$$

Заметим, что значения $u(x, 0)$ на дне цилиндра однозначно определяются значениями $u(x, t)$ при малых $t > 0$ при условии, что $u \in C^1(\overline{G_T}) \cap C^2(G_T)$. Следовательно, значения $u(x, 0)$ однозначно определяются значениями функций $u_0(y, t)$ и $u_1(y, t)$ на $S \times (0, T)$. Кроме того, если мы умножим уравнения системы (1) и данные Коши на $e^{-\tau t}$ и проинтегрируем их по t от 0 до ∞ , то получим семейство задач Коши

$$\begin{aligned} A(\partial_x, \tau)U(x, \tau) &= u(x, 0) - \mathcal{L}f(x, t) = \mathcal{F}(x, \tau), \quad x \in D; \\ U(y, \tau) &= U_0(y, \tau), \quad y \in S; \\ T(\partial_y, n(y))U(y, \tau) &= U_1(y, \tau), \quad y \in S, \end{aligned} \tag{2}$$

где $A(\partial_x, \tau) = A(\partial_x) - \tau$, $U(y, \tau) = \mathcal{L}u(y, t)$, $U_0(y, \tau) = \mathcal{L}u_0(y, t)$, $U_1(y, \tau) = \mathcal{L}u_1(y, t)$ в области D , параметризованных комплексным параметром τ , меняющимся вдоль вертикальной линии в $\operatorname{Re} \tau > \alpha_0$ полуплоскости. Для любого фиксированного τ соотношения (2) определяют задачу Коши для систем уравнений колебания, точнее для уравнения упруго-колебательного состояния среды D , т. е. для уравнения

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U - \tau U - \mathcal{F} = 0 \tag{3}$$

в D с начальными данными на части S . Хорошо известно [8]–[10], что эта задача неустойчива в естественной постановке, если S не совпадает со всей границей, следовательно, что задача (1) некорректна.

В дальнейшем для решения задачи (2) используем метод, основанный на функции Карлемана [11], [12]. Матрицу фундаментальных решений однородного уравнения колебания

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U - \tau U = 0 \tag{4}$$

представим в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, \tau) &= \|\Psi_{kj}(x, \tau)\|_{3 \times 3}, \\ \Psi_{kj}(x, \tau) &= \sum_{q=1}^2 \left(\delta_{kj} a_q + b_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \left(\frac{\exp(ik_q |x|)}{|x|} \right), \end{aligned}$$

где

$$k_1^2 = \frac{-\tau}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{-\tau}{\mu}, \quad a_q = \frac{\delta_{2q}}{2\pi\mu}, \quad b_q = \frac{(-1)^{q-1}}{2\pi\tau}.$$

Верна формула Соммилиана–Бетти [13].

Теорема 1. *Регулярное в D решение $U(x, \tau)$ неоднородного уравнения колебания (3) представимо в виде*

$$\begin{aligned} 2U(x, \tau) = \int_{\partial D} \left(\Psi(y - x, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\} - \{T(\partial_y, n(y)) \Psi(y - x)\}^* U(y, \tau) \right) ds_y + \\ + \int_D \Psi(y - x, \tau) \mathcal{F}(y, \tau) dy = \begin{cases} 2U(x, \tau), & x \in D; \\ 0, & x \notin \bar{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть D — ограниченная область в верхнем полупространстве $x_3 > 0$ пространства R^3 , граница которого состоит из гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $x_3 > 0$, и замкнутых кусков плоскости $x_3 = 0$. Такие области обычно называются областями типа "шапочки". Заметим, что единичный вектор внешней нормали на части $\partial D \setminus S$ равен $(0, 0, -1)$.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3) = (y', y_3)$ — точки евклидова пространства R^3 . Положим $\rho = |x' - y'|$ и определим функцию

$$\Phi(y, x, \sigma, \Lambda) = \frac{1}{-2\pi^2 K(x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{K(w)}{w - x_3} \frac{\cos(\Lambda u) du}{\sqrt{u^2 + \rho^2}}, \quad (6)$$

где $w = i\sqrt{u^2 + \rho^2} + y_3$, Λ — комплексное число, $K(w) = \exp(\sigma w^2)$, σ — положительный числовой параметр.

Выделив мнимую часть, получим

$$\Phi(y, x, \sigma, \Lambda) = \int_0^\infty \mathcal{K}(y, x, \sigma, u) \cos(\Lambda u) du, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(y, x, \sigma, u) = \frac{1}{-2\pi^2} \frac{\exp \sigma(y_3^2 - x_3^2) \exp \left(-\sigma(u^2 + \rho^2) \right)}{u^2 + \rho^2} \times \\ \times \left(\frac{(y_3 - x_3) \sin(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \rho^2})}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} - \cos \left(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \rho^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, сходимость несобственного интеграла в правой части соотношения (6) обеспечивается множителем $\exp(-\sigma u^2)$.

Лемма 1 ([10]). *Функция $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$, определяемая формулой (6), представима в виде*

$$\Phi(y, x, \sigma, \Lambda) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(i\Lambda r)}{r} + g(y, x, \sigma, \Lambda),$$

где $g(y, x, \sigma, \Lambda)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция по y , удовлетворяющая по y уравнению Гельмгольца: $\Delta_y g - \Lambda^2 g = 0$, включая и точку $y = x$.

Функцию $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ назовем функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца.

Определение. Матрицей Карлемана задачи (1.2) называется 3×3 -матрица $\Pi(y, x, \sigma, \Lambda)$, зависящая от двух точек x, y и положительного числового параметра σ , удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\Pi(y, x, \sigma, \Lambda) = \Psi(y - x, \tau) + G(y, x, \sigma, \tau)$, где матрица $G(y, x, \sigma, \tau)$ удовлетворяет по переменной y уравнению (4) всюду в области D , $\Psi(y - x, \tau)$ — матрица фундаментальных решений системы (2);

2) $\int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \sigma, \Lambda)| + |T(\partial_y, n(y))|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; $|\Pi|$ — евклидова

норма матрицы $\|\Pi\|$, т. е. $|\Pi| = \left(\sum_{k,j=1}^3 \Pi_{kj}^2 \right)^{1/2}$, в частности, $|U| = \left(\sum_{k=1}^3 U_k^2 \right)^{1/2}$.

Известно [4], что для регулярных u, v и $A(\partial_x, \tau)u$, $A(\partial_x, \tau)v$, абсолютно интегрируемых в D вектор-функций, верна формула

$$\int_D [vA(\partial_y, \tau)u - uA(\partial_y, \tau)v] dy = \int_{\partial D} [vT(\partial_y, n(y))u - uT(\partial_y, n(y))v] ds_y.$$

Подставляя в это равенство вместо $v = G(y, x, \sigma, \tau)$ и $u = U(x, \tau)$ регулярное решение системы (3), получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(G(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y))U(y, \tau)\} - \{T(\partial_y, n(y))G(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau) \right) ds_y + \\ + \int_D G(y, x, \sigma, \tau) \mathcal{F}(y, \tau) dy = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Прибавляя (5) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left((\Psi(y - x, \tau) + G(y, x, \sigma, \tau)) \{T(\partial_y, n(y))U(y, \tau)\} - \right. \\ \left. - \{T(\partial_y, n(y))(\Psi(y - x, \tau) + G(y, x, \sigma, \tau))\}^* U(y, \tau) \right) ds_y + \\ + \int_D (\Psi(y - x, \tau) + G(y, x, \sigma, \tau)) \mathcal{F}(y, \tau) dy = \begin{cases} 2U(x, \tau), & x \in D; \\ 0, & x \notin \overline{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) видно, что если матрица Карлемана задачи (2) известна, то верна

Теорема 2. *Всякое регулярное решение $U(x, \tau)$ системы (3) в области D определяется формулой*

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(\Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y))U(y, \tau)\} - \{T(\partial_y, n(y))\Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau) \right) ds_y + \\ + \int_D \Pi(y, x, \sigma, \tau) \mathcal{F}(y, \tau) dy = \begin{cases} 2U(x, \tau), & x \in D; \\ 0, & x \notin \overline{D}, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Pi(y, x, \sigma, \tau)$ — матрица Карлемана.

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (2), а также указать метод эффективного решения этой задачи.

С целью построения приближенного решения задачи (2) построим матрицу Карлемана

$$\Pi(y, x, \sigma, \tau) = \|\Pi_{kj}(y, x, \sigma, \tau)\|_{3 \times 3}, \quad (11)$$

где

$$\Pi_{kj}(y, x, \sigma, \tau) = \sum_{q=1}^2 \left(\delta_{kj} a_q + b_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \Phi(y, x, \sigma, ik_q),$$

$\Phi(y, x, \sigma, ik_q)$ из (6).

Лемма 2. Матрица $\Pi_{kj}(y, x, \sigma, \tau)$, заданная формулой (10), является матрицей Карлемана задачи (2).

Доказательство леммы вытекает из леммы 1 и (10).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ (2)

Обозначим

$$2U_\sigma(x, \tau) = \int_S \left(\Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\} - \right. \\ \left. - \{T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau) \right) ds_y + \int_D \Pi(y, x, \sigma, \tau) \mathcal{F}(y, \tau) dy. \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть $U(x, \tau)$ — регулярное решение уравнение (3) в области D , удовлетворяющее условию

$$|U(y, \tau)| + |T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)| \leq M, \quad y \in \partial D, \quad (13)$$

тогда при $\sigma \geq 1$ справедлива оценка

$$|U(y, \tau) - U_\sigma(x, \tau)| \leq MC(\lambda, \mu, \tau, x) \sigma^2 \exp(-\sigma x_3^2), \quad y \in D, \quad (14)$$

где

$$C(\lambda, \mu, \tau, x) = C(\lambda, \mu, \tau) \int_{\partial D} \frac{ds_y}{r^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|U(x, \tau) - U_\sigma(x, \tau)| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{\partial D \setminus S} \left(\Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\} - \right. \right. \\ \left. \left. - \{T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau) \right) ds_y \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\partial D \setminus S} [|\Pi(y, x, \sigma, \tau)| + |T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)|] \times \\ \times [|U(y, \tau)| + |T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)|] ds_y \leq \frac{M}{2} \int_{\partial D \setminus S} [|\Pi(y, x, \sigma, \tau)| + |T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)|].$$

С учетом (6), (10)

$$\begin{aligned} |\Phi(y, x, \sigma, ik_q)| &\leq C_1 r^{-1} \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2), \\ \left| \frac{\partial \Phi(y, x, \sigma, ik_q)}{\partial y_k} \right| &\leq C_2 r^{-2} \sigma \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2), \\ \left| \frac{\partial^2 \Phi(y, x, \sigma, ik_q)}{\partial y_k \partial y_j} \right| &\leq C_3 r^{-3} \sigma^2 \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

Соответственно

$$|\Pi(y, x, \sigma, \tau)| + |T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)| \leq C(\lambda, \mu, \tau) r^{-3} \sigma^2 \exp \sigma(y_3^2 - x_3^2). \quad \square$$

Как видим, матрица $\Pi(y, x, \sigma, \tau)$ является фундаментальным решением типа свертки для оператора $A(\partial_x, \tau)$ в R^3 . Тогда для фиксированного τ приближенное решение задачи (2) получается из так называемой формулы Карлемана

$$\begin{aligned} U(x, \tau) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x, \tau) = \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\int_S \Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\} ds_y - \right. \\ \left. - \int_S \{T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau) ds_y + \right. \\ \left. + \int_D \Pi(y, x, \sigma, \tau) (\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \tau) U(y, \tau) dy \right), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что обратное преобразование Лапласа возможно при переходе к пределу в последней формуле:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} U(x, \tau) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} U_\sigma(x, \tau) = \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\int_S \mathcal{L}^{-1} [\Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\}] ds_y - \right. \\ \left. - \int_S \mathcal{L}^{-1} [\{T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau)] ds_y + \right. \\ \left. + \int_D \mathcal{L}^{-1} [\Pi(y, x, \sigma, \tau) (\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \tau) U(y, \tau)] dy \right), \quad x \in D. \end{aligned}$$

В силу известной теоремы о свертке для преобразования Лапласа получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [\Pi(y, x, \sigma, \tau) \{T(\partial_y, n(y)) U(y, \tau)\}] &= \mathcal{L}^{-1} [\Pi(y, x, \sigma, \tau)] * \{T(\partial_y, n(y)) \mathcal{L}^{-1} U(y, \tau)\} = \\ &= \int_0^t [(\mathcal{L}^{-1} \Pi)(y, x, \sigma, t - t')] \{T(\partial_y, n(y)) u(y, t')\} dt'. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathcal{L}^{-1} [\{T(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \sigma, \tau)\}^* U(y, \tau)] = \int_0^t \{T(\partial_y, n(y)) (\mathcal{L}^{-1} \Pi)(y, x, \sigma, t - t')\} u(y, t') dt'$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [\Pi(y, x, \sigma, \tau) (\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \tau) U(y, \tau)] &= \\ &= \int_0^t [(\mathcal{L}^{-1} \Pi)(y, x, \sigma, t - t')] \left(\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) u(y, t') dt' - \\ &\quad - (\mathcal{L}^{-1} \Pi)(y, x, \sigma, t) u(y, 0). \end{aligned}$$

Следовательно, применяя обратное преобразование Лапласа, получим формулу

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(- \int_D (\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t) u(x, 0) dy + \right. \\ & + \int_S \int_0^t (\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t - t') \{T(\partial_y, n(y)) u(y, t')\} ds_y dt' - \\ & - \int_S \int_0^t \{T(\partial_y, n(y)) (\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t - t')\} u(y, t') ds_y dt' + \\ & \left. + \int_D \int_0^t [(\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t - t')] \left(\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) u(y, t') dy dt' \right) \end{aligned}$$

для любых $(x, t) \in G_T$.

Положим

$$\mathcal{P}(y, x, \sigma, t) = (\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Re(\tau)=\alpha} e^{\tau t} \Pi(y, x, \sigma, \tau) d\tau$$

при (x, y) , лежащих вне диагонали в $D \times D$, и при $t > 0$, где α — достаточно малое отрицательное число. Простые вычисления показывают, что

$$\left(A(\partial_y) - \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{P}(y, x, \sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(\tau)=\alpha} e^{\tau t} A(\partial_y, \tau) \Pi(y, x, \sigma, \tau) d\tau = 0,$$

для (x, y) и t , лежащих в области определения функции $\mathcal{P}$. Кроме того, $\mathcal{P}(y, x, \sigma, t)$ в некотором смысле стремится к нулю по y при $\sigma \rightarrow \infty$ вне S на границе области D .

Находим вид $\mathcal{P}(y, x, \sigma, t)$ для областей типа "шапочки". Для этого рассмотрим функцию $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ из (7) при $\Lambda = \sqrt{\tau}$

$$\Phi(y, x, \sigma, \tau) = \int_0^\infty \mathcal{K}(y, x, \sigma, u) \cos(\sqrt{\tau} u) du.$$

На плоскости $y_3 = 0$

$$\mathcal{K}(y, x, \sigma, u) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\exp(-\sigma x_3^2) \exp(-\sigma(u^2 + \rho^2))}{u^2 + \rho^2}.$$

Пусть

$$\mathbb{F}(y, x, \sigma, t) = \mathcal{L}^{-1} \Phi(y, x, \sigma, \tau) = \int_0^\infty \mathcal{K}(y, x, \sigma, u) \mathcal{L}^{-1}(\cos(\sqrt{\tau} u)) du, \quad (16)$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y, x, \sigma, t) &= (\mathcal{L}^{-1}\Pi)(y, x, \sigma, t), \\ \mathcal{P}(y, x, \sigma, t) &= \| \mathcal{L}^{-1} \Pi_{kj}(y, x, \sigma, \tau) \|_{3 \times 3} = \| \mathcal{P}_{kj}(y, x, \sigma, t) \|_{3 \times 3}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{P}_{kj}(y, x, \sigma, t) = \sum_{q=1}^2 \left(\delta_{kj} a_q + b_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \mathbb{F}(y, x, \sigma, t).$$

Лемма 3. Если $\mathcal{P}(y, x, \sigma, t)$ — матрица Карлемана задачи (1), то верна формула

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(- \int_D (\mathcal{P}(y, x, \sigma, t) u(x, 0) dy + \right. \\ & + \int_S \int_0^t \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \{ T(\partial_y, n(y)) u(y, t') \} ds_y dt' - \\ & - \int_S \int_0^t \{ T(\partial_y, n(y)) \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \} u(y, t') ds_y dt' + \\ & \left. + \int_D \int_0^t \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \left(\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) u(y, t') dy dt' \right) \end{aligned}$$

для всех $(x, t) \in G_T$.

Как видно, что все последние выражения зависят от величины

$$\mathcal{L}^{-1}(\cos(\sqrt{\tau}u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(p)=\alpha} e^{pt} \cos(\sqrt{p}u) dp = 0.$$

Но функция $\cos(\sqrt{p})$ не является преобразованием Лапласа для функции на неотрицательной полуоси, удовлетворяющей условию $|f(t)| \leq C \exp(kt)$ при $t \geq 0$. Обратное преобразованием Лапласа для функции $\cos(\sqrt{p})$ следует интерпретировать в рамках более сложной теории, развитой в работе [4].

Теорема 4. Пусть D — область типа "шапочки" в пространстве R^3 . Тогда для любого $u \in H^{2,1}(G_T)$ имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(- \int_D \mathcal{P}(y, x, \sigma, t) u(x, 0) dy + \int_S \int_0^t \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \{ T(\partial_y, n(y)) u(y, t') \} ds_y dt' - \right. \\ & - \int_S \int_0^t \{ T(\partial_y, n(y)) \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \} u(y, t') ds_y dt' + \\ & \left. + \int_D \int_0^t \mathcal{P}(y, x, \sigma, t - t') \left(\mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) u(y, t') dy dt' \right) \end{aligned}$$

для всех $(x, t) \in G_T$.

Доказательство утверждения теоремы непосредственно следует из леммы 3 и формулы (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Агранович М.С., Вишик М.И. *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, 19:3 (117), 53–161 (1964).
- [2] Tarkhanov N.N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, 7, Akad. Verl., Berlin, (1995).
- [3] Bochner S. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Akad. Verl., Leipzig, (1932).
- [4] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши*, УМН, 8:6 (58), 3–54 (1953).
- [5] Ярмухамедов Ш. *О задаче Коши для уравнение Лапласа*, ДАН СССР **235** (2), 281–283 (1977).
- [6] Yarmukhamedov Sh., Yarmukhamedov I. *The Cauchy problem for the Helmholtz equation*, Ill-Posed and Non-Classical Probl. Math. Physics and Anal., VSP, Utrecht, 143–172 (2003).
- [7] Ландис Е.М., Олейник О.А. *Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений*, УМН, 29:2 (176), 190–206 (1974).
- [8] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа* (Наука, М., 1980).
- [9] Puzyrev R.E., Shlapunov A.A. *On an ill-posed problem for the heat equation*, Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ. **5** (3), 337–348 (2012).
- [10] Махмудов К.О., Махмудов О.И., Тарханов Н.Н. *Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности*, Матем. заметки **102** (2), 270–283 (2017).
- [11] Ярмухамедов Ш. *Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа*, Сиб. матем. журн. **45** (3), 702–719 (2004).
- [12] Makmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N. *The Cauchy problem of couple-stress elasticity*, Complex anal. and dynamical systems III, Contemp. Math., 455, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 297–310 (2008).
- [13] Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. *Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости* (Наука, М., 1976).

Икбол Эргашевич Нийёзов

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Узбекистан,

e-mail: iqboln@mail.ru

I.E. Niyozov

Regularization of a nonstandard Cauchy problem for a dynamic Lamé system

Abstract. We consider a Cauchy problem for the dynamic systems Lamé in a cylinder $G_T = D \times (0, T)$ over a domain D in R^3 with data on a strip lying on the lateral surface. The strip is of the form $S \times (0, T)$, where S — is an open subset of the boundary of D . The problem is ill-posed. Under natural restrictions on the configuration of S we derive an explicit formula for solutions of this problem.

Keywords: Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem.

Ikbol Ergashevich Niyozov

Samarkand State University,

15 Universitetskii blvd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: iqboln@mail.ru