Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Нурмагомедов, Приближение функций частными суммами ряда Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 64–73

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-64-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:33:06

А.А. НУРМАГОМЕДОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДА ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Аннотация. В данной работе для произвольной непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(t)$ построены дискретные суммы Фурье $S_{n,N}(f, t)$ по системе многочленов, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках $T_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1, 1]$ с весом $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм $S_{n,N}(f, t)$ порядка $n \leq N - 1$. Получена двусторонняя поточечная оценка для функции Лебега $L_{n,N}(t)$ рассматриваемых дискретных сумм Фурье при $n = O(\delta_N^{-1/5})$, $\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j$. Исследован также вопрос сходимости $S_{n,N}(f, t)$ к $f(t)$. Получена оценка отклонения частной суммы $S_{n,N}(f, t)$ от $f(t)$ при $n = O(\delta_N^{-1/5})$, которая зависит от n и положения точки $t \in [-1, 1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, асимптотическая формула, дискретная сумма Фурье, функция Лебега.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-64-73

1. Введение. В прикладных задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных системах точек (сетках), часто решаются с помощью рядов Фурье по системе многочленов, образующих ортонормированную систему на этих сетках. Как известно, решение этого вопроса сводится к оценке функции Лебега соответствующих сумм Фурье. И здесь следует отметить, что эти вопросы были предметом исследования в работах многих авторов, среди которых мы укажем лишь те работы, которые посвящены изучению функции Лебега сумм Фурье–Якоби, сходимости рядов Фурье–Якоби и их дискретных аналогов [1]–[15].

Из рассуждений в ([1], 9.3) легко следует, что на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, функция Лебега сумм Фурье–Якоби есть $O(\ln n)$. Г. Рау установил [2], что в точках $t = -1$ и $t = 1$ функция Лебега сумм Фурье–Якоби имеет порядок $n^{\beta+1/2}$ и $n^{\alpha+1/2}$ соответственно. Отсюда еще не вытекает, что наибольшее значение этой функции имеет порядок $n^{\lambda+1/2}$, где $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. Однако для многочленов Лежандра Т. Гронволлом [3] было показано, что функция Лебега принимает наибольшее значение на концах отрезка ортогональности. Такое же утверждение справедливо и при целых, полуцелых и равных друг другу α и β . Далее, в работе [5] при $\alpha, \beta > -1/2$ получен точный порядок роста функции Лебега сумм Фурье–Якоби, что уточняет более раннюю оценку тех же авторов [4]:

$$L_n^{\alpha, \beta}(t) \leq c(\alpha, \beta) \left\{ \ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-t})^{\alpha+1/2} + 1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+t})^{\beta+1/2} + 1} \right\},$$

$t \in [-1, 1]$, $n = 1, 2, \dots$.

И.И. Шарапудиновым в работе [6] исследован вопрос о сходимости частных сумм Фурье–Чебышева $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, t)$ порядка $n \leq N-1$ по многочленам Чебышева $\{\tau_{n,N}(t)\}_{n=0}^{N-1}$, образующим ортонормированную систему с весом $\mu_N(t) = 2/N$ на множестве $\Omega = \{-1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ к функции $f \in C[-1, 1]$. А именно, доказано, что при $n = O(N^{1/2})$ норма оператора $S_{n,N} = S_{n,N}(f)$ в $C[-1, 1]$ имеет порядок $\|S_{n,N}\| = O(n^{1/2})$.

И по аналогии с этими работами мы также исследовали аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, образующих ортонормированную систему на произвольных сетках отрезка $[-1, 1]$.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана сетка $T_N = \{-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1\}$ и n, N, m — натуральные числа. Через

$$\hat{p}_{k,N}(t) = \hat{p}_k(t; T_N) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке T_N ($0 \leq n, m \leq N-1$):

$$(\hat{p}_{n,N}, \hat{p}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{n,N}(t_j) \hat{p}_{m,N}(t_j) \Delta t_j = \delta_{nm}, \quad (1.2)$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j$, $\mathfrak{a}_1$ — наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 |q'_n(t)| dt \leq \mathfrak{a}_1 n^2 \int_{-1}^1 |q_n(t)| dt,$$

$\hat{P}_n(t)$ — ортонормированный многочлен Лежандра, $C[-1, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$, $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени не выше n , $E_n(f) = \min_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n .

Здесь и далее через $c, c(a, b)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, отличные в разных местах.

Через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, t)$ обозначим частную сумму n -го порядка ряда Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}(t)\}_{k=0}^{N-1}$, т. е.

$$S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k \hat{p}_{k,N}(t), \quad (1.3)$$

где $\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \hat{p}_{k,N}(t_j) \Delta t_j$.

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}(f)$ ряда Фурье функции $f \in C[-1, 1]$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}(t)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $t \in [-1, 1]$ посредством неравенства Лебега

$$|f(t) - S_{n,N}(f, t)| \leq (1 + L_{n,N}(t)) E_n(f) \quad (1.4)$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j, \quad (1.5)$$

где

$$K_{n,N}(t, t_j) = \sum_{k=0}^n \hat{p}_{k,N}(t) \hat{p}_{k,N}(t_j). \quad (1.6)$$

Отметим, что полученные в данной работе нами оценки функции (1.5) и разности $|f(t) - S_{n,N}(f, t)|$, в отличие от работ [7]–[8], учитывают величину номера n и положение точки $t \in [-1, 1]$.

2. Вспомогательные утверждения. Здесь мы, в первую очередь, приведем ранее полученные нами результаты [7], которые необходимы для дальнейшего исследования.

Терема 2.1. Пусть $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$ и $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\hat{p}_{n,N}(t) = \hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t), \quad (2.1)$$

для остаточного члена $v_{n,N}(t)$ которой справедлива оценка

$$|v_{n,N}(t)| \leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} \left[\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right]^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Терема 2.2. Пусть $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$, $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$. Тогда существует постоянная $c(a, b) > 0$ такая, что

$$|\hat{p}_{n,N}(t)| \leq c(a, b) \left(\delta_N^{1/2} n^{3/2} + 1 \right) \left[\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right]^{-1/2} \quad (-1 \leq t \leq 1). \quad (2.3)$$

В качестве следствий теорем 2.1 и 2.2 соответственно отметим два утверждения.

Следствие 2.1. Пусть $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$ и $n = O(\delta_N^{-1/5})$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\hat{p}_{n,N}(t) = \hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t), \quad (2.4)$$

для остаточного члена $v_{n,N}(t)$ которой справедлива оценка

$$|v_{n,N}(t)| = O(n^{-1/2}). \quad (2.5)$$

Следствие 2.2. Пусть $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. Тогда имеют место оценки

$$|\hat{p}_{n,N}(t)| \leq c(a, b) n^{1/2}, \quad -1 \leq t \leq -1 + cn^{-2}, \quad 1 - cn^{-2} \leq t \leq 1, \quad (2.6)$$

$$|\hat{p}_{n,N}(t)| \leq c(a, b) (1-t)^{-1/4}, \quad 0 \leq t \leq 1 - cn^{-2}, \quad (2.7)$$

$$|\hat{p}_{n,N}(t)| \leq c(a, b) (1+t)^{-1/4}, \quad -1 + cn^{-2} \leq t \leq 0. \quad (2.8)$$

Лемма 2.1 ([9], лемма 1). Пусть функция $f(t)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1, b_1]$ и $\{t_j\}_{j=0}^m$ — сетка такая, что $a_1 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < b_1$. Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Тогда если

1) $f(t)$ монотонно возрастает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j) \Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(t) dt + f(b_2) \Delta^*, \quad (2.9)$$

2) $f(t)$ монотонно убывает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j) \Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(t) dt + f(a_2) \Delta^*, \quad (2.10)$$

где $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$.

3. Некоторые свойства многочленов Якоби и Лежандра. Приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра ([1]; [10], 5.1). Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha, \beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{k(t)} \frac{d^n}{dt^n} \{k(t) \sigma^n(t)\},$$

где α, β — произвольные действительные числа,

$$\sigma(t) = 1 - t^2, \quad k(t) = k(t; \alpha, \beta) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta.$$

Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $k(t)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 k(t) P_n^{\alpha, \beta}(t) P_m^{\alpha, \beta}(t) dt = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm},$$

где $h_n^{\alpha, \beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ и, следовательно, $h_n^{\alpha, \beta} \asymp n^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби:

весовая оценка ($-1 \leq t \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}}; \quad (3.1)$$

в частности,

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \quad (0 \leq t \leq 1 - n^{-2}),$$

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) n^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (1 - n^{-2} \leq t \leq 1);$$

равенство

$$P_{n+1}^{\alpha, \beta}(t) = \frac{n+\alpha+1}{n+1} P_n^{\alpha, \beta}(t) - \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)} (1-t) P_n^{\alpha+1, \beta}(t). \quad (3.2)$$

Как известно, одним из частных случаев многочленов Якоби при $\alpha = \beta = 0$ являются многочлены Лежандра, ортогональные с единичным весом $k(t) = 1$ на сегменте $[-1, 1]$:

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \delta_{nm},$$

для которых, в частности, неравенство (3.1) имеет вид

$$\sqrt{n} |P_n(t)| \leq c \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

4. Оценка функции Лебега сумм Фурье по многочленам $\hat{p}_{n,N}(t)$. Имеет место

Теорема 4.1. Пусть $f \in C[-1, 1]$, $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left(\frac{1-b}{4\mathfrak{a}_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. Тогда справедливо неравенство ($-1 \leq t \leq 1$)

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|].$$

Доказательство. По аналогии с работой [11] рассмотрим два случая.

Случай 1) $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$. Сумму, определяемую равенством (1.5), разобьем по следующей схеме:

$$\begin{aligned} L_{n,N}(t) &\leq \sum_{-1 \leq t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \\ &+ \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{y_2 \leq t_j < 1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $y_1 = t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$, $y_2 = t + \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$.

Далее посредством аналогичных рассуждений ([12], с. 36; [7], лемма 2.4) можно показать, что в формуле Кристоффеля—Дарбу ($n \leq N-2$)

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_{k,N}(t) \hat{p}_{k,N}(t_j) = \frac{k_{n,N}}{k_{n+1,N}} \frac{\hat{p}_{n+1,N}(t) \hat{p}_{n,N}(t_j) - \hat{p}_{n,N}(t) \hat{p}_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j}, \quad (4.2)$$

где $k_{n,N}$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_{n,N}(t)$, множитель

$$\frac{1}{(1 - 4\mathfrak{a}_1 \delta_N (n+1)^2)^{1/2}} \leq \frac{k_{n,N}}{k_{n+1,N}} \leq 1. \quad (4.3)$$

Оценим A_1 . В силу (4.2), (4.3) и (2.6) находим

$$\begin{aligned} A_1 &\leq |K_{n,N}(t, -1)| \Delta t_1 + \sum_{-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \\ &+ \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j \leq c(a, b) \left[n^{1/2} (|\hat{p}_{n+1,N}(t)| + |\hat{p}_{n,N}(t)|) \delta_N \right] + \\ &+ 2 \sum_{-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}} (|\hat{p}_{n+1,N}(t) \hat{p}_{n,N}(t_j)| + |\hat{p}_{n,N}(t) \hat{p}_{n+1,N}(t_j)|) \Delta t_j + \\ &+ 2 \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2} (|\hat{p}_{n+1,N}(t) \hat{p}_{n,N}(t_j)| + |\hat{p}_{n,N}(t) \hat{p}_{n+1,N}(t_j)|) \Delta t_j = A_{10} + A_{11} + A_{12}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где при $n = O(\delta_N^{-1/5})$

$$\begin{aligned} A_{11} &\leq c(a, b) \left[|\hat{p}_{n+1,N}(t)| n^{1/2} + |\hat{p}_{n,N}(t)| (n+1)^{1/2} \right] \sum_{-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}} \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) n^{1/2} [|\hat{p}_{n+1,N}(t)| + |\hat{p}_{n,N}(t)|] n^{-2} \leq c(a, b) n^{-1}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

а в силу (2.8), (2.10)

$$A_{12} \leq c(a, b) [|\hat{p}_{n+1,N}(t)| + |\hat{p}_{n,N}(t)|] \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2} (1+t_j)^{-1/4} \Delta t_j \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq c(a, b) [|\hat{p}_{n+1,N}(t)| + |\hat{p}_{n,N}(t)|] \left[\int_{-1+4n^{-2}}^{-1/2} (1+\xi)^{-1/4} d\xi + \delta_N n^{1/2} \right] \leq \\ &\leq c(a, b) [|\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сопоставляя (4.4)–(4.6), с учетом того, что $A_{10} \leq c(a, b)n^{-3}$ при $n = O(\delta_N^{-1/5})$, имеем

$$A_1 \leq c(a, b) [|\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|]. \quad (4.7)$$

Теперь оценим A_2 . В силу (4.2), (4.3) и асимптотической формулы (2.1) получаем

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{p}_{n+1,N}(t)\hat{p}_{n,N}(t_j) - \hat{p}_{n,N}(t)\hat{p}_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \leq \\ &\leq \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(t_j) - \hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t)v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &\quad + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_n(t_j)v_{n+1,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{v_{n+1,N}(t)v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &\quad + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_n(t)v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t_j)v_{n,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &\quad + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{v_{n,N}(t)v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j = A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{26} + A_{27}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Оценим A_{21} . Пользуясь тождеством (3.2) при $\alpha = \beta = 0$, можем записать

$$P_{n+1}(t)P_n(t_j) - P_n(t)P_{n+1}(t_j) = (1 - t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t) - (1 - t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j).$$

Пользуясь равенством

$$\hat{P}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$$

и неравенствами (3.1) и (3.3), находим

$$\begin{aligned} A_{21} &\leq \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{(1 - t_j)\hat{P}_n^{1,0}(t_j)\hat{P}_n(t) - (1 - t)\hat{P}_n^{1,0}(t)\hat{P}_n(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \leq \\ &\leq c \left[\left| \hat{P}_n(t) \right| \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1 - t_j)^{\frac{1}{4}}}{t - t_j} \Delta t_j + \left| (1 - t)\hat{P}_n^{1,0}(t) \right| \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1 - t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t - t_j} \Delta t_j \right] = \\ &= A_{21}^{(1)} + A_{21}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Оценим $A_{21}^{(1)}$. В силу неравенства

$$(1 - t_j)^{1/4} \leq (1 - t)^{1/4} + (t - t_j)^{1/4}$$

и (2.9) получаем

$$A_{21}^{(1)} \leq c \left| \hat{P}_n(t) \right| \left[(1 - t)^{1/4} \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t - t_j} + \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t - t_j)^{\frac{3}{4}}} \right] \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \left[\int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\xi}{t-\xi} + \delta_N n^2 + |\hat{P}_n(t)| \left(\int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\zeta}{(t-\zeta)^{3/4}} + \delta_N n^{3/2} \right) \right] \leq \\
&\leq c \left[\ln \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} + (t+1/2)^{1/4} |\hat{P}_n(t)| \right] \leq c [\ln(n+1) + |\hat{P}_n(t)|].
\end{aligned}$$

Отсюда в силу следствия 2.1 имеем

$$A_{21}^{(1)} \leq c [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)|]. \quad (4.10)$$

Далее, так как для $-1/2 \leq t_j \leq t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$

$$(3/2)^{-1/4} \leq (1-t_j)^{-1/4} \leq \left(1-t + \frac{\sqrt{1-t}}{n}\right)^{-1/4} \leq (1-t+2n^{-2})^{-1/4},$$

то

$$A_{21}^{(2)} \leq c \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} \leq c \left[\int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\xi}{t-\xi} + \delta_N n^2 \right] \leq c \ln(n+1). \quad (4.11)$$

Из (4.9)–(4.11) вытекает

$$A_{21} \leq c [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)|]. \quad (4.12)$$

Кроме того, для $-1/2 \leq t_j \leq t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$ имеем $t-t_j \leq 1-t_j$. Отсюда и в силу (2.2), (2.9), (3.3) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ получаем

$$\begin{aligned}
A_{22} &\leq c(a, b) \delta_N^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t-t_j} \Delta t_j \leq c(a, b) \delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{\frac{5}{4}}} \leq \\
&\leq c(a, b) \delta_N^{\frac{1}{2}} n^2 \left[\int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\xi}{(t-\xi)^{5/4}} + \delta_N n^{5/2} \right] \leq c(a, b) \delta_N^{\frac{1}{2}} n^{\frac{5}{2}} \leq c(a, b).
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Аналогично доказываются оценки

$$A_{2i} \leq c(a, b) \quad (i = 3, 5, 6). \quad (4.14)$$

Далее находим

$$A_{24} \leq c(a, b) \delta_N n^{7/2} \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}} \leq c(a, b) \delta_N n^4 \leq c(a, b) n^{-1}. \quad (4.15)$$

Такую же оценку допускает и A_{27} . Отсюда и из (4.8), (4.12)–(4.15) получаем

$$A_2 \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)|]. \quad (4.16)$$

Посредством аналогичных рассуждений, с помощью которых была получена оценка A_2 , нетрудно показать, что

$$A_4 \leq \sum_{y_2 \leq t_j < 1} \left| \frac{\hat{p}_{n+1,N}(t) \hat{p}_{n,N}(t_j) - \hat{p}_{n,N}(t) \hat{p}_{n+1,N}(t_j)}{t-t_j} \right| \Delta t_j \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)|]. \quad (4.17)$$

Оценим A_3 . В силу (2.7) при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем

$$\begin{aligned}
 A_3 &\leq \sum_{k=0}^n |\hat{p}_{k,N}(t)| \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} |\hat{p}_{k,N}(t_j)| \Delta t_j \leq c(a, b) \sum_{k=0}^n |\hat{p}_{k,N}(t)| \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} (1 - t_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \leq \\
 &\leq c(a, b) \sum_{k=0}^n |\hat{p}_{k,N}(t)| \frac{y_2 - y_1}{(1 - y_2)^{1/4}} \leq c(a, b).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Собираем оценки (4.7), (4.16)–(4.18) и, сопоставляя их с (4.1), находим

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|], \tag{4.19}$$

где $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$.

Случай 2) $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$. Чтобы оценить $L_{n,N}(t)$ при $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$, разобьем сумму в правой части равенства (1.5) по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
 L_{n,N}(t) &\leq \sum_{-1 \leq t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq 1 - n^{-2}} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \\
 &+ \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j < 1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j = B_1 + B_2 + B_3.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Суммы B_1 и B_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для A_1 , A_2 , и A_3 . В частности, при $n = O(\delta_N^{-1/5})$ имеем

$$B_1 \leq c(a, b) [|\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|], \tag{4.21}$$

$$B_2 \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)|]. \tag{4.22}$$

Что касается B_3 , то, воспользовавшись оценкой (2.6), имеем

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j < 1} \left| \sum_{k=0}^n \hat{p}_{k,N}(t) \hat{p}_{k,N}(t_j) \right| \Delta t_j \leq c(a, b) \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j < 1} \left| \sum_{k=0}^n k \right| \Delta t_j \leq \\
 &\leq c(a, b) n^2 \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j < 1} \Delta t_j \leq c(a, b).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Из (4.20)–(4.23) получаем

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|] \quad (1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1). \tag{4.24}$$

Сопоставляя (4.19) и (4.24), убеждаемся в справедливости теоремы 4.1 в случае, когда $0 \leq t \leq 1$. Далее, посредством аналогичных рассуждений, такую же оценку можно получить и для случая, когда $-1 \leq t \leq 0$.

Остается рассмотреть вопрос о точности полученной оценки для $L_{n,N}(t)$. Для доказательства воспользуемся аналогичными рассуждениями [14]. Во-первых, очевидно,

$$L_{n,N}(t) \geq S_{n,N}(1; t) = 1. \tag{4.25}$$

Далее, если $T_n(t) = \cos(n \arccos t) = 2^{n-1} t^n + \dots$, то

$$|S_{n-1,N}(T_{n+2}; t)| = |S_{n+2,N}(T_{n+2}; t) - \sum_{j=0}^{N-1} T_{n+2}(t_j) \hat{p}_{n+2,N}(t_j) \hat{p}_{n+2,N}(t) \Delta t_j -$$

$$- \sum_{j=0}^{N-1} T_{n+2}(t_j) \hat{p}_{n+1,N}(t_j) \hat{p}_{n+1,N}(t) \Delta t_j - \sum_{j=0}^{N-1} T_{n+2}(t_j) \hat{p}_{n,N}(t_j) \hat{p}_{n,N}(t) \Delta t_j \quad (n+2 \leq N-1). \quad (4.26)$$

Так как $|S_{n+2,N}(T_{n+2}; t)| = |T_{n+2}(t)| \leq 1$ и в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\sum_{j=0}^{N-1} |T_{n+2}(t_j) \hat{p}_{i,N}(t_j)| \Delta t_j \leq \left(\sum_{j=0}^{N-1} T_{n+2}^2(t_j) \Delta t_j \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{i,N}^2(t_j) \Delta t_j \right)^{1/2} \leq 1, i = n, n+1,$$

то из (4.26) следует

$$L_{n,N}(t) \geq 2^{n+1} k_{n+2,N}^{-1} |\hat{p}_{n+2,N}(t)| - |\hat{p}_{n+1,N}(t)| - |\hat{p}_{n,N}(t)| - 1. \quad (4.27)$$

В частности, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} A'_{21} &= |\hat{P}_n(t)| \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{\frac{1}{4}}}{t-t_j} \Delta t_j + |(1-t) \hat{P}_n^{1,0}(t)| \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t-t_j} \Delta t_j \geq \\ &\geq c \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} = c \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_{j+1}} \frac{t-t_{j+1}}{t-t_j} \geq c \left(1 - \frac{\delta_N}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln 2]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее, в силу следствия 2.2 и поскольку относительно меры, рассматриваемой в данной работе, старший коэффициент многочлена (1.1) имеет порядок 2^n , то из (4.25), (4.27)–(4.28) вытекает существование такой константы $c > 0$, что при всех $t \in [-1, 1]$

$$L_{n,N}(t) \geq c [\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(t)| + |\hat{p}_{n+1,N}(t)|],$$

из которого и следует неулучшаемость по порядку полученной оценки сверху для константы Лебега.

Кроме того, отметим, что из (2.3) при условии $n = O(\delta_N^{-1/5})$ для $\hat{p}_{n,N}(t)$ допустима оценка

$$|\hat{p}_{n,N}(t)| \leq c(a, b) \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-t^2})^{\frac{1}{2}} + 1}.$$

Ясно, что такая же оценка справедлива и для $\hat{p}_{n+1,N}(t)$. Отсюда и из теоремы 4.1 непосредственно вытекает

Теорема 4.2. Пусть $f \in C[-1, 1]$, $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{1/2}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. Тогда равномерно относительно $-1 \leq t \leq 1$ справедлива оценка

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) \left(\ln(n+1) + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-t^2})^{\frac{1}{2}} + 1} \right).$$

Из теоремы 4.2 и из (1.4) вытекает

Теорема 4.3. Пусть $f \in C[-1, 1]$, $0 < b < 1$, $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\alpha_1} \right\}^{1/2}$, $n = O(\delta_N^{-1/5})$. Тогда справедлива оценка $(-1 \leq t \leq 1)$

$$|f(t) - S_{n,N}(f, t)| \leq c(a, b) E_n(f) \left(\ln(n+1) + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-t^2})^{\frac{1}{2}} + 1} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сеге Г. *Ортогональные многочлены* (Физматгиз, М., 1962).
- [2] Rau H. *Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen*, J. Math. **161**, 237–254, (1929).
- [3] Gronwall T. *Über die Laplacische Reihe*, Math. Ann. **74**, 213–270, (1913).
- [4] Агаханов С.А., Натансон Г.И. *Приближение функций суммами Фурье–Якоби*, ДАН СССР. **166** (1), 9–10 (1966).
- [5] Агаханов С.А., Натансон Г.И. *Функция Лебега сумм Фурье–Якоби*, Вестн. Ленинградск. ун-та. Сер. Матем., Механ. и астрон. № 1, 11–23 (1968).
- [6] Шарапудинов И.И. *О сходимости метода наименьших квадратов*, Матем. заметки. **53** (3), 131–143 (1993).
- [7] Нурмагомедов А.А. *Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках*, Изв. Саратовск. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. Информатика. 11 (3; 2), 29–42 (2011).
- [8] Нурмагомедов А.А. *Сходимость сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках*, Изв. вузов. Матем., № 7, 60–62 (2012).
- [9] Коркмасов Ф.М. *Аппроксимативные свойства средних Валле–Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби*, Сиб. матем. журн., **45** (2), 334–355 (2004).
- [10] Шарапудинов И.И. *Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения* (Махачкала : Дагестанск. научн. центр РАН, 2004).
- [11] Шарапудинов И.И. *Об ограниченности в $C[-1, 1]$ средних Валле–Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышева*, Матем. сб. **187** (1), 143–160 (1996).
- [12] Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов* (Ин. лит., М., 1963).
- [13] Бадков В.М. *Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби*, Сиб. матем. журн. **9** (6), 1263–1283 (1968).
- [14] Бадков В.М. *Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам*, Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах (УНЦ АН СССР, Свердловск, 1987).
- [15] Шакиров И.А. *Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа*, Изв. вузов. Матем. №10, 80–88 (2011).

Алим Алаутдинович Нурмагомедов

Дагестанский государственный аграрный университет им. М.М. Джамбулатова,

ул. М. Гаджиева, д. 180, г. Махачкала, 367032, Россия,

e-mail: alimn@mail.ru

A.A. Nurmagomedov

The approximation of functions by partial sums of the Fourier series in polynomials orthogonal on arbitrary grids

Abstract. For arbitrary continuous function $f(t)$ on the segment $[-1, 1]$ we construct discrete sums by Fourier $S_{n,N}(f, t)$ on system polynomials forming an orthonormals system on any finite non-uniform set $T_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ of N points from segment $[-1, 1]$ with weight $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Approximation properties of the constructing partial sums $S_{n,N}(f, t)$ order $n \leq N - 1$ are investigated. Namely a two-sided pointwise estimate is obtained for the Lebesgue function $L_{n,N}(t)$ discrete Fourier sums for $n = O(\delta_N^{-1/5})$, $\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j$. Coherently also is investigated the question of the convergence of $S_{n,N}(f, t)$ to $f(t)$. In particular, we obtain the estimation deflection partial sums $S_{n,N}(f, t)$ from $f(t)$ for $n = O(\delta_N^{-1/5})$ which is depended on n and position of a point t on the $[-1, 1]$.

Keywords: polynomial, orthogonal system, asymptotic formula, discrete Fourier sums, Lebesgue function.

Alim Alautdinovich Nurmagomedov

M.M. Dzhambulatov Dagestan State Agrarian University,

180 M. Gadzhiev str., Makhachkala, 367032 Russia,

e-mail: alimn@mail.ru