Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Маликов, Дубакина, Численные способы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 74–86

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-74-86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:52:48

А.И. МАЛИКОВ, Д.И. ДУБАКИНА

ЧИСЛЕННЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ МАТРИЧНЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

Аннотация. Для линейных и нелинейных систем с неопределенными возмущениями ряд задач анализа динамики, оценивания фазового состояния, синтеза управления могут быть сведены к задачам оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами. Предлагаются численные способы решения таких задач путем их дискретизации на рассматриваемом интервале и сведения к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде линейных матричных неравенств. Эти способы в отличие от существующих в литературе гарантируют выполнение дифференциальных ограничений и позволяют определять коэффициенты усиления управления не только в точках дискретизации, но и во всех промежуточных точках рассматриваемого интервала времени.

Ключевые слова: оценивание состояния, дифференциальное линейное матричное неравенство, задача оптимизации, численное решение, синтез управления.

УДК: 519.688: 519.85

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-74-86

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря развитию за последние 20 лет техники полуопределенного программирования и созданию на ее основе эффективных решателей задач оптимизации с линейными матричными неравенствами (ЛМН) [1], [2], многие задачи анализа динамики, оценивания состояния, и синтеза управления линейных автономных систем, были решены путем их сведения к задачам оптимизации с ЛМН [3]. В последние годы для линейных неавтономных систем активно развиваются методы анализа устойчивости, ограниченности на конечном интервале времени и синтеза управления, основанные на технике дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) [4]. Также на основе метода матричных систем сравнения и техники ДЛМН в [5], [6] предложены способы оценивания состояния, анализа устойчивости и ограниченности относительно заданных множеств, нахождения инвариантных эллипсоидов и синтеза управления в виде обратной связи по состоянию для неавтономных нелинейных липшицевых систем. Задачи синтеза наблюдателей состояния, синтеза управлений, обеспечивающих ограниченность относительно заданных множеств, подавление начальных отклонений и неопределенных внешних возмущений тоже сводятся к задачам оптимизации

Поступила в редакцию 08.04.2019, после доработки 01.12.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01045а).

с ДЛМН [7]–[9]. Для применения разработанных методов к конкретным системам нужны эффективные алгоритмы и программное обеспечение для численного решения задач оптимизации с ДЛМН. Следует отметить, что в литературе этой проблеме не уделено достаточного внимания. Ранее в [4], [10] для случая автономных систем были предложены способы численного решения, основанные на разностной аппроксимации производной матричной функции в дискретные моменты времени. Однако они не обеспечивали выполнения ограничений в виде дифференциальных матричных неравенств в промежуточных точках.

В работе предлагаются численные способы и алгоритмы решения задач оптимизации с ограничениями в виде ДЛМН как для автономных, так и неавтономных систем. Они основаны на применении различных способов разностной аппроксимации производных для дискретизации ДЛМН на равномерной сетке по времени, в результате чего исходная задача представляется в виде совокупности взаимосвязанных задач оптимизации с ЛМН. Далее с применением современного программного обеспечения последовательно находятся решения этих задач с сохранением симметричности и положительной определенности численного решения и отрицательной определенности ДЛМН как в точках дискретизации, так и во всех промежуточных точках рассматриваемых интервалов времени. На простых примерах анализируются особенности и предлагаются подходы к выбору шага дискретизации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ДЛМН

$$-dQ(t)/dt + AQ(t) + Q(t)A^T + BY(t) + Y^T(t)B^T + \alpha Q(t) + DD^T/\alpha \leq 0, \quad (1)$$

где A, B, D — заданные $n \times n$ -, $n \times m$ -, $n \times r$ -матрицы, в общем случае зависящие от времени, $Q(t), Y(t)$ — искомые $n \times n$ -, $m \times n$ -матричные функции, $Q(t_0) \geq Q_0$, Q_0 — заданная положительно определенная $n \times n$ -матрица, $\alpha > 0$ — параметр, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T = \text{const}$ — длина рассматриваемого интервала времени.

Ставится **задача оптимизации 1**:

$$\text{trace}(Q(t)) \rightarrow \min$$

при ограничениях (1) и

$$Q(t_0) \geq Q_0, Q(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (2)$$

К такой задаче сводится [4], [5] задача синтеза управления в виде обратной связи по состоянию $u(t) = K(t)x(t)$ для линейной системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u(t) + D(t)w(t), \quad (3)$$

обеспечивающего в каждый момент времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ оптимальное подавление начальных отклонений из заданного эллипсоида

$$x(t_0) = x_0 \in E(Q_0) = \{x \in R^n : x^T Q_0^{-1} x \leq 1\}$$

и неопределенных возмущений $w(t)$, ограниченными по норме:

$$\|w(t)\| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (4)$$

Если $Q(t) > 0$, $Y(t) = K(t)Q(t)$ — решение задачи оптимизации 1, то матрица коэффициентов усиления $K(t)$ определится как $K(t) = Y(t)Q^{-1}(t)$, а матрица $Q(t) > 0$ будет определять эллипсоид, ограничивающий состояния исходной системы (3) с начальными данными $x_0 \in E(Q_0)$ при всех допустимых возмущениях из (4) (эволюционирующий во времени инвариантный эллипсоид $E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t)x \leq 1\}$).

Напомним, инвариантным эллипсоидом для динамической системы (3) называется эллипсоид

$$E(Q(t)) = \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t)x \leq 1\}, \quad Q(t) > 0,$$

обладающий следующим свойством: любая траектория $x(t, t_0, x_0)$ системы (3), исходящая из точки $x(t_0) = x_0 \in E(Q(t_0))$, в любой момент времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ принадлежит этому эллипсоиду, т. е. $x(t, t_0, x_0) \in E(Q(t))$.

К подобной задаче оптимизации с ДЛМН ограничениями также сводятся задачи синтеза управления, обеспечивающего ограниченность на конечном интервале относительно заданных в виде эллипсоидов множеств начальных отклонений из $E(R_0)$ и допустимых траекторий $E(R(t))$ ($R_0, R(t)$ — заданные положительно определенные матрицы) линейной автономной системы [4], системы с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями [5]; задачи нахождения минимального эволюционирующего инвариантного эллипсоида автономных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями [5]. Также к оптимизации с ДЛМН сводятся задачи синтеза управления в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающему на конечном интервале H_∞ -свойство при неопределенных возмущениях [6], синтеза наблюдателей состояния и неизвестных входов нелинейных систем [7]–[9].

При этом могут учитываться дополнительные ограничения в виде ЛМН. В частности, ограничение на управление $u^T Z^{-1}u \leq 1$, где Z — заданная положительно определенная матрица, может быть учтено в виде ЛМН

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5)$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ДЛМН. АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТЬЮ

2.1. Случай автономной системы. Пусть матрицы A, B, D исходной системы (3) не зависят от времени, а пара (A, B) управляема.

При численном решении задачи оптимизации с ДЛМН проводится дискретизация на рассматриваемом интервале $[t_0, t_0 + T]$. Используются итерационные формулы разностной аппроксимации производных. При замене производной dQ/dt в момент $t_k = t_0 + kh$ левой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $k = 1, \dots, N$, h — шаг дискретизации ($h = T/N$), ДЛМН (1) в момент времени $t_k = t_0 + kh$ представляется как

$$Q_{k-1} - Q_k + h(AQ_k + Q_k A^T + BY_k + Y_k^T B^T + \alpha Q_k + DD^T/\alpha) \leq 0, \quad (6)$$

где индекс k указывает, что значения соответствующей матрицы или переменной берется в момент t_k , Q_{k-1} — матрица, определяемая на предыдущем шаге, причем $Q(t_0) \geq Q_0$ (Q_0 — матрица, заданная в условии (2)). А при замене производной dQ/dt в момент $t_{k-1} = t_0 + (k-1)h$ правой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_{k-1}} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $k = 1, \dots, N$, ДЛМН (1) в момент времени t_k представляется как

$$Q_{k-1} - Q_k + h(AQ_{k-1} + Q_{k-1} A^T + BY_{k-1} + Y_{k-1}^T B^T + \alpha Q_{k-1} + DD^T/\alpha) \leq 0. \quad (7)$$

Точность метода на каждом шаге составляет h^2 . Матрицы Q_k, Y_k , $k = 1, \dots, N$, вычисляются в результате решения на k -м шаге при фиксированных значениях α **задачи оптимизации 2:**

минимизировать $\text{trace}(Q_k)$
при ограничениях $Q_k > 0$ и ЛМН (5)–(7).

Для этого используется программное обеспечение CVX или другие решатели задач полу-определенного программирования.

Пусть Q_k, Y_k , $k = 1, \dots, N$, — решение задачи оптимизации 2. По найденным значениям Q_k, Y_k , $k = 1, \dots, N$, при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ определяются матричные функции

$$Q(t) = [(t - t_{k-1})Q_k + (t_k - t)Q_{k-1}]/h, \quad Y(t) = [(t - t_{k-1})Y_k + (t_k - t)Y_{k-1}]/h. \quad (8)$$

Справедлива

Теорема. *Определенные в (8) матричные функции $Q(t), Y(t)$ непрерывны, кусочно-дифференцируемы и удовлетворяют ДЛМН (1), а также ЛМН (2) и (5).*

Доказательство. $Q(t) > 0$, поскольку $Q_k > 0$, $k = 1, \dots, N$. Подставим (8) в левую часть ДЛМН (1), после перегруппировки членов получаем

$$Q_{k-1} - Q_k + (t - t_{k-1})(AQ_k + Q_k A^T + \alpha Q_k + BY_k + Y_k^T B^T) + (t_k - t)(AQ_{k-1} + Q_{k-1} A^T + \alpha Q_{k-1} + BY_{k-1} + Y_{k-1}^T B^T) + hDD^T/\alpha = \Phi(t). \quad (9)$$

Легко видеть, что матричная функция $\Phi(t)$ из (9) представляет собой сумму левых частей неравенств (6), (7), умноженных соответственно на неотрицательные при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ величины $(t - t_{k-1})/h$ и $(t_k - t)/h$. Поэтому $\Phi(t) \leq 0$ при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и всех $k = 1, \dots, N$. А это означает, что матрицы $Q(t), Y(t)$, определенные в (8), удовлетворяют ДЛМН (1) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Если при решении задачи оптимизации 2 учитывается ограничение на управление (5), которое рассматривается в моменты времени t_{k-1}, t_k :

$$\begin{bmatrix} Z & Y_{k-1} \\ Y_{k-1}^T & Q_{k-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Z & Y_k \\ Y_k^T & Q_k \end{bmatrix} \geq 0,$$

то матричные функции $Q(t), Y(t)$, определенные в (8), будут удовлетворять ЛМН (5) при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, так как

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Z & Y(t) \\ Y^T(t) & Q(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z & [(t - t_{k-1})Y_k + (t_k - t)Y_{k-1}]/h \\ [(t - t_{k-1})Y_k + (t_k - t)Y_{k-1}]^T/h & [(t - t_{k-1})Q_k + (t_k - t)Q_{k-1}]/h \end{bmatrix} = \\ &= \frac{t - t_{k-1}}{h} \begin{bmatrix} Z & Y_k \\ Y_k^T & Q_k \end{bmatrix} + \frac{t_k - t}{h} \begin{bmatrix} Z & Y_{k-1} \\ Y_{k-1}^T & Q_{k-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Теорема позволяет заменить решение задачи оптимизации 1 субоптимальным решением (8), получаемым по решениям взаимосвязанной совокупности задач оптимизации 2 в дискретные моменты времени. Это субоптимальное решение будет зависеть от шага дискретизации. Однако, если оно будет получено в результате решения взаимосвязанной совокупности задач оптимизации 2 при каком-либо шаге, то приближенное решение (8) будет удовлетворять всем ограничениям задачи 1 на всем рассматриваемом интервале.

Отметим, что способы численного решения задач оптимизации, представленные в [4], [10], использовали замену производной либо только левой, либо только правой конечной разностью. В результате задача сводилась к совокупности задач оптимизации либо с ограничением (6), либо с ограничением (7), что не обеспечивало выполнения ограничения (1) и не позволяло найти коэффициенты усиления $K(t)$ в промежуточных точках $t \in (t_{k-1}, t_k)$.

В качестве примера рассмотрим систему второго порядка, представленную уравнением (3) с постоянными коэффициентами, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1866 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3638 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1667 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 8.54 & -3.42 \\ -3.42 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad Z = 6.$$

Рис. 1

Для синтеза управления в виде обратной связи по состоянию $u(t) = K(t)x(t)$ решалась задача оптимизации 2 на интервале $[0, 10]$ при различных значениях шага дискретизации h .

На рис. 1 показано изменение критерия оптимизации $\text{trace}(Q(t))$ в зависимости от времени при соответствующих значениях h . Учитывая, что $\text{trace}(Q(t))$ характеризует степень подавления с помощью управления начальных отклонений и неопределенных внешних возмущений, можно отметить, что наибольшее убывание критерия происходит в начале интервала при наименьших значениях h . После первой секунды и до середины интервала наименьшее значение критерия достигается при $h=0.25$, а на второй половине интервала — при $h=0.5$.

2.2. Случай неавтономной системы. Пусть элементы матрицы $A(t), B(t), D(t)$ исходной системы (2) являются непрерывными функциями времени, а пара $(A(t), B(t))$ управляема при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$. Предположим также, что при любых $t', t'' \in [t_0, t_0 + T]$ матричные функции $A(t), B(t), D(t)$ удовлетворяют или равномерной ограниченности производных по времени (при дифференцируемости), или условию Липшица

$$\|A(t') - A(t'')\| \leq l_A |t' - t''|, \quad \|B(t') - B(t'')\| \leq l_B |t' - t''|, \quad \|D(t') - D(t'')\| \leq l_D |t' - t''|, \quad (10)$$

где l_A, l_B, l_D — известные положительные константы.

В результате дискретизации и замены производной dQ/dt левой и правой конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $(dQ/dt)_{t=t_{k-1}} \approx (Q_k - Q_{k-1})/h$, $k = 1, \dots, N$, исходная задача оптимизации с ДЛМН аппроксимируется в дискретные моменты времени $t_k, k = 1, \dots, N$, следующей **задачей оптимизации 3**:

минимизировать $\text{trace}(Q_k)$
при ограничениях $Q_k > 0$ и ЛМН (11)–(14):

$$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_k Q_k + Q_k A_k^T + B_k Y_k + Y_k^T B_k^T + D_k D_k^T / \alpha + \alpha Q_k \leq 0, \quad (11)$$

$$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_{k-1} Q_{k-1} + Q_{k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k-1}^T + D_{k-1} D_{k-1}^T / \alpha + \alpha Q_{k-1} \leq 0, \quad (12)$$

$$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_k Q_{k-1} + Q_{k-1} A_k^T + B_k Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_k^T + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_{k-1} \leq 0, \quad (13)$$

$$\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + A_{k-1} Q_k + Q_k A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_k + Y_k^T B_{k-1}^T + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_k \leq 0, \quad (14)$$

где индекс k указывает, что значение соответствующей матрицы или переменной берется в момент t_k , Q_{k-1} — матрица, определяемая на предыдущем шаге, причем $Q(t_0) \geq Q_0$.

Пусть Q_k, Y_k , $k = 1, \dots, N$, — решение задачи оптимизации 3. По найденным значениям Q_k, Y_k , $k = 1, \dots, N$, по выражениям из (8) определим матричные функции $Q(t), Y(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$. С учетом условия (10) при надлежащем выборе шага дискретизации h матрицы $A(t), B(t), D(t)$ могут быть с достаточной точностью аппроксимированы на интервале $[t_{k-1}, t_k]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t) &\cong \frac{t - t_k}{h} A_k + \frac{t_k - t}{h} A_{k-1}, \quad B(t) \cong \frac{t - t_k}{h} B_k + \frac{t_k - t}{h} B_{k-1}, \\ D(t) &\cong \frac{t - t_k}{h} D_k + \frac{t_k - t}{h} D_{k-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив $Q(t), Y(t)$ и выражения (15) в ДЛМН (1), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + \left[\frac{t - t_k}{h} A_k + \frac{t_k - t}{h} A_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} Q_k + \frac{t_k - t}{h} Q_{k-1} \right] + \\ &+ \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} Q_k + \frac{t_k - t}{h} Q_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_k}{h} A_k + \frac{t_k - t}{h} A_{k-1} \right]^T + \\ &+ \left[\frac{t - t_k}{h} B_k + \frac{t_k - t}{h} B_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} Y_k + \frac{t_k - t}{h} Y_{k-1} \right] + \\ &+ \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} Y_k + \frac{t_k - t}{h} Y_{k-1} \right]^T \left[\frac{t - t_k}{h} B_k + \frac{t_k - t}{h} B_{k-1} \right]^T + \\ &+ \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} \alpha + \frac{t_k - t}{h} \alpha \right] \times \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} Q_k + \frac{t_k - t}{h} Q_{k-1} \right] + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} D_k + \frac{t_k - t}{h} D_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{h} D_k + \frac{t_k - t}{h} D_{k-1} \right]^T = \\ &= \frac{Q_{k-1} - Q_k}{h} + \frac{(t - t_{k-1})^2}{h^2} (A_k Q_k + Q_k A_k^T + B_k Y_k + Y_k^T B_k^T + D_k D_k^T / \alpha + \alpha Q_k) + \\ &+ \frac{(t_k - t)^2}{h^2} (A_{k-1} Q_{k-1} + Q_{k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k-1}^T + D_{k-1} D_{k-1}^T / \alpha + \alpha Q_{k-1}) + \\ &+ \frac{(t - t_{k-1})(t_k - t)}{h^2} \left(A_k Q_{k-1} + Q_{k-1} A_k + B_k Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_k^T + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_k \right) + \\ &+ \frac{(t - t_{k-1})(t_k - t)}{h^2} \left(A_{k-1} Q_k + Q_k A_{k-1} + B_{k-1} Y_k + Y_k^T B_{k-1}^T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_k D_{k-1}^T + D_{k-1} D_k^T}{2\alpha} + \alpha Q_k \right) = \Psi(t). \quad (16) \end{aligned}$$

Рис. 2

Легко видеть, что матричную функцию $\Psi(t)$ из (16) можно получить сложением левых частей неравенств (11)–(12), умноженных соответственно на неотрицательные величины $\frac{(t-t_{k-1})^2}{h^2}$, $\frac{(t_k-t)^2}{h^2}$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$, и (13)–(14), умноженных на неотрицательную величину $\frac{(t-t_{k-1})(t_k-t)}{h^2}$. Поэтому $\Psi(t) \leq 0$ при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и всех $k = 1, \dots, N$. Таким образом, убеждаемся, что матричные функции $Q(t), Y(t)$, определенные в (8), удовлетворяют при всех $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ и всех $k = 1, \dots, N-1$. А это означает, что матричные функции $Q(t), Y(t)$, определенные в (8), удовлетворяют ДЛМН (1) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Рассмотрим пример из п. 2.1, в котором у матрицы A элемент a_{21} зависит от времени и задается как $a_{21}(t) = -0.6 + \sin(\pi/2 + t)$, а все остальные элементы матрицы имеют прежние значения. В результате численного решения задачи оптимизации 3 получены приближенные значения матричных функций $Q(t), Y(t)$ в моменты $t_k, k = 1, \dots, N$. На рис. 2 показаны изменения критерия оптимизации $\text{trace}(Q(t))$ в зависимости от времени при соответствующих значениях h .

Как отмечалось выше, при выборе шага дискретизации имеет важное значение точность аппроксимации матричных функций $A(t), B(t), D(t)$. Поэтому для аппроксимации функции $a_{21}(t) = -0.6 + \sin(\pi/2 + t)$ с точностью 0.001 надо брать шаг $h < 0.03$. Как видно из рис. 2, графики изменения $\text{trace}(Q(t))$, полученные при $h = 0.025$ и $h = 0.01$, практически совпадают. Проверено также, что графики изменения $\text{trace}(Q(t))$ совпадают при дальнейшем уменьшении h .

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТЬЮ

3.1. Случай автономной системы. Заменим в (1) производную центральной конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_{k+1} - Q_{k-1})/2h$. Точность метода при такой дискретизации на каждом шаге, как известно, составляет h^3 . При этом будет справедливо соотношение

$$Q_k = (Q_{k-1} + Q_{k+1})/2. \quad (17)$$

ДЛМН (1) заменяется в дискретные моменты времени на ЛМН (18), (19):

$$Q_{k-1} - Q_{k+1} + 2h(AQ_{k+1} + Q_{k+1}A^T + BY_{k+1} + Y_{k+1}^TB^T + \alpha Q_{k+1} + DD^T/\alpha) \leq 0, \quad (18)$$

$$Q_{k-1} - Q_{k+1} + 2h(AQ_{k-1} + Q_{k-1}A^T + BY_{k-1} + Y_{k-1}^TB^T + \alpha Q_{k-1} + DD^T/\alpha) \leq 0. \quad (19)$$

В результате задача оптимизации 1 в точках дискретизации аппроксимируется **задачей оптимизации 4**:

минимизировать $\text{trace}(Q_{k+1})$

при ограничениях в виде ЛМН $Q_{k-1} > 0$, $Q_{k+1} > 0$, (18), (19) и (5), $k = 1, \dots, N$.

Далее по найденным значениям $Q_{k-1}, Y_{k-1}, Q_{k+1}, Y_{k+1}$, определяются матричные функции

$$Q(t) = ((t - t_{k-1})Q_{k+1} + (t_{k+1} - t)Q_{k-1})/2h, Y(t) = ((t - t_{k-1})Y_{k+1} + (t_{k+1} - t)Y_{k-1})/2h. \quad (20)$$

Покажем, что определенные в (20) матричные функции $Q(t), Y(t)$ удовлетворяют ЛМН $Q(t) > 0$, (5) и ДЛМН (1) при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, N$.

Так же, как в п. 2.1 убеждаемся, что если $Q_{k-1} > 0$ и $Q_{k+1} > 0$, то $Q(t)$ из (20) является положительно определенной матричной функцией и выполняется ограничение (5).

Теперь покажем, что матричные функции $Q(t), Y(t)$ удовлетворяют ДЛМН (1) при выполнении (18), (19). Подставляя $Q(t), Y(t)$ из (20) в левую часть ДЛМН (1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{k-1} - Q_k}{2h} + \frac{t - t_{k-1}}{2h} (AQ_{k+1} + Q_{k+1}A^T + \alpha Q_{k+1} + BY_{k+1} + Y_{k+1}^TB^T) + \\ & + \frac{t_{k+1} - t}{2h} (AQ_{k-1} + Q_{k-1}A^T + \alpha Q_{k-1} + BY_{k-1} + Y_{k-1}^TB^T) + DD^T/\alpha = \Phi(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Матричная функция $\Phi(t)$ из (21) представляет собой сумму левых частей неравенств (18), (19), умноженных на неотрицательные величины $\frac{t - t_{k-1}}{2h}$, $\frac{t_{k+1} - t}{2h}$ соответственно. Поэтому $\Phi(t) \leq 0$ для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, N$. В частности, при $t = t_k$ из (21) и $\Phi(t) \leq 0$ следует справедливость матричного неравенства

$$Q_{k-1} - Q_{k+1} + 2h(AQ_k + Q_kA^T + BY_k + Y_k^TB^T + \alpha Q_k + DD^T/\alpha) \leq 0,$$

в котором матрица Q_k удовлетворяет (17).

Таким образом, приближенное решение задач оптимизации с ДЛМН находится путем численного решения взаимосвязанной совокупности задач оптимизации с ЛМН последовательно на каждой итерации с использованием эффективных решателей задач полуопределенного программирования (YALMIP, SEDUMI, CVX).

Для примера из п. 2.1 с использованием программы CVX в пакете Matlab получено численное решение задачи оптимизации 4 при разных значениях h . На рис. 3 представлены графики изменения критерия оптимизации в зависимости от времени при соответствующих значениях h . Так же, как при аппроксимации левой и правой конечной разностью, наименьшее значение критерия оптимизации в начале интервала получается при значениях $h=0.05$ и $h=0.1$. После первой секунды и до середины интервала наименьшее значение критерия достигается при $h=0.25$, а на второй половине интервала — при $h=0.5$.

3.2. Случай неавтономной системы. Пусть элементы матрицы $A(t), B(t), D(t)$ исходной системы (2) являются непрерывными функциями времени и удовлетворяют условиям (10), а пара $(A(t), B(t))$ управляема при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

В результате дискретизации и замены производной dQ/dt центральной конечной разностью $(dQ/dt)_{t=t_k} \approx (Q_{k+1} - Q_{k-1})/2h$, $k = 1, \dots, N$, исходная задача оптимизации 1 с ДЛМН аппроксимируется в дискретные моменты времени $t_k, k = 1, \dots, N$, **задачей оптимизации 5**:

минимизировать $\text{trace}(Q_{k+1})$
при ограничениях $Q_{k-1} > 0$, $Q_{k+1} > 0$ и ЛМН (22)–(25):

$$\frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + A_{k+1}Q_{k+1} + Q_{k+1}A_{k+1}^T + B_{k+1}Y_{k+1} + Y_{k+1}^T B_{k+1}^T + \alpha Q_{k+1} + D_{k+1}D_{k+1}^T/\alpha \leq 0, \quad (22)$$

$$\frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + A_{k-1}Q_{k-1} + Q_{k-1}A_{k-1}^T + B_{k-1}Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k-1}^T + \alpha Q_{k-1} + D_{k-1}D_{k-1}^T/\alpha \leq 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + A_{k+1}Q_{k-1} + Q_{k-1}A_{k+1}^T + B_{k+1}Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k+1}^T + \frac{D_{k+1}D_{k-1}^T + D_{k-1}D_{k+1}^T}{2\alpha} + \\ &+ \alpha Q_{k-1} \leq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + A_{k-1}Q_{k+1} + Q_{k+1}A_{k-1}^T + B_{k-1}Y_{k+1} + Y_{k+1}^T B_{k-1}^T + \frac{D_{k+1}D_{k-1}^T + D_{k-1}D_{k+1}^T}{2\alpha} + \\ &+ \alpha Q_{k+1} \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Рис. 3

Здесь индексы $k+1$, $k-1$ указывают, что значения матриц берутся в моменты t_{k+1}, t_{k-1} соответственно, Q_{k-1} — матрица, определяемая на предыдущем шаге, причем $Q(t_0) \geq Q_0$.

Пусть $Q_{k-1}, Y_{k-1}, Q_{k+1}, Y_{k+1}$, $k = 1, \dots, N$, — решение задачи оптимизации 5. По найденным значениям $Q_{k-1}, Y_{k-1}, Q_{k+1}, Y_{k+1}$, $k = 1, \dots, N$, по выражениям из (20) определим матричные функции $Q(t), Y(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$. С учетом условия (10) при надлежащем выборе шага дискретизации h матрицы $A(t), B(t), D(t)$ могут быть с достаточной точностью аппроксимированы на интервале $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A(t) &\cong \frac{t - t_{k-1}}{2h} A_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} A_{k-1}, \quad B(t) \cong \frac{t - t_{k-1}}{2h} B_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} B_{k-1}, \\ D(t) &\cong \frac{t - t_{k-1}}{2h} D_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} D_{k-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставив выражения (26) и определенные в (20) матричные функции $Q(t)$, $Y(t)$ в ДЛМН (1), получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} A_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} A_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} Q_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} Q_{k-1} \right] + \\
 & + \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} Q_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} Q_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} A_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} A_{k-1} \right]^T + \\
 & + \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} B_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} B_{k-1} \right] \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} Y_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} Y_{k-1} \right] + \\
 & + \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} Y_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} Y_{k-1} \right]^T \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} B_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} B_{k-1} \right]^T + \\
 & + \alpha \frac{t - t_{k-1}}{2h} Q_{k+1} + \alpha \frac{t_{k+1} - t}{2h} Q_{k-1} + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} D_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} D_{k-1} \right] \times \\
 & \times \left[\frac{t - t_{k-1}}{2h} D_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} D_{k-1} \right]^T = \frac{Q_{k-1} - Q_{k+1}}{2h} + \frac{(t - t_{k-1})^2}{4h^2} (A_{k+1} Q_{k+1} + \\
 & + Q_{k+1} A_{k+1}^T + B_{k+1} Y_{k+1} + Y_{k+1}^T B_{k+1}^T + \alpha Q_{k+1} + D_{k+1} D_{k+1}^T / \alpha) + \frac{(t_{k+1} - t)^2}{4h^2} (A_{k-1} Q_{k-1} + \\
 & + Q_{k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k-1}^T + \alpha Q_{k-1} + D_{k-1} D_{k-1}^T / \alpha) + \frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t)}{4h^2} \times \\
 & \times \left[A_{k+1} Q_{k-1} + Q_{k-1} A_{k+1} + B_{k+1} Y_{k-1} + Y_{k-1}^T B_{k+1}^T + \alpha Q_{k-1} + \frac{D_{k+1} D_{k-1}^T + D_{k-1} D_{k+1}^T}{2\alpha} \right] + \\
 & + \frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t)}{4h^2} \left[A_{k-1} Q_{k+1} + Q_{k+1} A_{k-1} + B_{k-1} Y_{k+1} + Y_{k+1}^T B_{k-1}^T + \alpha Q_{k+1} + \right. \\
 & \left. + \frac{D_{k+1} D_{k-1}^T + D_{k-1} D_{k+1}^T}{2\alpha} \right] = \Psi(t). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{(t - t_{k-1})^2}{4h^2} + \frac{(t_{k+1} - t)^2}{4h^2} + 2 \frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t)}{4h^2} \right] (Q_{k-1} - Q_{k+1}) = \\
 & = \frac{(t_{k+1} - t + t - t_{k-1})^2}{4h^2} (Q_{k-1} - Q_{k+1}) = Q_{k-1} - Q_{k+1}, \\
 & \frac{(t - t_{k-1})^2}{4h^2} Q_{k+1} + \frac{(t_{k+1} - t)^2}{4h^2} Q_{k-1} + \frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t)}{4h^2} (Q_{k+1} + Q_{k-1}) = \\
 & = \frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t + t - t_{k-1})}{4h^2} Q_{k+1} + \frac{(t_{k+1} - t)(t_{k+1} - t + t - t_{k-1})}{4h^2} Q_{k-1} = \\
 & = \frac{t - t_{k-1}}{2h} Q_{k+1} + \frac{t_{k+1} - t}{2h} Q_{k-1},
 \end{aligned}$$

легко видеть, что матричную функцию $\Psi(t)$ из (27) можно получить сложением левых частей неравенств (22), (23), умноженных соответственно на неотрицательные при $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ величины $\frac{(t - t_{k-1})^2}{4h^2}$, $\frac{(t_{k+1} - t)^2}{4h^2}$, и (24), (25), умноженных на неотрицательную величину $\frac{(t - t_{k-1})(t_{k+1} - t)}{4h^2}$. Поэтому $\Psi(t) \leq 0$ при всех $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ и всех $k = 1, \dots, N - 1$.

Рис. 4

Таким образом, матричные функции $Q(t), Y(t)$, определенные в (20) по матрицам Q_{k-1}, Q_{k+1} и Y_{k-1}, Y_{k+1} , удовлетворяют ДЛМН (1) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Итак, исходная задача оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами сводится к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде ЛМН. Для их решения следует использовать существующие программные средства полуопределенного программирования (Robust control toolbox пакета Matlab, CVX и др.).

Для примера из п. 2.1, в котором у матрицы A элемент a_{21} зависит от времени и задан как в п. 2.2, с использованием программы CVX в пакете Matlab получено численное решение задачи оптимизации 5 и найдены приближенные значения матричных функций $Q(t), Y(t)$ в моменты $t_k, k = 1, \dots, N$. На рис. 4 представлены графики изменения $\text{trace}(Q(t))$ в зависимости от времени при соответствующих значениях h . Снова графики функции $\text{trace}(Q(t))$ практически совпадают при $h = 0.025$ и $h = 0.01$. Дальнейшее уменьшение шага дискретизации не приводит к какому-либо уточнению субоптимального решения, полученного при $h = 0.025$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием итерационных формул разностной аппроксимации производных предложены способы численного решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами путем их дискретизации на рассматриваемом интервале и сведения к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде линейных матричных неравенств. Для решения этих задач применяются существующие программные средства полуопределенного программирования. При этом в отличие от существующих они гарантируют удовлетворение ограничений не только в точках дискретизации, но и во всех промежуточных точках рассматриваемого интервала времени. Кроме того, они применимы как к автономным, так и неавтономным системам.

В автономном случае для наибольшего убывания критерия оптимизации следует в начале интервала использовать небольшой шаг, затем его можно увеличивать по мере прохождения второй четверти интервала.

В неавтономном случае при условии липшицевости параметров исходной системы или при равномерной ограниченности производной по времени параметров системы (ограниченности скорости их изменения) полученные приближенные решения за счет выбора шага дискретизации будут аппроксимировать решение исходной задачи оптимизации с требуемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM, Philadelphia, 1994).
- [2] Boyd S., Vandenberghe L. *Convex optimization* (Cambridge Univ. Pr., 2004).
- [3] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях* (ЛЕНАНД, М., 2014).
- [4] Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G. *Finite-time stability and control / Lect. Notes in Control and Information Sci.* (Springer, London, 2014).
- [5] Маликов А.И. *Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями*, Автоматика и телемеханика № 5, 19–36 (2016).
- [6] Маликов А.И. *Управление на конечном интервале нелинейных систем одного класса с H_∞ -критерием качества*, Изв. РАН. Теория и системы управления № 3, 25–46 (2017).
- [7] Маликов А.И. *Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями*, Автоматика и телемеханика № 5, 16–35 (2017).
- [8] Malikov A.I. *State and unknown inputs finite-time estimation for time-varying nonlinear lipschitz systems with uncertain disturbances*, IFAC-PapersOnLine **50** (1), 1439–1444 (2017).
- [9] Маликов А.И. *Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями*, Автоматика и телемеханика № 3, 21–43 (2018).
- [10] Guo Yang, Yao Yu, Wang Shiching, Yang Baoqing, Liu Kai, Zhao Xin. *Finite-time control with H -infinity constraints of linear time-invariant and time-varying systems*, J. Control Theory Appl. **11** (2), 165–172 (2013).

Александр Иванович Маликов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева—КАИ,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: a_i_malikov@mail.ru

Диана Игоревна Дубакина

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева—КАИ,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: dubakinadiana@gmail.com

A.I. Malikov and D.I. Dubakina

Numerical methods for solving optimization problems with differential linear matrix inequalities

Abstract. A number of problems for dynamic analyze, state estimation, and control design for linear and nonlinear system with uncertain disturbances can be reduced to optimization problems with differential linear matrix inequalities. The numerical methods are offered for solving such problems by discretization on the considered interval and reducing to the set of interconnected optimization problems at discrete points in time with constraints in the form of linear matrix inequalities. The proposed methods, in comparison with those existing in the literature, guarantee the fulfillment of the differential constraints and allow one to determine the control gain not only at the sampling points but at all points inside the considered time interval.

Keywords: state estimation, differential linear matrix inequalities, optimization problem, numerical solution, control design.

Alexander Ivanovich Malikov

*Kazan National Research Technical University Named after A.N. Tupolev—KAI,
10 K. Marx str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: a_i_malikov@mail.ru

Diana Igorevna Dubakina

*Kazan National Research Technical University Named after A.N. Tupolev—KAI,
10 K. Marx str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: dubakinadiana@gmail.com