Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Свойства и применения функции расстояния открытого подмножества в евклидовом пространстве, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 87–92

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-87-92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:56:22

Краткое сообщение

Ф.Г. АВХАДИЕВ

СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТКРЫТОГО ПОДМНОЖЕСТВА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Для открытого подмножества евклидова пространства размерности n последовательностями открытых множеств рассмотрены внутренние и внешняя аппроксимации. Доказаны сходимости всюду соответствующих последовательностей функций расстояния до границы множеств и сходимости почти всюду их градиентов. Как приложения получены новые неравенства типа Харди, содержащие скалярное произведение градиента пробной функции и градиента функции расстояния до границы заданного открытого подмножества евклидова пространства.

Ключевые слова: функция расстояния до границы области, теорема Радемахера, теорема Моцкина, аппроксимация открытого множества, выпуклая область, неравенство типа Харди.

УДК: 517.5: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-87-92

1. Введение. Пусть Ω — открытое множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Полагаем $x \cdot y$ и $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ — евклидово скалярное произведение и норма для точек $\mathbb{R}^n$ соответственно. Функция расстояния $\delta : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ определяется равенством

$$\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} |x - y|, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Эта функция хорошо изучена (см., например, [1], гл. 2.), она имеет базовое свойство

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (2)$$

По теореме Радемахера [2] (см., также [3]) липшицева функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является почти всюду дифференцируемой в Ω , поэтому функция расстояния не является дифференцируемой лишь на некотором множестве $S(\Omega)$ особых точек лебеговой меры нуль, а для всех $x \in \Omega \setminus S(\Omega)$ определен градиент $\nabla\delta(x)$ и

$$\delta(x+h) - \delta(x) = \nabla\delta(x) \cdot h + o(|h|) \quad \forall x \in \Omega \setminus S(\Omega), \quad x+h \in \Omega, \quad |h| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Из (1)–(3) легко следует (см., например, [1], с. 52)

$$|\nabla\delta(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega \setminus S(\Omega). \quad (4)$$

Поступила в редакцию 08.11.2019, после доработки 08.11.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00115).

Многомерные неравенства Харди содержат модули градиентов $|\nabla u(x)|$ пробных функций $u \in C_0^1(\Omega)$. В книге [1] и в ряде статей А.А. Балинского, И.В. Эванса и Р.Т. Льюиса предложены и доказаны новые неравенства, в которых вместо $\nabla u(x)$ используется скалярное произведение $\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)$. В силу (4) и неравенства Коши имеем

$$|\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)| \leq |\nabla u(x)|$$

для почти всех $x \in \Omega$. Следовательно, А.А. Балинский, И.В. Эванс и Р.Т. Льюис получают существенные усиления соответствующих неравенств Харди. Целью нашей работы является развитие этой новой тематики. Мы предлагаем новый метод, основанный на предварительной аппроксимации $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и изучении поведения функций расстояния для аппроксимирующих открытых множеств $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$.

2. Основные результаты. Усиливает и обобщает ряд результатов, принадлежащих М. Маркусу, В. Мицелю и Ю. Пинховеру [4], автору и И.К. Шафигуллину [5], [6], следующая

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, $n \geq 2$, и пусть $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $s \in (1, \infty)$, тогда справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)|^p dx}{\text{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} \geq \frac{(s-1)^p}{p^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p dx}{\text{dist}^s(x, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где постоянная $(s-1)^p/p^p$ является точной, т. е. максимальной из возможных на этом месте, для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Приведем усиление неравенства автора и К.-Й. Вирца из [7] (см., также, [8], [9]). Потребуются внутренний радиус $\delta_0(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega)$ и константа $\lambda_0 = 0.940\dots$, определяемая как первый положительный корень уравнения $J_0(t) - 2tJ_1(t) = 0$, где J_0 и J_1 — функции Бесселя порядка 0 и 1 соответственно.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область такая, что $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2 dx}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

где постоянная $1/4$ является точной, т. е. максимальной из возможных на этом месте, для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, а вторая постоянная $\lambda_0^2/\delta_0^2(\Omega)$ является оптимальной, т. е. существуют выпуклые области, для которых она также является точной.

Потребуется числовая характеристика $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а именно, евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$, определяемый равенством $M_0(\Omega) = \sup_A (2\pi)^{-1} \ln(R_A/r_A)$, где супремум берется по всем областям вида $A = A(b_A, r_A, R_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_A < |x - b_A| < R_A\}$, имеющим свойства $A \subset \Omega$; $b_A \in \partial\Omega$, $0 < r_A < R_A < \infty$. Если таких областей $A \subset \Omega$ не существует, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$ (ср. с [10]).

Результат автора из статей [5] и [11] усиливает

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $n \geq 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $s \in [n, \infty)$, тогда

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)|^p dx}{\text{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} \geq \frac{(s-n)^p}{p^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p dx}{\text{dist}^s(x, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где постоянная $(s-n)^p/p^p$ является оптимальной, а именно, постоянная $(s-n)^p/p^p$ является максимальной из возможных для любого открытого множества, обладающего свойством $M_0(\Omega) = \infty$.

Существенную роль в доказательствах теорем 1–3 играют аппроксимации, предложенные в статьях [4]–[16]. Для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ с носителем $K = \text{supp } u \subset \Omega$ мы сначала доказываем неравенства теорем 1–3 в "элементарных" множествах Ω_j ($\Omega_j \rightarrow \Omega$). Затем переходим к пределу при $j \rightarrow \infty$, пользуясь доказанными ниже леммами 1, 2 и теоремой Лебега о мажорированной сходимости интегралов по компакту $K = \text{supp } u \subset \Omega$.

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ будем рассматривать аппроксимации двух типов открытыми множествами $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, и изучать сходимость функций расстояния $\delta_j(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega_j)$ и их градиентов на произвольном компакте $K \subset \Omega$.

1) Внутренняя аппроксимация. Предполагаем, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j.$$

Отметим, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует число N такое, что $K \subset \Omega_j$ для любого $j \geq N$. Для простоты мы будем считать, что $K \subset \Omega_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

2) Внешняя аппроксимация. Предполагаем, что $\Omega = \text{int } \bar{\Omega}$ (т. е. Ω — множество внутренних точек своего замыкания $\bar{\Omega}$), $\Omega_1 \neq \mathbb{R}^n$, $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и

$$\bar{\Omega} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{\Omega}_j.$$

Справедливо следующее утверждение, относящееся к случаю внутренней аппроксимации.

Лемма 1. Пусть $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, где Ω и Ω_j — открытые множества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и пусть K — некоторый компакт. Обозначим $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $\delta_j(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega_j)$. Предположим, что $K \subset \Omega_j \subset \Omega_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы два утверждения:

(i) имеет место сходимость $\delta_j(x) \rightarrow \delta(x)$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно на компакте K , т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |\delta(x) - \delta_j(x)| = 0;$$

(ii) существует множество $S \subset K$ такое, что n -мерная лебегова мера $\text{mes}_n S = 0$ и в любой точке $x \in K \setminus S$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \nabla \delta_j(x) = \nabla \delta(x).$$

Имеет место и аналог леммы 1 для случая внешней аппроксимации.

Лемма 2. Пусть $\Omega = \text{int } \bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{\Omega}_j$, где Ω и Ω_j — открытые множества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, причем $\Omega_1 \neq \mathbb{R}^n$. Пусть далее K — некоторый компакт, $K \subset \Omega$. Обозначим $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $\delta_j(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega_j)$. Предположим, что $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) имеет место сходимость $\delta_j(x) \rightarrow \delta(x)$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно на компакте K , т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |\delta(x) - \delta_j(x)| = 0;$$

(ii) существует множество $S \subset K$ такое, что n -мерная лебегова мера $\text{mes}_n S = 0$ и в любой точке $x \in K \setminus S$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \nabla \delta_j(x) = \nabla \delta(x).$$

3. О доказательствах лемм 1 и 2. Пусть $P(x, \Omega) := \{x' \in \partial\Omega : \delta(x) = |x - x'|\}$, $x \in \Omega$. Очевидно, множество $P(x, \Omega)$ является непустым множеством для любой точки $x \in \Omega$. Согласно теореме, восходящей к К. С. Моцкину [17] (см., также [1], с. 52), функция расстояния является дифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда множество $P(x, \Omega)$ содержит только одну точку. Таким образом, $x \in S(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество $P(x, \Omega)$ содержит не менее двух точек.

Схема доказательства леммы 1. Для $x \in K$ последовательность $\delta_j(x)$ является неубывающей и $\delta_j(x) \leq \delta(x)$. Поэтому существует предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j(x) =: \delta_0 \leq \delta(x)$. Покажем, что $\delta_0 = \delta(x)$. Рассмотрим последовательность точек $x'_j \in P(x, \Omega_j)$ и ее подпоследовательность x'_{j_k} , сходящуюся к некоторой точке x'_0 при $k \rightarrow \infty$. Тогда $|x - x'_0| = \delta_0$. Очевидно, если $\delta_0 < \delta(x)$, то точка $x'_0 \in \Omega$. Следовательно, начиная с некоторого номера j , точка x'_0 вместе с некоторой окрестностью лежит в Ω_j , что противоречит выбору $x'_{j_k} \in \partial\Omega_{j_k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ с учетом того, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{j_k} = x'_0$. Остается доказать равномерную сходимость на компакте K . Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и точки $x_j \in K$ такие, что $|\delta(x_j) - \delta_j(x_j)| \geq \varepsilon_0$. В силу компактности K существует сходящаяся подпоследовательность x_{j_k} с предельной точкой $x_0 \in K \subset \Omega$. Имеем

$$\varepsilon_0 \leq |\delta(x_{j_k}) - \delta_{j_k}(x_{j_k})| \leq |\delta(x_{j_k}) - \delta(x_0)| + |\delta(x_0) - \delta_{j_k}(x_0)| + |\delta_{j_k}(x_0) - \delta_{j_k}(x_{j_k})|.$$

Следовательно, с учетом сходимости $\delta_{j_k}(x_0) \rightarrow \delta(x_0)$ и условия Липшица (2) для функций расстояния δ и δ_j ($j \in \mathbb{N}$) получаем противоречие, так как

$$\varepsilon_0 \leq 2|x_{j_k} - x_0| + |\delta(x_0) - \delta_{j_k}(x_0)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Докажем утверждение (ii). Полагаем $S := \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S(\Omega_j) \cup S(\Omega)\right) \cap K$. По теореме Радемахера $\text{mes}_n S = 0$. Пусть $x \in K \setminus S$. Тогда функции расстояния δ, δ_j ($j \in \mathbb{N}$) дифференцируемы в этой точке, и по теореме Моцкина (см. [1], с. 52) каждое из множеств $P(x, \Omega)$ и $P(x, \Omega_j)$ содержит лишь одну точку, т. е. $P(x, \Omega) = \{x'\}$, $x' \in \partial\Omega$, $P(x, \Omega_j) = \{x'_j\}$, $x'_j \in \partial\Omega_j$, и, кроме того, $\nabla\delta(x) = (x' - x)/|x' - x|$, $\nabla\delta_j(x) = (x'_j - x)/|x'_j - x|$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Остается доказать, что $\lim_{j \rightarrow \infty} x'_j = x'$. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность (x'_{j_k}) такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{j_k} = x'_0$ и $x'_0 \neq x'$. Поскольку $\delta_{j_k}(x) = |x - x_{j_k}| \rightarrow |x - x'_0|$, $\delta_{j_k}(x) \rightarrow \delta(x)$ при $k \rightarrow \infty$, то $\delta(x) = |x - x'_0|$. Следовательно, $x'_0 \in P(x, \Omega) = \{x'\}$, и поэтому $x'_0 = x'$. Получили противоречие.

Схема доказательства леммы 2. Очевидно, для любого $x \in K \subset \Omega$ последовательность $\delta_j(x)$ является невозрастающей и $\delta_j(x) \geq \delta(x)$. Поэтому существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j(x) =: \delta_0(x) \geq \delta(x).$$

С другой стороны, в любой точке x области Ω расстояние $\delta_j(x) \geq \delta_0(x)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Поэтому $\bar{\Omega} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ содержит шар $B_{\delta_0}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta_0(x)\}$. Следовательно, $\delta_0(x) \leq \delta(x)$. Получаем, что $\delta_0(x) = \delta(x)$. Равномерная сходимость $\delta_j(x)$ на компакте K и сходимость почти всюду градиентов доказывается так же, как и при доказательстве соответствующих утверждений леммы 1.

4. О доказательствах теорем 1–3. Утверждения о точности констант в теоремах 1–3 следуют из соответствующих утверждений, доказанных ранее в статьях [5]–[7] и [10].

Для доказательства неравенств в теоремах 1 и 2 для заданной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, $K = \text{supp } u \subset \Omega_j$, воспользуемся внутренней аппроксимацией выпуклой области Ω последовательностью неубывающих выпуклых многогранников Ω_j , каждый из которых является

пересечением конечного числа полупространств. Можно считать, что граница многогранника Ω_j состоит из m_j различных граней π_{jm} размерности $n-1$. Тогда

$$\partial\Omega_j = \bigcup_{m=1}^{m_j} \pi_{jm}, \quad \Omega_j \setminus S(\Omega_j) = \bigcup_{m=1}^{m_j} \Omega_{jm},$$

где Ω_{jm} — область, определяемая равенством $\Omega_{jm} := \{x \in \Omega_j : P(x, \Omega) \subset \pi_{jm}\}$.

Пусть $\tilde{\pi}_{jm}$ — внутренние точки π_{jm} , и пусть $\vec{n}_{jm}$ — вектор внутренней нормали к грани π_{jm} многогранника Ω_j . Так как $P(x, \Omega) = \{y\}$, $y \in \tilde{\pi}_{jm}$, то существует непрерывная функция $\varphi_{jm} : \pi_{jm} \rightarrow [0, \infty)$ такая, что

$$\Omega_{jm} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + t \vec{n}_{jm}, y \in \tilde{\pi}_{jm}, t = \delta_j(x) \in (0, \varphi_{jm}(y))\},$$

поэтому по теореме Фубини

$$\int_{\Omega_{jm}} g((x', t)) dx = \int_{\tilde{\pi}_{jm}} dx' \int_0^{\varphi_{jm}(x')} g((x', t)) dt \quad (5)$$

для любой ограниченной функции $g \in C(\Omega_{jm})$. Полагая $p \in [1, \infty)$, $s \in (1, \infty)$, $x = (x', t)$ и применяя к функции $u \in C_0^1(\Omega)$ классическое неравенство Харди по переменной t , получаем

$$\int_0^{\varphi_{jm}(x')} \left| \frac{\partial u((x', t))}{\partial t} \right|^p t^{p-s} dt \geq \frac{(s-1)^p}{p^p} \int_0^{\varphi_{jm}(x')} |u((x', t))|^p t^{-s} dt.$$

Учитывая равенства $t = \delta_j(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega_j)$, формулу (5), тождество

$$\left| \frac{\partial u((x', t))}{\partial t} \right| = |\nabla u(x) \cdot \nabla \delta_j(x)| \quad (6)$$

и суммируя по m , будем иметь

$$\int_{\Omega_j} \frac{|\nabla u(x) \cdot \nabla \text{dist}(x, \partial\Omega_j)|^p dx}{\text{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega_j)} \geq \frac{(s-1)^p}{p^p} \int_{\Omega_j} \frac{|u(x)|^p dx}{\text{dist}^s(x, \partial\Omega_j)}.$$

Применяя лемму 1, получаем неравенство теоремы 1.

Неравенство в теореме 2 доказывается по той же схеме. Отличие состоит в том, что вместо классического неравенства Харди мы пользуемся его усилением, полученным в статье [7].

Для доказательства неравенства в теореме 3 для заданной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ воспользуемся внутренней аппроксимацией открытого множества Ω последовательностью неубывающих открытых многогранников Ω_j , каждый из которых является объединением конечного числа кубов с ребрами, параллельными осям координат.

Разбиение $\Omega_j \setminus S(\Omega_j)$ на подобласти Ω_{jm} в этом случае подробно описано в статьях [5] и [11]. Для интегралов по подобласти Ω_{jm} также используются соотношения вида (5) и (6), и координата $t = \delta_j(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega_j)$, которая интерпретируется либо как декартова координата, либо как величина радиуса в обобщенных полярных координатах.

Замечание. Через $\overline{S}(\Omega)$ обозначим замыкание относительно Ω множества всех сингулярных точек функции расстояния. В 2003 г. К. Мантегацца и А.К. Меннуччи [18] опубликовали пример ограниченной выпуклой области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$, для которой множество $\overline{S}(\Omega^*)$ имеет положительную двумерную лебегову меру.

Очевидно, этот пример допускает обобщение на размерность $n \geq 3$. Например, можно взять достаточно большое число $a > 0$ и n -мерную выпуклую область $\Omega^{**} := \Omega^* \times (0, a)^{n-2}$, для которой $\text{mes}_n \overline{S}(\Omega^{**}) > 0$.

Отметим, что области, рассмотренные в теоремах 1–3, вполне могут обладать аналогичным свойством, т. е. допустимы области, для которых $\text{mes}_n \overline{S}(\Omega) > 0$. Но в доказательствах теорем мы использовали лишь такие ограниченные аппроксимирующие области, для которых $S(\Omega_j) = \overline{S}(\Omega_j)$, следовательно, $\text{mes}_n \overline{S}(\Omega_j) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Balinsky A.A., Evans W.D. and Lewis R.T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*. (Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer, 2015).
- [2] Rademacher H. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit I*. Math. Ann., **89**:4 (1919), 340–359.
- [3] Federer H. *Geometric function theory*. Springer Verlag, New York, 1969.
- [4] Marcus M., Mizel V.J., Pinchover Y. *On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbb{R}^n$* . Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 3237–3250.
- [5] Avkhadiyev F.G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants*. Lobachevskii J. Math., **21** (2006), 3–31.
- [6] Авхадиев Ф.Г., Шафигуллин И.К. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами*. Изв. вузов. Матем., № 2 (2014), 69–73.
- [7] Avkhadiyev F.G., Wirths K.-J. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains*. Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), **87**:8-9 (2007), 632–642.
- [8] Avkhadiyev F.G., Wirths K.-J. *Weighted Hardy inequalities with sharp constants*. Lobachevskii J. Math. **31** (2010), 1–7.
- [9] Avkhadiyev F.G., Wirths K.-J. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18** (2011), 723–736.
- [10] Авхадиев Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства в областях евклидова пространства*. Изв. РАН. Сер. матем., **83**:5 (2019), 3–26.
- [11] Авхадиев Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах*. Тр. матем. ин-та. им. В.А. Стеклова, **255** (2006), 8–18.
- [12] Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства*. Изв. вузов. Матем., № 9 (2011), 90–94.
- [13] Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом*. Сиб. матем. журн., **55**: 2 (2014), 191–200.
- [14] Авхадиев Ф.Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4*. Изв. РАН. Сер. матем., **78**:5 (2014), 3–26.
- [15] Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их приложения*. Матем. сб., **206**:12 (2015), 3–28.
- [16] Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы*. Алгебра и анализ, **30**:2 (2018), 18–44.
- [17] Motzkin T.S. *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes*. Atti Real. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Serie VI, **21** (1935), 562–567.
- [18] Mantegazza C., Mennucci A.C. *Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds*. Appl. Math. Optim., **47** (2003), 1–25.

Фарит Габидинович Авхадиев

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: avkhadiyev47@mail.ru

F.G. Avkhadiyev

Properties and applications of the distance functions on open sets of the Euclidean space

Abstract. For an open subset of the Euclidean space of dimension n we consider interior and exterior approximations by sequences of open sets. We prove convergence everywhere of the corresponding sequences of distance functions from boundary as well as convergence almost everywhere for their gradients. As applications we obtain several new Hardy-type inequalities that contain the scalar product of gradients of test functions and the gradient of the distance function from the boundary of an open subset of the Euclidean space.

Keywords: distance function, Rademacher theorem, Motzkin theorem, approximation of open set, convex domain, Hardy type inequality.

Farit Gabidinovich Avkhadiyev

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: avkhadiyev47@mail.ru