Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Звягин, М. В. Турбин, Задача оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 4, 93–98

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-93-98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:08:24

Краткое сообщение

В.Г. ЗВЯГИН, М.В. ТУРБИН

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ
МОДЕЛИ ФОЙГТА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ**

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости в слабом смысле задачи оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью. Доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода. Сначала доказывается разрешимость аппроксимационной задачи, после чего на основе априорных оценок, не зависящих от параметров аппроксимации, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к решению исходной задачи. Затем показывается, что среди слабых решений задачи есть хотя бы одно, дающее минимум заданному функционалу качества.

Ключевые слова: задача оптимального управления, обратная связь, слабое решение, аппроксимационно-топологический подход, модель Фойгта, неоднородная жидкость, жидкость с переменной плотностью.

УДК: 517.977

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-93-98

Введение. При исследовании различных аспектов теории управляемых систем классическое понятие обратной связи в литературе в настоящее время используется и в расширенном смысле: отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых значений. При этом это множество может определяться как в каждый момент времени функционирования системы, так и на всем временном промежутке. Данный подход позволяет для описания управляемых систем эффективно использовать теорию дифференциальных включений, основываясь на известной лемме А.Ф. Филиппова о неявной функции [1] и теории степени многозначных отображений. Такой подход используется, например, в монографиях Ж.-П. Обена, А. Челлины [2], М. Каменского, В. Обуховского, П. Дзекки [3] и целом ряде работ. В работах В.Г. Звягина, М.В. Турбина, А.В. Звягина и их соавторов [4]–[8] данный подход был применен к задачам оптимального управления движением различных моделей однородной неньютоновской несжимаемой жидкости и были рассмотрены задачи, когда внешняя сила, которая и является управлением, зависит от скорости движения жидкости. Это позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление не выбирается из конечного

Поступила в редакцию 20.11.2019, после доработки 20.11.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00146).

набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения. Решением поставленной задачи управления движением жидкости является пара: скорость движения жидкости и управление (плотность внешних сил). В связи с тем, что таких пар может быть много, естественным образом возникает понятие оптимального решения – решения, дающего минимум заданному функционалу качества.

При этом важное значение имеет изучение моделей неоднородной гидродинамики несжимаемых жидкостей. Данные модели также носят название моделей движения жидкости с переменной плотностью. Начало исследования подобных моделей было начато для системы Навье–Стокса и восходит еще к работам А.В. Кажихова [9], П.-Л. Лионса (см. обзор в его монографии [10]) и Ж. Симона [11], а также активно развивается в настоящее время и для неньютоновских жидкостей (см., например, [12]). Исследованию задачи оптимального управления с обратной связью для одной из таких моделей — модели Фойгта с переменной плотностью и посвящена настоящая статья. В данном случае решением задачи является тройка: скорость жидкости, плотность жидкости и управление (плотность внешних сил). Предполагается, что управление принадлежит образу многозначного отображения, зависящего от скорости жидкости. На основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики доказано существование слабого решения задачи управления с обратной связью, после чего показывается, что среди решений данной задачи есть хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

1. Постановка задачи. Движение жидкости Фойгта в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$, описывается системой уравнений

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \nabla p = \rho f; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

Здесь $v = (v_1, \dots, v_n)$, ρ и p — скорость движения жидкости, плотность и давление в жидкости соответственно, f — плотность внешних сил, которая в нашем случае будет управлением. Константы $\nu, \varkappa$ — это вязкость и время запаздывания соответственно, исходя из физического смысла, они предполагаются положительными.

Функции ρ и v удовлетворяют следующим начальным и граничным условиям:

$$v(x, 0) = a(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad 0 < m \leq \rho_0(x) \leq M, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где m, M — некоторые константы.

Для того, чтобы сформулировать задачу управления с обратной связью для системы уравнений (1)–(3) и ввести понятие слабого решения, нам потребуются следующие обозначения. Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ обозначим пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω , а через $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — множество соленоидальных вектор-функций. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Положим $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Мы будем также использовать хорошо известное [13] разложение Вейля векторных полей: $L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$, где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ — знак ортогональной суммы. Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi \Delta$. Оператор A продолжается в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [14],

[15]). Область определения A совпадает с V^2 . По теореме Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов получаем, что собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . Обозначим через $E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, N \in \mathbb{Z}$, множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j , и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. В [16], [17] показано, что нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 эквивалентны нормам

$$\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2}v\|_{V^0}, \|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}, \|v\|_{V^3} = \|A^{3/2}v\|_{V^0}.$$

Также введем пространства, в которых будет исследована разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную. Для скорости v

$$W = \{u : u \in C([0, T], V^1), u' \in L_2(0, T; V^1)\}, W_1 = \{u : u \in C([0, T], V^3), u' \in L_2(0, T; V^3)\}$$

с нормами $\|u\|_W = \|u\|_{C([0, T], V^1)} + \|u'\|_{L_2(0, T; V^1)}, \|u\|_{W_1} = \|u\|_{C([0, T], V^3)} + \|u'\|_{L_2(0, T; V^3)}$. А для плотности ρ

$$E = \{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T), \varrho' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$$

с нормой $\|\varrho\|_E = \|\varrho\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\varrho'\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}$ и $E_1 = \{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T) \cap L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), \varrho' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$ с нормой $\|\varrho\|_{E_1} = \|\varrho\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\varrho\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\varrho'\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}$. Здесь через Q_T обозначено $\Omega \times [0, T]$.

Сформулируем условия на многозначное отображение, которое будет функцией управления. Будем предполагать, что $\Psi : W \rightharpoonup L_2(0, T; V^0)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
- (Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;
- (Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что для всех $v \in W : \|\Psi(v)\|_{L_2(0, T; V^0)} := \sup \left\{ \|u\|_{L_2(0, T; V^0)} : u \in \Psi(v) \right\} \leq M$;
- (Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \rightharpoonup u_0$ в $L_2(0, T; V^0)$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Также приведем естественный пример мультиотображения, возникающего в приложениях и удовлетворяющего перечисленным выше условиям. Пусть непрерывные отображения $f_i : W \rightarrow L_2(0, T; V^0), i = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяют следующим условиям:

- (f_i1) отображения f_i ограничены и компактны;
- (f_i2) отображения f_i слабо замкнуты, т. е. из $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W, v_l \rightharpoonup v_0, f_i(v_l) \rightarrow u_0$ следует $u_0 = f_i(v_0)$.

Тогда мультиотображение $U : W \rightarrow L_2(0, T; V^0), U(v) = \left\{ u = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(v) : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$ удовлетворяет всем перечисленным условиям на мультиотображение Ψ .

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью (1)–(3). Под обратной связью мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \quad (4)$$

Будем предполагать, что начальные условия $a \in V^1, \rho_0 \in L_\infty(\Omega)$.

Определение 1. Тройка функций $(v, \rho, f) \in W \times E \times L_2(0, T, V^0)$ называется слабым решением задачи управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью (1)–(4), если она удовлетворяет начальному условию $v(0) = a$, условию обратной связи $f \in \Psi(v)$ и равенствам (здесь символ $:$ обозначает покомпонентное произведение матриц) для любых $\varphi \in V^1, \psi \in H_0^1(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} v, \varphi \right\rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \kappa \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial v}{\partial t} : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \rho f \varphi dx; \\ \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t}, \psi \right\rangle - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \end{aligned}$$

2. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. Пусть мультиотображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$. Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления для модели Фойгта с переменной плотностью (1)–(4).

Для доказательства этой теоремы рассматривается аппроксимационная задача

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \nabla p = \rho f; \quad f \in \Psi(v); \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \delta \Delta \rho + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad \operatorname{div} v = 0; \\ v(x, 0) = b(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = Av|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Определение 2. Тройка функций $(v, \rho, f) \in W_1 \times E_1 \times L_2(Q_T)$ называется слабым решением аппроксимационной задачи, если она удовлетворяет начальному условию

$$v(0) = b \in V^3,$$

условию обратной связи $f \in \Psi(v)$ и для любых $\varphi \in V^1, \psi \in H_0^1(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$ следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} v, \varphi \right\rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \kappa \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial v}{\partial t} : \nabla \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \rho f \varphi dx; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t}, \psi \right\rangle + \delta \int_{\Omega} \nabla \rho \nabla \psi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \quad (6)$$

Для доказательства разрешимости аппроксимационной задачи переходим к операторной трактовке (5) в виде операторного включения и (6) в виде операторного уравнения. Затем для фиксированного $v \in L_{\infty}(0, T; L_4(\Omega)^n)$ доказываем существование решения $\rho \in E_1$ операторного уравнения, эквивалентного (6). Далее для полученного $\rho \in E_1$ на основе теории степени вполне непрерывных векторных полей с компактными, выпуклыми

значениями и априорных оценок решений доказывается существование решения $v \in W_1$ операторного включения, эквивалентного (5). Таким образом, получается отображение Υ , которое заданной функции $v \in L_\infty(0, T; L_4(\Omega)^n)$ ставит в соответствие функцию $v \in W_1$. С учетом компактности вложения $W_1 \subset L_\infty(0, T; L_4(\Omega)^n)$ получаем компактное отображение $\Upsilon : L_\infty(0, T; L_4(\Omega)^n) \rightarrow L_\infty(0, T; L_4(\Omega)^n)$, которое имеет неподвижную точку. Это и означает разрешимость аппроксимационной задачи. Далее, переходя к пределу при стремлении к нулю ε и δ , показывается, что существует слабое решение рассматриваемой задачи управления движением жидкости для модели Фойгта с переменной плотностью (1)–(4).

Обозначим через $\Sigma \subset W \times E \times L_2(0, T; V^0)$ множество всех слабых решений задачи (1)–(4). Рассмотрим функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) существует число γ такое, что $\Phi(v, \rho, f) \geq \gamma$ для всех $(v, \rho, f) \in \Sigma$;

(Φ2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W , $\rho_m \rightarrow \rho_*$ в E и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^0)$, то

$$\Phi(v_*, \rho_*, f_*) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, \rho_m, f_m).$$

Примером такого функционала качества является

$$\Phi_1(v, \rho, f) = \int_0^T \|v(t) - u_*(t)\|_{V^1}^2 dt + \int_0^T \|\rho(t) - \rho_*(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V^0}^2 dt.$$

Здесь u_*, ρ_* — заданное поле скоростей и плотность соответственно. Этот функционал характеризует отклонение имеющихся скорости и плотности от требуемых, его минимум даст минимальное отклонение скорости и плотности от заданных при минимальном управлении.

Вторым результатом работы является

Теорема 2. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а функционал Φ удовлетворяет условиям (Φ1), (Φ2), то задача управления для модели Фойгта с переменной плотностью (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, ρ_*, f_*) такое, что

$$\Phi(v_*, \rho_*, f_*) = \inf_{(v, \rho, f) \in \Sigma} \Phi(v, \rho, f).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестн. Московск. ун-та. Сер. матем., механ., астрономия, физ., химия **2**, 25–32 (1959).
- [2] Aubin J.-P., Cellina A. *Differential Inclusions* (Berlin:Springer-Verlag, 1984).
- [3] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces* (Berlin–New York:de Gruyter, 2001).
- [4] Zvyagin V., Obukhivskii V., Zvyagin A. On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems, J. Fixed Theory and Appl. **16** (1–2), 27–82 (2014).
- [5] Звягин В.Г., Звягин А.В., Турбин М.В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным, Зап. научн. сем. ПОМИ **477**, 54–86 (2018).
- [6] Zvyagin V.G., Turbin M.V. Optimal Feedback Control in the Mathematical Model of Low Concentrated Aqueous Polymer Solutions, J. Optim. Theory and Appl. **148** (1), 146–163 (2011).
- [7] Плотников П.И., Турбин М.В., Устюжанинова А.С. Теорема существования слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для модифицированной модели Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров, Докл. Академии Наук **488** (2), 133–136 (2019).
- [8] Звягин В.Г., Турбин М.В. Оптимальное управление с обратной связью движением среды Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным, Докл. Академии Наук **485** (2), 139–141 (2019).
- [9] Кажихов А.В. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости, ДАН СССР **216** (5), 1008–1010 (1974).

- [10] Lions P.-L. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible Models* (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [11] Simon J. *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure*, SIAM J. Math. Anal. **21** (5), 1093–1117 (1990).
- [12] Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. *Existence and large time behavior for generalized Kelvin-Voigt equations governing nonhomogeneous and incompressible fluids*, IOP Conf. Series: J. Physics: Conf. Ser. **1268** (012008) (2019).
- [13] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* (ГИФМЛ, М., 1961).
- [14] Солонников В.А. *Об оценках тензоров Грина для некоторых граничных задач*, ДАН СССР **130** (5), 988–991 (1960).
- [15] Ворович И.И., Юдович В.И. *Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости*, Матем. сб. **53** (4), 393–428 (1961).
- [16] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред* (КРАСАНД (УРСС), М., 2012).
- [17] Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения* (Новосибирск: Научн. кн., 1999).

Виктор Григорьевич Звягин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Михаил Вячеславович Турбин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: mrmike@mail.ru

V.G. Zvyagin and M.V. Turbin

The optimal feedback control problem for Voigt model with variable density

Abstract. The work is devoted to the study of weak solvability of the optimal feedback control problem for the Voigt model with variable density. The proof is based on the approximation-topological approach. First, the solvability of the approximation problem is proved, and then, based on a priori estimates that are independent of the approximation parameter, it is shown that from the sequence of solutions of the approximation problem, a subsequence converging to the solution of the original problem can be chosen. Then it is shown that among weak solutions to the problem there is at least one that gives a minimum to a given cost functional.

Keywords: optimal control problem, feedback, weak solution, approximation-topological approach, Voigt model, nonhomogeneous fluid, variable-density fluid.

Victor Grigor'evich Zvyagin

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Mikhail Vyacheslavovich Turbin

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: mrmike@mail.ru