Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Жегалов, Л. Б. Миронова, К задачам Гурса и Коши для трехмерного уравнения Бианки, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 15–20

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-15-20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:06:59

В.И. ЖЕГАЛОВ, Л.Б. МИРОНОВА

К ЗАДАЧАМ ГУРСА И КОШИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БИАНКИ

Аннотация. Для задач Гурса и Коши с дополнительным отысканием коэффициентов уравнения предлагается новый подход к выделению случаев разрешимости указанных задач в квадратурах. Вместо введения дополнительных граничных условий предлагаются ограничения на структуру уравнения, связанные с возможностями его факторизации.

Ключевые слова: задача Гурса, задача Коши, факторизация, функция Римана, разрешимость в квадратурах.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-15-20

В области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ рассматривается уравнение

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0, \quad (1)$$

представляющее собой одно из уравнений с доминирующей частной производной, теория которых интенсивно развивается в последние десятилетия многими математиками, в том числе и авторами данной статьи. Большинство уже полученных результатов отражено в монографиях [1]–[2].

Задача Гурса для (1) состоит в отыскании его решения, удовлетворяющего условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x, y). \quad (2)$$

Здесь X, Y, Z — грани D при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно. Предполагается, что

$$\begin{aligned} a &\in C^{(1,1,0)}, \quad b \in C^{(0,1,1)}, \quad c \in C^{(1,0,1)}, \\ d &\in C^{(1,0,0)}, \quad e \in C^{(0,1,0)}, \quad f \in C^{(0,0,1)}, \quad g \in C^{(0,0,0)}, \\ \varphi_1 &\in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z}), \end{aligned} \quad (3)$$

а на ребрах D

$$\varphi_2(x, z_0) = \varphi_3(x, y_0), \quad \varphi_1(y, z_0) = \varphi_3(x_0, y), \quad \varphi_1(y_0, z) = \varphi_2(x_0, z). \quad (4)$$

Методом Римана построено решение этой задачи [3] (см. также [1]), однако формулу решения можно считать лишь структурной, поскольку о входящей в нее функции Римана известно только то, что она существует. Поэтому предпринималась попытка выделить точные решения ([1], с. 35–46; [2], § 2 из гл. 3).

Задача. Получить в терминах коэффициентов уравнения (1) условия разрешимости задачи Гурса.

Имеется значительное количество работ, посвященных обратным коэффициентным задачам (см., например, статьи [4]–[7] и цитированную там литературу). Из указанных работ

и работ других авторов нам известен подход к определению в уравнении неизвестных коэффициентов, основанный на введении дополнительных граничных условий. Мы заменяем этот подход ограничениями на структуру уравнения, связанными с возможностями его факторизации. Используем следующие варианты факторизаций:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)(u_{yz} + \beta u_y + \gamma u_z + \delta u) = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \delta\right)(u_x + \alpha u) = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\right)(u_{xz} + \beta u_x + \gamma u_z + \delta u) = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \delta\right)(u_y + \alpha u) = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\right)(u_{xy} + \beta u_x + \gamma u_y + \delta u) = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \delta\right)(u_z + \alpha u) = 0. \quad (10)$$

При этом считаем, что $\alpha, \dots, \delta$ для каждого варианта свои.

Найдем условия, обеспечивающие представление (1) в видах (5)–(10). Получаемые при этом результаты целесообразно записать в терминах обозначений:

$$\begin{aligned} h_1 &= a_x + ab - e, & h_2 &= a_y + ac - d, & h_3 &= b_y + bc - f, \\ h_4 &= b_z + ab - e, & h_5 &= c_x + bc - f, & h_6 &= c_z + ac - d, \\ h_7 &= d_x + bd - g, & h_8 &= e_y + ce - g, & h_9 &= f_z + af - g, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= b_{yz} + ab_y + cb_z + bd - g, & k_2 &= c_{xz} + ac_x + bc_z + ce - g, \\ k_3 &= a_{xy} + ca_x + ba_y + af - g. \end{aligned} \quad (12)$$

Произведем указанные в левой части (5) действия и потребуем, чтобы коэффициенты преобразованного таким способом соотношения (5) совпали с коэффициентами уравнения (1). Это приводит нас к формулам

$$\alpha = b, \quad \beta = a, \quad \gamma = c, \quad \delta = d, \quad (13)$$

имеющим место, если

$$h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0. \quad (14)$$

Поступая аналогично с (6), получим те же самые значения (13), но (14) при этом заменятся на

$$h_3 \equiv h_4 \equiv k_1 \equiv 0. \quad (15)$$

Повторим только что указанную процедуру для пар (7)–(8) и (9)–(10). В случае (7) роли (13), (14) играют соответственно

$$\alpha = c, \quad \beta = a, \quad \gamma = b, \quad \delta = e, \quad (16)$$

$$h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0,$$

для (8) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ сохраняют значения (16), а вместо (15) должны иметь место тождества

$$h_5 \equiv h_6 \equiv k_2 \equiv 0.$$

Наконец, вариантам (9)–(10) отвечают значения

$$\alpha = a, \quad \beta = c, \quad \gamma = b, \quad \delta = f,$$

для (9) обеспечиваемые тождествами

$$h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0,$$

а для (10) —

$$h_1 \equiv h_2 \equiv k_3 \equiv 0.$$

Итак, нами определены условия в виде групп тождеств для $a, \dots, g$, гарантирующих представление (1) в любой из форм (5)–(10), и вычислены значения коэффициентов $\alpha, \dots, \delta$ во всех случаях. Оказалось, что в каждой из пар (5)–(6), (7)–(8), (9)–(10) $\alpha, \dots, \delta$ являются одинаковыми, но наборы тождеств различны во всех случаях.

Каждое из уравнений (5)–(10) можно представить в виде системы двух уравнений: одно первого, другое второго порядков. Например, (5) можно заменить парой

$$u_{yz} + au_y + cu_z + du = v, \quad v_x + bv = 0. \quad (17)$$

Граничные условия переходят при этом в

$$u(x, y_0, z) = \varphi_1(y, z), \quad u(x, y, z_0) = \varphi_3(x, y), \quad (18)$$

$$v(x_0, y, z) = \varphi_{1yz}(y, z) + a(x_0, y, z)\varphi_{1y}(y, z) + c(x_0, y, z)\varphi_{1z}(y, z) + d(x_0, y, z)\varphi_1(y, z) = \psi_1(y, z). \quad (19)$$

Задача (1)–(2) переходит в две, а решать их следует поочередно: сначала нужно из второго уравнения (17) найти функцию $v(x, y, z)$ по условию (19), а затем решать уравнение для $u(y, z)$ с известной уже функцией v (первое уравнение в (17) с условиями (18)). Последняя есть классическая задача Гурса для уравнения второго порядка (x рассматривается как параметр). Аналогично во всех остальных вариантах (6)–(10) получаются пары последовательно решаемых задач: одна тривиальная (для уравнения первого порядка), другая для уравнения вида $u_{xy} + pu_x + qu_y + ru = \omega$ (задача Гурса). Конечно, необходимо также иметь условия ее разрешимости в квадратурах. Такие условия, получаемые на основе метода Римана по формуле (1.20) из [1], известны [8]–[10]. Они записываются в виде соотношений, связывающих коэффициенты p, q, r . Всего имеем четырнадцать различных вариантов:

$$\begin{aligned} & 1) h \equiv 0, \quad 2) k \equiv 0, \\ & 3) 2h - (\ln h)_{xy} - k \equiv 0, \\ & 4) 2k - (\ln k)_{xy} - h \equiv 0, \\ & 5) p_x \equiv q_y, \quad h \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0, \\ & 6) q_y - p_x \equiv h \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0, \\ & 7) p_x - q_y \equiv k \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0, \\ & 8) h \equiv 2\mu_0(x)\tau_0(y) \neq 0, \quad k \equiv 3\mu_0(x)\tau_0(y) \neq 0, \\ & 9) h \equiv 3\mu_1(x)\tau_1(y) \neq 0, \quad k \equiv 2\mu_1(x)\tau_1(y) \neq 0, \\ & 10) (\ln h)_{xy} \equiv h - k, \quad h \equiv 2q_y \equiv \omega_1, \\ & 11) (\ln k)_{xy} \equiv k - h, \quad k \equiv 2p_x \equiv \omega_2, \\ & 12) m_0p_x - q_y \equiv m_0q_y - p_x \equiv (m_0 - 1)(pq - r), \\ & 13) h \equiv \omega_0, \quad 14) k \equiv \omega_0, \end{aligned}$$

где

$$h = p_x + pq - r, \quad k = q_y + pq - r, \\ \omega_j = \frac{2s'_j(x)t'_j(y)}{(2 - m_j)[s_j(x) + t_j(y)]^2}, \quad [s_j(x) + t_j(y)]s'_j(x)t'_j(y) \neq 0, \quad j = \overline{0, 2}.$$

Здесь $\xi_k, \eta_k, \mu_l, \tau_l \in C^1$ ($k = \overline{0, 2}, l = \overline{0, 1}$), $s, t, m \in C^2$, причем m зависит только от одной из переменных (x, y) и $m \neq 2$. В остальном указанные функции произвольны, т. е. в соответствующем классе должны найтись функции, при которых перечисленные соотношения

выполняются. В результате применения их по всем уравнениям второго порядка, получаемым в процессе замены (5)–(10) указанными выше системами, убеждаемся, что может быть сформулирована

Теорема. *Можно выделить семьдесят восемь различных случаев условий разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах.*

Предложенная выше схема позволяет исследовать задачу Коши с дополнительным отысканием коэффициентов.

Пусть $S: z = \sigma(x, y)$ — поверхность класса C^2 в пространстве (x, y, z) , причем S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Пусть, для определенности, $\sigma'_x < 0$, $\sigma'_y < 0$. Проведем через точку $P(x_0, y_0, z_0)$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Указанные плоскости пересекают поверхность S по кривым BC , CA и AB соответственно. Плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и поверхность S определяют область D , граница которой состоит из двумерных многообразий APC , BSP , BPA и ACB . Ориентацию D считаем положительной.

Задача Коши: найти регулярное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее на поверхности S условиям

$$u|_S = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_S = u_2(x, y). \quad (20)$$

Здесь $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$, $u_2 \in C^0$.

Отметим, что поверхность S допускает задание уравнениями $y = \sigma^*(x, z)$, $x = \sigma^{**}(y, z)$.

Рассмотрим процесс решения системы эквивалентной исходному уравнению (1) с условиями Коши (20) на примере системы (17).

Задача Коши для уравнения (1) рассмотрена в работе [11], где решение задачи Коши построено в терминах функции Римана. Система (6) из ([11], с. 70) позволяет утверждать, что по условиям Коши (20) могут быть определены все частные производные функции u до второго порядка включительно на поверхности S (и наоборот, задание вместо нормальных производных первого и второго порядка на S любых двух частных производных первого и второго порядка позволяет определить нормальные производные из (20) и остальные четыре частных производные функции u). Условия (20) для системы (17) всегда можно привести к виду

$$u|_S = u_0^1(y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_S = u_1^1(y, z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}|_S = u_2^1(y, z). \quad (21)$$

Процесс интегрирования начинается со второго уравнения (17). Условия Коши для уравнения (1) позволяют вычислить

$$v|_{x=\sigma^{**}(y,z)} = u_{yz}|_S + au_y|_S + cu_z|_S + du|_S = v^{**}(y, z). \quad (22)$$

Таким образом, получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $v_x + bv = 0$ с условием (22). Очевидно,

$$v(x, y, z) = v^{**}(y, z) \exp\left(-\int_{\sigma(y,z)}^x b(\alpha, y, z) d\alpha\right).$$

Далее решаем первое уравнение (17) с известной уже функцией v и первыми двумя условиями из (21)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=\sigma^{**}(y,z)} = u_1^1(y,z), \quad u \Big|_{x=\sigma^{**}(y,z)} = u_0^1(y,z),$$

при этом x рассматривается как параметр. При проектировании области D на плоскость (y, z) уравнение кривой, ограничивающей проекцию, принимает вид $\sigma^{**}(y, z) = x$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными* (Изд-во Казанск. матем. о-ва, Казань, 2001).
- [2] Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2014).
- [3] Жегалов В. И. *Трёхмерный аналог задачи Гурса*, Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 94–98 (1990).
- [4] Алексеев Г. В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепло-массопереноса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **47** (6), 1055–1076 (2007).
- [5] Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными, Матем. заметки **97** (3), 368–381 (2015).
- [6] Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **57** (6), 961–972 (2017).
- [7] Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения, Матем. заметки **102** (3), 415–435 (2017).
- [8] Жегалов В. И., Сарварова И. М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах, Изв. вузов. Матем., № 3, 68–73 (2010).
- [9] Жегалов В. И., Созонтова Е. А. Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах, Дифференц. уравнения **53** (2), 270–273 (2017).
- [10] Жегалов В. И., Созонтова Е. А. К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах. Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 53, Матер. Пятнадцатой молодежной научн. школы-конф. «Лобачевские чтения – 2016» (под общей ред. С. Р. Насырова), Казань, 24 – 29 ноября 2016 (Изд-во Казанск. матем. о-ва, Изд-во Акад. наук РТ, Казань, 2016), 75–76.
- [11] Севастьянов В. А. Метод Римана для трёхмерного гиперболического уравнения третьего порядка, Изв. вузов. Матем., № 5, 69–73 (1997).

Валентин Иванович Жегалов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

Миронова Любовь Борисовна

Елабужский институт Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

V.I. Zhegalov and L.B. Mironova

The Goursat and Cauchy problems for three-dimensional Bianchi equation

Abstract. For the coefficient inverse Goursat and Cauchy problems with an additional search for the coefficients of the equation, a new approach to the allocation of solvability cases of these problems in quadratures is proposed. Instead of introducing additional boundary conditions, restrictions on the structure of the equation associated with the possibilities of its factorization are proposed.

Keywords: Goursat problem, Cauchy problem, factorization, Riemann function, solvability in quadratures.

Valentin Ivanovich Zhegalov

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia*

Lyubov Borisovna Mironova

*Kazan Federal University, Yelabyga Institute,
89 Kazanskaya str., Yelabyga, 423600 Russia,*

e-mail: lbmironova@yandex.ru