Общероссийский математический портал

А. О. Игнатъев, О неравенстве типа Ляпунова, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 21–29

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-21-29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:05:33

А.О. ИГНАТЬЕВ

О НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ЛЯПУНОВА

Аннотация. А.М. Ляпунов доказал неравенство, позволяющее оценить расстояние между двумя последовательными нулями a и b решения линейного дифференциального уравнения второго порядка $x''(t) + q(t)x(t) = 0$, где $q(t)$ — непрерывная при $t \in [a, b]$ функция. В настоящей статье аналогичная задача решается для линейного дифференциального уравнения вида $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$. Полученное неравенство применено к оценке периодов периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений Лъенара и Ван дер Поля.

Ключевые слова: неравенство типа Ляпунова, уравнение Лъенара, уравнение Ван дер Поля.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-21-29

Введение. А.М. Ляпунов [1] доказал неравенство, позволяющее оценить расстояние между двумя последовательными нулями решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (1)$$

где $q(t)$ — непрерывная при $t \in [a, b]$ функция. Если $x(t)$ — нетривиальное решение дифференциального уравнения (1) такое, что

$$x(a) = x(b) = 0 \quad (a < b) \quad (2)$$

и $x(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$, то

$$\int_a^b |q(t)| dt \geq \frac{4}{b-a}. \quad (3)$$

Это неравенство называется неравенством Ляпунова.

А. Винтер [2] заметил, что в неравенстве (3) функция $|q(t)|$ может быть заменена на

$$q^+(t) = \max\{0, q(t)\} = \frac{q(t) + |q(t)|}{2}.$$

Х. Янг в статье [3] рассматривал дифференциальное уравнение $x^{(2n+1)} + q(t)x = 0$, где $n \in \mathbb{N}$, $q(t) \in \mathbb{C}([a, b])$. Им доказано, что если $x(t)$ — решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям

$$x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad x(t) \neq 0 \text{ при } t \in (a, b),$$

и если существует $d \in (a, b)$ такое, что $x^{(2n)}(d) = 0$, то

$$\int_a^b |q(t)| dt \geq \frac{n! 2^{n+1}}{(b-a)^{2n}}.$$

Неравенство Ляпунова обобщалось по многим направлениям. В статье [4] получен аналог неравенства Ляпунова для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. В работах [5], [6] получен дискретный аналог неравенства Ляпунова. В работе [7] неравенство Ляпунова доказано для импульсных дифференциальных уравнений второго порядка. В работе [8] получены неравенства типа Ляпунова для уравнений в частных производных дробного порядка. Обзор статей, посвященных неравенству Ляпунова, можно найти в [9].

Отметим, что если неравенство Ляпунова использовать для оценки длины интервала (a, b) , в котором решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1) отлично от нуля, то пользоваться неравенством

$$b - a \geq \frac{4}{\int_a^b |q(t)| dt}$$

не очень удобно, так как правая часть этого неравенства содержит интеграл с пределами интегрирования a и b . Этим же недостатком обладают и другие результаты, сформулированные выше. Целью настоящей статьи является получение оценки длины интервала (a, b) такого, в котором решение $x(t)$ дифференциального уравнения второго порядка

$$x''(t) + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (4)$$

отлично от нуля, и эта оценка зависит лишь от свойств функций $p(t)$ и $q(t)$.

1. Основные результаты. Рассмотрим линейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка (4), в котором $p(t)$ и $q(t)$ — функции, которые определены и непрерывны на некотором множестве $\mathcal{M}$, включающем в себя отрезок $[a, b]$. В частном случае $\mathcal{M}$ может совпадать со всей числовой осью $(-\infty, +\infty)$.

Перед тем, как формулировать теорему, определим функцию $\Phi(u, v)$ следующим образом:

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4v-u^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{u}{\sqrt{4v-u^2}} \right), & \text{если } 4v > u^2; \\ 2/u, & \text{если } 4v = u^2; \\ \frac{1}{\sqrt{u^2-4v}} \ln \left(\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{u-\sqrt{u^2-4v}} \right), & \text{если } 4v < u^2, \end{cases} \quad (5)$$

по непрерывности мы определяем $\Phi(0, v) = \frac{\pi}{2\sqrt{v}}$ для всех $v > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что $p(t)$ и $q(t)$ таковы, что существуют непрерывно-дифференцируемая функция $h(t)$ и константы $P \geq 0$ и $Q > 0$ такие, что на $\mathcal{M}$ справедливы неравенства*

$$|2h(t) - p(t)| \leq P, \quad |p(t)h(t) - q(t) + h'(t) - h^2(t)| \leq Q.$$

Тогда для любого решения линейного дифференциального уравнения (4), удовлетворяющего свойствам

$$x(a) = x(b) = 0, \quad a < b, \quad x(t) \neq 0 \text{ при } t \in (a, b),$$

справедливо неравенство $b - a \geq 2\Phi(P, Q)$.

Доказательство. Обозначим

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad x'(t) = r(t) \sin \varphi(t) - h(t)r(t) \cos \varphi(t), \quad (6)$$

где $r(t) > 0$. Дифференцируя обе части этих равенств и учитывая (4), получаем

$$\begin{aligned} r'(t) \cos \varphi(t) - r(t) \varphi'(t) \sin \varphi(t) &= r(t) \sin \varphi(t) - h(t) r(t) \cos \varphi(t), \\ r'(t) \sin \varphi(t) + r(t) \varphi'(t) \cos \varphi(t) &= -p(t)[r(t) \sin \varphi(t) - h(t) r(t) \cos \varphi(t)] - \\ &- q(t) r(t) \cos \varphi(t) + h'(t) r(t) \cos \varphi(t) + h(t)[r(t) \sin \varphi(t) - h(t) r(t) \cos \varphi(t)], \end{aligned}$$

отсюда имеем

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t) \{ [-p(t) + h(t)] \sin^2 \varphi(t) + \\ &+ [1 + p(t)h(t) - q(t) + h'(t) - h^2(t)] \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) - h(t) \cos^2 \varphi(t) \}, \\ \varphi'(t) &= -\sin^2 \varphi(t) + [2h(t) - p(t)] \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) + [p(t)h(t) - q(t) + h'(t) - h^2(t)] \cos^2 \varphi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $t = a$ и $t = b$ таковы, что $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$. Для определенности будем считать, что $x(t) > 0$ при $t \in (a, b)$.

Согласно замене переменных (6) $x(t)$ может обращаться в нуль лишь тогда, когда $\cos \varphi(t) = 0$. Поскольку в силу (7) имеем $\varphi'(t) \Big|_{\cos \varphi(t)=0} = -1$, то функция $\varphi(t)$ убывает при $\cos \varphi(t) = 0$. Поэтому можно считать, что $t = a$ соответствует значению $\varphi = \pi/2$, а $t = b$ соответствует значению $\varphi = -\pi/2$.

При изменении t от a до b величина $\varphi(t)$ непрерывно меняется от $\pi/2$ до $-\pi/2$. Следовательно, на (a, b) существуют t такие, что $\varphi(t) = 0$. Обозначим через a_* и b_* соответственно меньшее и большее из таких значений, т. е. $\varphi(a_*) = \varphi(b_*) = 0$, причем $0 < \varphi(t) < \pi/2$ при $t \in (a, a_*)$ и $-\pi/2 < \varphi(t) < 0$ при $t \in (b_*, b)$. Таким образом, при изменении t от a до a_* значение φ непрерывно меняется от $\pi/2$ до 0. На (a, a_*) имеем оценку

$$\frac{d\varphi}{dt} \geq -\sin^2 \varphi - P \sin \varphi \cos \varphi - Q \cos^2 \varphi,$$

отсюда получаем

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi + P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} \geq -dt.$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi + P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} \geq - \int_a^{a_*} dt. \quad (8)$$

С помощью замены переменной $u = \operatorname{tg} \varphi$ получаем

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi + P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} = \int_{+\infty}^0 \frac{du}{u^2 + Pu + Q} = -\Phi(P, Q). \quad (9)$$

Из неравенства (8) и равенства (9) получаем

$$\Phi(P, Q) \leq a_* - a. \quad (10)$$

На интервале времени $t \in (b_*, b)$ функция $\varphi(t)$ меняется от 0 до $-\pi/2$, следовательно, имеет место оценка

$$\frac{d\varphi}{dt} \geq -\sin^2 \varphi + P \sin \varphi \cos \varphi - Q \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi - P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} \geq -dt.$$

Интегрируя полученное неравенство, получаем

$$\int_0^{-\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi - P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} \geq - \int_{b_*}^b dt. \quad (11)$$

С помощью замены переменной $u = \operatorname{tg} \varphi$ имеем

$$\int_0^{-\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi - P \sin \varphi \cos \varphi + Q \cos^2 \varphi} = \int_0^{-\infty} \frac{du}{u^2 - Pu + Q} = - \int_{-\infty}^0 \frac{du}{u^2 - Pu + Q}. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) вытекает

$$\int_{-\infty}^0 \frac{du}{u^2 - Pu + Q} \leq b - b_*.$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^0 \frac{du}{u^2 - Pu + Q} = \Phi(P, Q)$, и складывая предыдущее неравенство с неравенством (10), получаем $2\Phi(P, Q) \leq b - b_* + a_* - a \leq b - a$. $\square$

Замечание 1. Полученная в теореме оценка является точной, т. е. существуют дифференциальные уравнения вида (4), в которых вместо нестрогого неравенства можно написать равенство. В качестве такого уравнения можно рассмотреть $x''(t) + x(t) = 0$. В этом дифференциальном уравнении $p(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 1$; $h(t)$ выбираем тождественно равной нулю, а в качестве P и Q выбираем $P = 0$, $Q = 1$. В этом случае $\Phi(0, 1) = \pi/2$, и расстояние между двумя последовательными нулями любого решения равно π .

Сформулируем следствия из доказанной теоремы. При $h(t) \equiv 0$ теорема 1 принимает вид.

Следствие 1. Предположим, что $p(t)$ и $q(t)$ таковы, что существуют константы $P \geq 0$ и $Q > 0$ такие, что на $\mathcal{M}$ справедливы неравенства $|p(t)| \leq P$, $|q(t)| \leq Q$. Тогда для любого решения линейного дифференциального уравнения (4), удовлетворяющего свойствам

$$x(a) = x(b) = 0, \quad a < b, \quad x(t) \neq 0 \text{ при } t \in (a, b),$$

справедливо неравенство

$$b - a \geq 2\Phi(P, Q). \quad (13)$$

Замечание 2. Сравнивая неравенство (13) с результатами ([10], сс. 408, 409), видим, что там рассмотрено дифференциальное уравнение (4) в предположениях

$$a = 0, \quad x(0) = x(b) = 0, \quad |p(t)| \leq P, \quad |q(t)| \leq Q \text{ при } t \in [0, b]$$

и получены неравенство $\frac{Pb}{2} + \frac{Qb^2}{6} > 1$ и более сильное неравенство

$$\frac{2Pb}{\pi^2} + \frac{Qb^2}{\pi^2} \geq 1. \quad (14)$$

Сравним при $Q = 1$ оценку для b , получаемую из неравенства (14), и значение из следствия 1 данной статьи при некоторых значениях параметра P . Решая (14) относительно b при $Q = 1$, получаем $b \geq -P + \sqrt{P^2 + \pi^2}$. Вычислим значения $-P + \sqrt{P^2 + \pi^2}$ и $2\Phi(P, 1)$ и сравним их. Результаты сравнения приведены в следующей таблице.

P	0	0.1	0.5	1	2	3	10
$-P + \sqrt{P^2 + \pi^2}$	π	3.043	2.68	2.30	1.72	1.34	0.48
$2\Phi(P, 1)$	π	3.045	2.72	2.42	2.00	1.72	0.92

Из приведенной таблицы видно, что при $Q = 1$ и заданных значениях параметра P оценки для b из неравенства (14) и следствия 1 совпадают лишь при $P = 0$; при остальных значениях P оценка для b , полученная из следствия 1, оказалась более точной, чем оценка, полученная из неравенства (14).

Замечание 3. Если в следствии 1 обозначить $P = 2m, Q = k$ и учесть, что

$$\operatorname{arctg} \frac{m}{\sqrt{k - m^2}} + \operatorname{arctg} \frac{m}{\sqrt{k - m^2}} \equiv \frac{\pi}{2}$$

при $k > m^2$, то получим результат работы ([11], следствие 3).

Следствие 2. Если $p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{\sup_{t \in \mathcal{M}} |\frac{1}{4}p^2(t) + \frac{1}{2}p'(t) - q(t)|}}.$$

Доказательство. Полагая $h(t) = \frac{1}{2}p(t)$, в качестве P мы можем выбрать $P = 0$, отсюда получаем справедливость этого следствия.

Следствие 3. Если $p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то $b - a \geq 2\Phi(P, Q)$, где $P = \sup_{t \in \mathcal{M}} |p(t)|$, $Q = \sup_{t \in \mathcal{M}} |p'(t) - q(t)|$.

Доказательство. Полагаем $h(t) = p(t)$.

Следствие 4. Если $p(t) \equiv 0$, то

$$b - a \geq \frac{2}{\sup_{\substack{t \in \mathcal{M}, \\ t > a}} \left| \int_a^t q(s) ds \right|}.$$

Доказательство. Пусть $h(t) = \int_a^t q(s) ds$. В этом случае в качестве P и Q выбираем

$$P = 2 \sup_{\substack{t \in \mathcal{M}, \\ t > a}} \left| \int_a^t q(s) ds \right|, \quad Q = \left(\sup_{\substack{t \in \mathcal{M}, \\ t > a}} \left| \int_a^t q(s) ds \right| \right)^2.$$

Получили, что $P^2 = 4Q$, и из теоремы 1 следует доказываемое соотношение. $\square$

2. Оценка периода периодического решения уравнения Лъенара. Уравнением Лъенара [12], [13] называется нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t)) = 0, \quad (15)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные непрерывные функции, определенные в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие теореме о существовании и единственности решений, $x'(t)$ и $x''(t)$ — производные первого и второго порядков по t , где t — время. Уравнение (15), так же как и его обобщение — уравнение Левинсона–Смита [14]:

$$x''(t) + f(x(t), x'(t))x'(t) + g(x(t)) = 0$$

играют важную роль в электронике, кардиологии (моделируя электрическую активность сердца), нейрологии (моделируя активность нейронов), биологии, механике, сейсмологии, физике и космологии [15]–[24].

Изучению качественных свойств решений дифференциального уравнения (15) посвящено большое количество работ [25]–[29]. Уравнение Лъенара может быть записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)y - g(x). \quad (16)$$

Одним из важных свойств системы (16) является наличие у нее периодических решений. Этому направлению исследований посвящены работы [30]–[34]. Важным случаем периодического решения является наличие периодического предельного цикла. Сформулируем теорему, доказанную А. Лъенаром в 1928 году.

Теорема 2. *Предположим, что в системе (16) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и локально липшицевы при $x \in \mathbb{R}$ и справедливы следующие предположения:*

- $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функция;
- $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$;
- функция $F(x) := \int_0^x f(\xi)d\xi$ имеет единственный положительный корень $x = b$, причем $F(x) < 0$ при $0 < x < b$ и $F(x) > 0$ при $x > b$;
- функция $F(x)$ монотонно возрастает при $x > b$ и $F(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда система (16) имеет единственный устойчивый предельный цикл.

Заметим, что из условий теоремы следует, что функция $F(x)$ нечетная, следовательно, справедливы равенства $F(0) = g(0) = 0$.

В работе [35] проведена оценка сверху амплитуды предельного цикла системы (16), т. е. найдено значение α такое, что $|x_c(t)| < \alpha$, где $x_c(t)$ — координаты точек предельного цикла системы (16). Доказано следующее утверждение [35]:

Теорема 3. *Пусть в предположениях теоремы 2 выполняются условия*

- функция $f(x)$ имеет единственный положительный корень $x = a$, причем $f(x) < 0$ при $0 \leq x < a$, $f(x) > 0$ при $x > a$;
- функция $-\frac{g(x)}{f(x)}$ монотонно возрастает в интервалах $(0, a)$ и $(a, +\infty)$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(s)F(s)ds = +\infty$.

Тогда амплитуда Am единственного предельного цикла системы (16) ограничена сверху значением α , которое находится единственным образом из уравнения

$$\int_0^\alpha g(s)F(s)ds = 0. \quad (17)$$

Воспользуемся теоремами 1–3 для оценки периода предельного цикла уравнения Лъенара. Пусть функция $g(x)$ в уравнении Лъенара такова, что $g_*(x) := \frac{g(x)}{x}$ непрерывна при $x \in \mathbb{R}$. Запишем уравнение (15) в виде

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g_*(x(t))x(t) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение имеет периодическое решение $x_c(t)$, период которого равен T . Оценим интервал времени t , в течение которого $x_c(t) \neq 0$. Этот интервал времени совпадает с полупериодом $T/2$ предельного цикла. Наряду с этим дифференциальным уравнением рассмотрим неавтономное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x''(t) + f(x_c(t))x'(t) + g_*(x_c(t))x(t) = 0.$$

Очевидно, это уравнение также имеет решение $x(t) = x_c(t)$. Оценим полупериод $T/2$ этого решения, воспользовавшись теоремой 1. В данном случае $p(t) = f(x_c(t))$, $q(t) = g_*(x_c(t))$. Пусть α — число, которое находится из уравнения (17). Тогда в качестве P и Q согласно следствию 1 можно выбрать

$$P = \sup_{x \in [0, \alpha]} |f(x)|, \quad Q = \sup_{x \in [0, \alpha]} |g_*(x)|,$$

и полупериод $T/2$ периодического решения $x_c(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{T}{2} \geq 2\Phi(P, Q), \quad (18)$$

где функция Φ определяется соотношениями (5). Рассмотрим в качестве примера осциллятор Ван дер Поля.

3. Осциллятор Ван дер Поля. Популярным выбором модели для описания динамики нелинейных физических явлений является осциллятор Ван дер Поля. Его поведение описывается дифференциальным уравнением

$$x''(t) + \mu(x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = 0, \quad (19)$$

где μ — положительный числовой параметр. В экономике уравнение Ван дер Поля является эквивалентным системе дифференциальных уравнений переходной экономики [36]. Это уравнение при значении параметра $\mu = 0$ превращается в уравнение простого гармонического осциллятора $\ddot{x} + x = 0$, которое моделирует инфляционные колебания в условиях полной конкуренции [36]. Поведение решений уравнения Ван дер Поля существенно зависит от положительного параметра μ . Так, например, при $\mu \ll 1$ эти решения близки к синусоидальным, но при $\mu \gg 1$ решение становится похожим на меандр. Такое поведение решения Ван дер Поля назвал релаксационным колебанием [15].

Запишем для уравнения Ван дер Поля (19) систему дифференциальных уравнений вида (16):

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\mu(x^2 - 1)y - x. \quad (20)$$

Известно ([37], с.300), что система дифференциальных уравнений (20) имеет единственный устойчивый предельный цикл при любом $\mu > 0$; в работе [38] показано, что этот предельный цикл не является алгебраическим. В общем случае найти периодическое решение уравнения Ван дер Поля не представляется возможным, поэтому усилия многих ученых были направлены на нахождение его приближенного решения. Чисто аналитическим путем уравнение (19) исследовал А.А.Дородницын [39], разработавший для этого асимптотический метод. В работе [40] В.Ф.Судаков предложил другой подход к описанию предельного цикла для уравнения Ван дер Поля в релаксационном режиме (при больших μ). В статье [41] периодическое решение уравнения (19) строится в виде рядов, сходящихся для всех значений коэффициента демпфирования μ .

Важным направлением в изучении предельного цикла уравнения Ван дер Поля является оценка его полупериода. Оценим полупериод $T/2$ предельного цикла системы (20). Для этого найдем вначале величину α из теоремы 3. В случае уравнения Ван дер Поля $f(x) = \mu(x^2 - 1)$, $g(x) = x$, $F(x) = \mu(\frac{x^3}{3} - x)$. Решая уравнение $\int_0^\alpha \mu(\frac{x^3}{3} - x)xdx = 0$, получаем $\alpha = \sqrt{5}$.

Согласно (18) для полупериода $T/2$ предельного цикла справедлива оценка $T/2 \geq 2\Phi(P, 1)$, где $P = \sup_{x \in [0, \alpha]} |\mu(x^2 - 1)|$ и $\alpha = \sqrt{5}$, т. е. $P = 4\mu$. Можно проверить справедливость полученной оценки, сравнив ее с точным значением полупериода $T/2$ при различных значениях

μ , полученным в работах [42], [43] с помощью численного интегрирования уравнения Ван дер Поля. Эти результаты приведены в следующей таблице:

μ	$2\Phi(4\mu, 1)$	$\frac{T}{2}(1)$	$\frac{T}{2}(2)$
0.1	2.7960	3.148	3.14356
1.0	1.5208	3.335	3.33164
10.0	0.7378	9.548	9.53918

Здесь $\frac{T}{2}(1)$ — значение полупериода, найденного в статье [42], и $\frac{T}{2}(2)$ — значение полупериода, вычисленное в работе [43].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lyapunov A.M. *Stability of motion: general problem*, International J. Control, **55** (3), 701–767, 1992.
- [2] Wintner A. *On the non-existence of conjugate points*, American J. Math., **73**, 368–380, 1951.
- [3] Yang Xiaojing *On Liapunov-type inequality for certain higher-order differential equations*, Appl. Math. and Computation, **134** (2–3), 307–317, 2003.
- [4] Niculescu C.P. *A new look at the Lyapunov inequality*, Ann. Academy Romanian Sci. Ser. Math. and Appl., **3** (1), 207–217, 2011.
- [5] Cheng Sui-Sun *A discrete analogue of the inequality of Lyapunov*, Hokkaido Math. J., **12**, 105–112, 1983.
- [6] Zafer A. *Discrete linear Hamiltonian systems: Lyapunov type inequalities, stability and disconjugacy criteria*, J. Math. Anal. and Appl., **396** (2), 606–617, 2012.
- [7] Agarwal R.P., Özbekler A. *Lyapunov type inequalities for second order forced mixed nonlinear impulsive differential equations*, Appl. Math. and Computation, **282**, 216–225, 2016.
- [8] Jlelia M., Kiraneb M., Sameta B. *Lyapunov-type inequalities for fractional partial differential equations*, Appl. Math. Letters, **66**, 30–39, 2017.
- [9] Brown R.C., Hinton D.B. *Lyapunov inequalities and their applications*, In: Survey on Classical Inequalities. Math. and Its Appl., **517**, 1–25. Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.
- [10] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1970).
- [11] Комленко Ю.В. *Условия разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка*, ДАН СССР, **174** (5), 1018–1020, 1967.
- [12] Liénard A. *Étude des oscillations entretenues*, Revue générale de l'électricité, **23**, 901–912, 1928.
- [13] Liénard A. *Étude des oscillations entretenues*, Revue générale de l'électricité, **23**, 946–954, 1928.
- [14] Levinson N. and Smith O. *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. J., **9** (2), 382–403, 1942.
- [15] B. van der Pol *On relaxation-oscillations*, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Magazine and J. Sci., **2**, 978–992, 1927.
- [16] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний* (2-е изд.) (ГИФМЛ, М., 1959).
- [17] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer, New York, 2003).
- [18] B. van der Pol and J. van der Mark *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and J. Sci., **6**, 763–775, 1928.
- [19] Fitzhugh R. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes*, Biophysics J., **1**, 445–466, 1961.
- [20] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. of the Institute of Radio Engineers, **50**, 2061–2070, 1962.
- [21] Glass L. *Theory of Heart* (Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1990).
- [22] Salasnich L. *Instabilities, point attractors and limit cycles in an inflationary universe*, Modern Phys. Letters A, **10**, 3119–3127, 1995.
- [23] Edelstein-Keshet L. *Mathematical Models in Biology* (Random House, New York, 1988).
- [24] Poland D. *Loci of limit cycles*, Phys. Review E, **49**, 157–165, 1994.
- [25] Albarakati W.A., Lloyd N.G., Pearson J.M. *Transformation to Liénard form*, Electronic J. Diff. Equat., **76**, 1–11, 2000.
- [26] Игнатьев А.О., Кириченко В.В. *О необходимых условиях глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия уравнения Лъенара*, Матем. заметки, **93** (1), 63–71, 2013.
- [27] Bowman T.T. *Periodic solutions of Lienard systems with symmetries*, Nonlinear Anal., **2** (4), 457–464, 1978.
- [28] Carletti T., Villari G. *A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems*, J. Math. Anal. and Appl., **307** (2), 763–773, 2005.

- [29] Odani K. *Existence of exactly N periodic solutions for Liénard systems*, Funkcialaj Ekvacioj, **39**, 217–234, 1996.
- [30] Ignatyev A.O. *The domain of existence of a limit cycle of Liénard system*, Lobachevskii J. Math., **38** (2), 271–279, 2017.
- [31] Филиппов А.Ф. *Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка*, Матем. сб., **30** (1), 171–180, 1952.
- [32] Neumann D.A., Sabbagh L. *Periodic solutions of Lienard systems*, J. Math. Anal. and Appl., **62** (1), 148–156, 1978.
- [33] Sugie J., Hara T. *Non-existence of periodic solutions of the Lienard system*, J. Math. Anal. and Appl., **159** (1), 224–236, 1991.
- [34] Sabatini M. *On the period function of Lienard systems*, J. Diff. Equat., **152**, 467–487, 1999.
- [35] Игнатъев А.О. *Оценка амплитуды предельного цикла уравнения Лье́нара*, Дифференц. уравнения, **53** (3), 312–320, 2017.
- [36] Смирнов А.Д. *Лекции по моделям макроэкономики*, Эконом. журн. ВШЭ, №1, 87–122, 2000.
- [37] Meiss J.D. *Differential dynamical systems*, Soc. Industrial and Appl. Math., Philadelphia, 2007.
- [38] Odani K. *The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic*, J. Diff. Equat., **115** (1), 146–152, 1995.
- [39] Дородницын А.А. *Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля*, Прикл. матем. и механ., **11** (3), 313–328, 1947.
- [40] Судаков В.Ф. *К вопросу о предельном цикле генератора Ван дер Поля в релаксационном режиме*, Вестн. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Приборостроение, №1, 51–57, 2013.
- [41] Buonomo A. *The periodic solution of van der Pol's equation*, SIAM J. Appl. Math., 59, № 1, 156–171, 1999.
- [42] Greenspan D. *Numerical approximation of periodic solutions of van der Pol's equation*, J. Math. Anal. Appl., **39**, 574–579, 1972.
- [43] Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. *Автоколебания осцилляторов Релея и Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах обратной связи*, Прикл. матем. и механ., **68** (2), 273–281, 2004.

Александр Олегович Игнатъев

Институт прикладной математики и механики,
ул. Розы Люксембург, д. 74, г. Донецк, 83114, Украина,
e-mail: aoignat@mail.ru

A.O. Ignatyev

On the Lyapunov type inequality

Abstract. A.M. Lyapunov proved the inequality that makes it possible to estimate the distance between two consecutive zeros a and b of solutions of a linear differential equation of the second order $x''(t) + q(t)x(t) = 0$ where $q(t)$ is a continuous function for $t \in [a, b]$. In the present note, a similar problem is solved for a linear differential equation of the form $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$. The obtained inequality is applied to the periods estimate of periodic solutions of nonlinear differential Liénard and Van der Pol equations.

Keywords: Lyapunov-type inequality, Liénard equation, Van der Pol equation.

Alexander Olegovich Ignatyev

Applied Mathematics and Mechanics,
74 R.Luxemburg str., Donetsk, 83114, Ukraine,
e-mail: aoignat@mail.ru