Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Кокурин, О полноте произведений решений уравнения Гельмгольца, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 30–35

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-30-35>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:55:04

М.Ю. КОКУРИН

О ПОЛНОТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Аннотация. Устанавливается, что семейство всевозможных попарных произведений регулярных в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ решений уравнения Гельмгольца и фундаментальных решений этого уравнения с особенностями в точках прямой $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$, $\overline{D} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, полно в $L_2(D)$.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, фундаментальное решение, гармоническая функция, полнота.

УДК: 517.57: 517.58

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-30-35

1. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — некоторые семейства функций из $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющих в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ уравнению $\Delta u + c^2 u = 0$, где постоянная $c \geq 0$. В работе рассматривается вопрос о том, в каких случаях семейство всех попарных произведений $\{u_1 u_2 : u_1 \in \mathcal{H}_1, u_2 \in \mathcal{H}_2\}$ образует полную систему в $L_2(D)$. Обозначим $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$. В частном случае $c = 0$ для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1 ([1], [2], с. 138). Пусть $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$ — произвольные гармонические в $D \subset \mathbb{R}^n$ функции. Тогда семейство $\{u_1 u_2\}$ полно в $L_2(D)$.

Предложение 2 ([3], теорема 7.1). Пусть $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$ — произвольные гармонические в $D \subset \mathbb{R}^n$ функции, обращающиеся в нуль на $\Sigma \setminus O_\epsilon(x_0)$, где $x_0 \in \Sigma$, $\Sigma \triangleq \partial D \in C^\infty$. Тогда найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что семейство $\{u_1 u_2\}$ полно в $L_2(D \cap O_\delta(x_0))$.

Известны (см. [2]) и более общие утверждения с заменой уравнения Лапласа уравнениями вида $P(-i\partial)u + c(x)u = 0$, $x \in D$. Отметим лишь следующий факт.

Предложение 3 ([2], следствие 5.3.5). Пусть $c_1, c_2 \in L_\infty(D)$ фиксированы, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, функции $u_j \in C^2(\overline{D})$ являются произвольными решениями уравнений $\Delta u + c_j(x)u = 0$, $j = 1, 2$. Тогда семейство $\{u_1 u_2\}$ полно в $L_2(D)$.

Утверждения этого типа широко используются при установлении единственности решений коэффициентных обратных задач для различных классов уравнений в частных производных. Заметим, что в предложениях 1–3 классы $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ совпадают с множествами всех регулярных решений соответствующих уравнений, возможно, с наложением граничного условия. В настоящей работе рассмотрим асимметричный случай, когда $\mathcal{H}_1$ есть по-прежнему семейство всех регулярных решений уравнения Гельмгольца в $D \subset \mathbb{R}^3$, тогда как класс $\mathcal{H}_2$ образован фундаментальными решениями этого уравнения с особенностями в точках прямой, не пересекающей $\overline{D}$. Хотя класс $\mathcal{H}_2$ значительно уже по сравнению с $\mathcal{H}_1$, порожаемое ими семейство попарных произведений $\{u_1 u_2 : u_1 \in \mathcal{H}_1, u_2 \in \mathcal{H}_2\}$ сохраняет

Поступила в редакцию 09.06.2019, после доработки 09.06.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ по Марийскому государственному университету (проект 1.5420.2017/8.9).

свойство полноты в $L_2(D)$. Строгой формулировке и доказательству этого утверждения посвящен п. 2.

2. Обозначим $x' = (x_1, x_2)$, $\mathcal{L} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, замыкание которой не пересекает прямую $\mathcal{L}$. Функция

$$\Phi(x; c) = \frac{e^{ic|x|}}{4\pi|x|}$$

является решением уравнения $\Delta u + c^2 u = -\delta(x)$ с условием излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - icu \right) = 0, \quad r = |x|.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Линейные комбинации функций семейства*

$$\left\{ u(x) \Phi(x - z; c) : z \in \mathcal{L}; u \in C^2(\overline{D}), \Delta u + c^2 u = 0 \text{ в } D \right\}$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

Доказательство. Необходимо убедиться, что соотношение

$$\int_D \frac{h(x) u(x) e^{ic|x-z|}}{|x-z|} dx = 0 \quad \forall z \in \mathcal{L}, \quad \forall u \in C^2(\overline{D}), \quad \Delta u + c^2 u = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

с $h \in L_2(D)$ влечет $h=0$ почти всюду в D . Уравнению $\Delta u + c^2 u = 0$ удовлетворяет в частности экспоненциальная функция $u(x) = u(x', x_3) = e^{-i(\lambda', x') + \lambda_3 x_3}$, где $-|\lambda'|^2 + \lambda_3^2 + c^2 = 0$. Положим в (1)

$$u(x) = e^{-i(\lambda', x') + \sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} x_3}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}^2,$$

тогда будем иметь

$$\int_D h(x) e^{-i(\lambda', x') + \sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} x_3} \frac{e^{ic\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - z_3)^2}}}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - z_3)^2}} dx = 0 \quad \forall z_3 \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda' \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Применим к левой части (2) преобразование Фурье по переменной z_3 . Согласно ([4], сс. 181, 182)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z_3} \frac{e^{ic\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - z_3)^2}}}{\sqrt{|x'|^2 + (x_3 - z_3)^2}} dz_3 &= e^{-i\mu x_3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu u} \frac{e^{ic\sqrt{|x'|^2 + u^2}}}{\sqrt{|x'|^2 + u^2}} du = \\ &= 2e^{-i\mu x_3} \int_0^{\infty} \cos(\mu u) \frac{e^{ic\sqrt{|x'|^2 + u^2}}}{\sqrt{|x'|^2 + u^2}} du = 2e^{-i\mu x_3} K_0(|x'| \sqrt{\mu^2 - c^2}), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}. \end{aligned}$$

Здесь K_0 — функция Макдональда нулевого порядка и в выражении $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ используется ветвь функции $\sqrt{z}$, выделяемая равенством $\sqrt{-1} = -i$. Таким образом, из (2) следует

$$\int_D h(x', x_3) e^{-i(\lambda', x') + (\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} - i\mu) x_3} K_0(|x'| \sqrt{\mu^2 - c^2}) dx' dx_3 = 0 \quad \forall \lambda' \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}. \quad (3)$$

При каждом $\lambda' \in \mathbb{R}^2$ функция в левой части (3) аналитична по $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\pm c\}$. Поэтому равенство (3) по аналитичности продолжается на все значения $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\pm c\}$. Полагая $\mu =$

$= p - i\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2}$, $p \in \mathbb{R}$, в (3), для всех $\lambda' \in \mathbb{R}^2$ получаем

$$\int_D h(x', x_3) e^{-ipx_3} e^{-i(\lambda', x')} K_0\left(|x'| \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} - |\lambda'|^2}\right) dx' dx_3 = 0. \quad (4)$$

Здесь при фиксированном λ' на параметр p имеем ограничение $p \neq \pm c + i\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2}$.

Обозначим $Y_{0,1}(\theta) = 1$, $Y_{k,1}(\theta) = \cos k\theta$, $Y_{k,2}(\theta) = \sin k\theta$, $k = 1, 2, \dots$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Зафиксируем финитную на $\mathbb{R}_+$ функцию $\eta = \eta(r)$, $r \geq 0$, и функцию $Y_{k,l}$ для некоторых $k \geq 0$ и $l \in \{1, 2\}$. Умножим обе части равенства (4) на $\eta(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)$, где $\theta = \theta(\lambda')$, $\lambda'/|\lambda'| = (\cos \theta, \sin \theta)$, и проинтегрируем результат по $\mathbb{R}^2 = \{\lambda'\}$, считая функцию h продолженной нулем вне D . Мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(x', x_3) e^{-ipx_3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', x')} K_0\left(|x'| \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} - |\lambda'|^2}\right) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \right) dx' dx_3 = 0. \quad (5)$$

Согласно ([5], формула (2.6.5); [6], теорема 3.10) для внутреннего интеграла в (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', x')} K_0\left(|x'| \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{|\lambda'|^2 - c^2} - |\lambda'|^2}\right) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' = \\ & = 2\pi(-i)^k Y_{k,l}(\varphi) \int_0^{\infty} J_k(r|x'|) K_0\left(|x'| \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{r^2 - c^2} - r^2}\right) \eta(r) r dr, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi = \varphi(x')$, $x'/|x'| = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, J_k — функция Бесселя порядка k . Положим в (5) $\eta = \eta_n$, где $\{\eta_n(r)\}$ — последовательность финитных функций, сходящаяся к $\delta(r - t)$, $t > 0$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, из (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(x', x_3) e^{-ipx_3} Y_{k,l}(\varphi) J_k(t|x'|) K_0\left(|x'| \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{t^2 - c^2} - t^2}\right) dx' dx_3 = \\ & = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi \right) e^{-ipx_3} dx_3 \right) \times \\ & \times J_k(t\rho) K_0\left(\rho \sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{t^2 - c^2} - t^2}\right) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $x'(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $\rho = |x'|$. При выводе (7) использовалась формула

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x') dx' = \int_0^{\infty} \rho \left(\int_0^{2\pi} f(x'(\rho, \varphi)) d\varphi \right) d\rho,$$

справедливая для произвольной интегрируемой функции f с компактным носителем.

Введем обозначения

$$G_{k,l}(\rho, x_3) = \int_0^{2\pi} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi, \quad f_{p,k,l}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) e^{-ipx_3} dx_3.$$

Из (7) следует равенство

$$\int_0^\infty J_k(t\rho) K_0\left(\rho\sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{t^2 - c^2} - t^2}\right) f_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Имеем

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ip)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^j dx_3.$$

Пусть D' — проекция области D на плоскость $\mathbb{R}^2 = \{x'\}$. Поскольку $\overline{D} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, выполняется $0 \notin \overline{D}'$. Поэтому $G_{k,l} \equiv 0$ вне прямоугольника $[a_1, a_2] \times [H_1, H_2]$ для некоторых $0 < a_1 < a_2$, $H_1 < H_2$, и соответственно $f_{p,k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$.

Для фиксированных номеров k, l возможны два случая.

1) Для всех $j = 0, 1, \dots$ справедливо $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^j dx_3 = 0$ для почти всех (п. в.) $\rho \geq 0$.

Таким образом, в этом случае $f_{p,k,l} = 0$ почти всюду для всех $p \in \mathbb{R}$.

2) Найдется $m \geq 0$ такое, что $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^j dx_3 = 0$ для п. в. $\rho \geq 0$ и всех $0 \leq j < m$, но

функция $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^m dx_3$ отлична от нуля на множестве положительной меры в $[a_1, a_2]$.

В случае 1) по теореме Мюнца ([7], с. 54) для п. в. $\rho \geq 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$ имеем

$$G_{k,l}(\rho, x_3) \equiv \int_0^{2\pi} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (9)$$

В случае 2) при $p \rightarrow 0+$ справедливо

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^m dx_3 + O(p^{m+1}). \quad (10)$$

Поэтому при малых $p > 0$ имеет место

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_3) x_3^m dx_3 \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \quad (11)$$

Согласно (11), если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то при $0 < p \leq \varepsilon$ выполняется $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$.

Положим

$$\tilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \frac{f_{p,k,l}(\rho)}{\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < p \leq \varepsilon.$$

Используя (10) и (11), получаем

$$\tilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \left(\left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_3) x_3^m dx_3 \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \right)^{-1} \left((-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^m dx_3 + O(p) \right).$$

Таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\tilde{f}_{p,k,l} - \tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \quad (12)$$

где $\tilde{g}_{k,l}(\rho) = (-i)^m \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_3) x_3^m dx_3 \right\|_{L_2(0,\infty)}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_3) x_3^m dx_3$. Ясно, что

$$\|\tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1 \quad (13)$$

и $\tilde{g}_{k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$. Согласно (8) для выбранных номеров k, l выполняется

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) K_0\left(\rho\sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{t^2 - c^2} - t^2}\right) \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Переходя к пределу в (14) при $p \rightarrow 0$, с учетом (12) и данного выше определения ветви корня получаем

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) K_0(-it\rho) \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t > 0. \quad (15)$$

Отсюда следует $\tilde{g}_{k,l} = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Действительно, умножая обе части (15) на t^{-s} , $s > 0$, и интегрируя, находим

$$\int_0^{\infty} \tilde{g}_{k,l}(\rho) \left(\int_0^{\infty} t^{-s} J_k(t\rho) K_0(-it\rho) dt \right) d\rho = \int_0^{\infty} \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho \int_0^{\infty} \tau^{-s} J_k(\tau) K_0(-i\tau) d\tau = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall s > 0. \quad (16)$$

Из (16) и теоремы об обращении преобразования Меллина ([4], с. 73) следует $\tilde{g}_{k,l} = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Полученное равенство противоречит (13). Тем самым показано, что случай 2) невозможен ни при каких k, l .

Таким образом, реализуется случай 1), поэтому в силу (9) имеем

$$\int_0^{2\pi} h(x'(\rho, \varphi), x_3) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0$$

для всех k, l и для п. в. $\rho \geq 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$. Поскольку тригонометрическая система $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(0, 2\pi)$, отсюда следует

$$h(x'(\rho, \varphi), x_3) = 0$$

для п. в. $\rho \geq 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. □

Замечание. В ходе доказательства теоремы фактически установлена полнота в $L_2(D)$ семейства $\{u(x)\Phi(x - z; c)\}$, где u есть произвольное решение уравнения $\Delta u + c^2 u = 0$ вида $u(x) = e^{(\lambda, x)}$, $\lambda \in \mathbb{C}^3$, а точка z пробегает $\mathcal{L}$.

В заключение отметим, что в случае $c = 0$ утверждение теоремы 1 ранее было установлено в [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Calderon A.-P. *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Anal. Appl. Continuum Phys. Sociedade Brasileira de Matem. Rio de Janeiro, 65–73 (1980).
- [2] Isakov V. *Inverse problems for partial differential equations* (Springer, N.Y., 2006).
- [3] Kenig C., Salo M. *Recent progress in the Calderon problem with partial data*, Contemporary math. V.615. Inverse probl. and appl. Providence, R.I.: AMS, 193–222 (2014).
- [4] Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление* (ГИФМЛ, М., 1961).
- [5] Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи* (Наука, Физматлит, М., 1997).
- [6] Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* (Мир, М., 1974).
- [7] Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации* (Наука, М., 1965).
- [8] Кокурин М.Ю. *О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования*, Матем. заметки, 104, №5, 708–716 (2018).

Михаил Юрьевич Кокурин

Марийский государственный университет,
пл. Ленина, д. 1, г. Йошкар-Ола, 424001, Россия,

e-mail: kokurinm@yandex.ru

M.Yu. Kokurin

On the completeness of products of solutions to the Helmholtz equation

Abstract. It is established that the family of pairwise products of solutions to the Helmholtz equation regular in a bounded domain $D \subset \mathbb{R}^3$, and fundamental solutions to this equation with singularities at points from a straight line $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$, $\overline{D} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, is complete in $L_2(D)$.

Keywords: Helmholtz equation, fundamental solution, harmonic function, completeness.

Mikhail Yur'evich Kokurin

Mary State University,
1 Lenin sq., Yoshkar-Ola, 424001 Russia,

e-mail: kokurinm@yandex.ru