Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, И. С. Ковалёва, Системы дискретного времени с частотными характеристиками типа Маркова–Стилтьеса, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 36–47

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-36-47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 02:11:17

А.Р. МИРОТИН, И.С. КОВАЛЁВА

СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ С ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТИПА МАРКОВА–СТИЛТЬЕСА

Аннотация. Выделен класс фильтров (систем) с дискретным временем, частотные характеристики которых являются функциями типа Маркова–Стилтьеса. Дано описание этих фильтров в терминах их системной функции и импульсной характеристики. Исследованы свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем. Указан широкий класс фильтров с рациональными передаточными функциями, подпадающий под действие основных результатов работы.

Ключевые слова: фильтр с дискретным временем, ДВ-система, функция типа Маркова–Стилтьеса, системная функция, передаточная функция, импульсная характеристика, частотная характеристика.

УДК: 621.391:517

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-36-47

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе выделен класс фильтров (систем) с дискретным временем (ДВ-систем) с частотной характеристикой, являющейся функцией типа Маркова–Стилтьеса, т. е. преобразованием Маркова–Стилтьеса некоторой ограниченной меры. Дано описание этих фильтров в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, передаточной функции), а также в терминах их импульсной характеристики. В частности, показано, что этот класс содержит все фильтры с вполне монотонными импульсными характеристиками. Последний случай может возникнуть, например, при дискретизации фильтров (систем) с непрерывным временем (НВ-систем; см. ниже замечание 3.2). Исследованы свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем. В случае обратимости вычислен обратный оператор. Важно отметить, что класс функций типа Маркова–Стилтьеса содержит широкий подкласс рациональных функций, являющихся частотными характеристиками линейных инвариантных по времени фильтров дискретного времени (ДВ-ЛИВ-систем). В связи с этим указан широкий класс фильтров с рациональными передаточными функциями (см. пример 3.1), подпадающий под действие основной теоремы данной работы — теоремы 3.1. Часть результатов была анонсирована в [1].

Поступила в редакцию 20.06.2019, после доработки 20.06.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь, номер госрегистрации 20160825. Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов и аспирантов, номер госрегистрации 20180641.

Отметим, что ранее авторами были исследованы свойства преобразования Маркова–Стилтьеса функций в пространствах Харди $H^p(\mathbb{D})$ (здесь и ниже $\mathbb{D}$ обозначает открытый единичный круг в комплексной плоскости) и Лебега $L^p(0, 1)$ (см. [2]–[5]).

Всюду далее через $M^b([0, 1], \mathbb{C})$ ($M^b([0, 1], \mathbb{R})$) будем обозначать пространство всех ограниченных комплексных (соответственно вещественных) мер на $[0, 1]$, а через $M_+^b([0, 1])$ — его подпространство, состоящее из положительных мер. Функция распределения меры μ обозначается $\mu(t)$.

Определение 1.1 ([6], гл. 6). Преобразованием Маркова–Стилтьеса меры $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ называется функция, задаваемая при $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ соотношением

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - tz}. \quad (1)$$

При $z \in [1, +\infty)$ интеграл в правой части (1) понимается в смысле главного значения, т. е. как предел

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{[0, 1] \cap \{|t-1/z| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1 - tz}. \quad (1')$$

Заметим, что рациональные функции вида $\sum_{i=1}^r \mu_i / (1 - t_i z)$ ($\mu_i \in \mathbb{C}$, $t_i \in [0, 1]$) являются функциями типа Маркова–Стилтьеса.

Теорема 1.1. Преобразование Маркова–Стилтьеса меры $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ голоморфно в области $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, а также существует почти всюду на луче $[1, +\infty)$.

Доказательство. Заметим, что

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - tz} = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{\frac{1}{z} - t} = \frac{\pi}{z} H\mu_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $H\mu_1$ — преобразование Гильберта меры μ_1 , имеющей функцию распределения

$$\mu_1(t) := \begin{cases} \mu(t), & t \in (0, 1); \\ 0, & t \notin (0, 1). \end{cases}$$

Отсюда и из известного свойства преобразования Гильберта следует утверждение о голоморфности преобразования Маркова–Стилтьеса. Применение теоремы Люмиса о преобразовании Гильберта (см., например, [7], с. 239) завершает доказательство теоремы.

В связи с идущим ниже следствием напомним, что диск-алгебра $A(\mathbb{D})$ состоит из функций, аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в его замыкании.

Следствие 1.1. Пусть $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$, $F = S\mu$. Тогда

- 1) $F \in H^p(\mathbb{D})$ при всех $p \in (0, 1)$;
- 2) пусть $p \in [1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$; если $\int_0^1 d|\mu|(t)/(1 - t)^{\varepsilon+1/q} < \infty$ при некотором $\varepsilon \in (0, 1/p)$, то $F \in H^p(\mathbb{D})$;
- 3) если $\int_0^1 d|\mu|(t)/(1 - t) < \infty$, то F принадлежит диск-алгебре $A(\overline{\mathbb{D}})$; если, к тому же, $\mu > 0$, то F не обращается в нуль на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Доказательство. Все утверждения, кроме последнего, следуют из теоремы 1.1 и оценок, установленных при доказательстве теоремы 1 в ([8], с. 4). Докажем последнее утверждение. Очевидно, μ не сосредоточена в точке 1. Поэтому $\mu([0, 1)) > 0$. Тогда при $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ имеем

$$|F(e^{i\theta})|^2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\mu(t)d\mu(s)}{(1 - te^{i\theta})(1 - se^{-i\theta})} = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{Re} \frac{1}{(1 - te^{i\theta})(1 - se^{-i\theta})} d\mu(t)d\mu(s).$$

Но

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(1 - te^{i\theta})(1 - se^{-i\theta})} = \frac{1 - (t + s) \cos \theta + ts}{|1 - te^{i\theta}|^2 |1 - se^{-i\theta}|^2} \geq \frac{(1 - t)(1 - s)}{|1 - te^{i\theta}|^2 |1 - se^{-i\theta}|^2} \geq \frac{(1 - t)(1 - s)}{(1 + t)^2 (1 + s)^2}.$$

Поэтому

$$|F(e^{i\theta})|^2 \geq \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - t)(1 - s)}{(1 + t)^2 (1 + s)^2} d\mu(t) d\mu(s) = \left(\int_{[0,1]} \frac{1 - t}{(1 + t)^2} d\mu(t) \right)^2 > 0.$$

2. ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МАРКОВА–СТИЛТЬЕСА МЕР

Этот раздел носит вспомогательный характер. В нем содержится описание функций, представимых в виде (1) для комплексных и положительных мер, которое нам понадобится ниже.

Лемма 2.1. *Для функции $F(z)$ равносильны следующие утверждения.*

- 1) *Существует мера $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ такая, что $\|\mu\| \leq c$ и $F = S\mu$.*
- 2) *$F(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и для любых комплексных чисел λ_i и любого натурального m*

$$\left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \right| \leq c \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0, 1] \right\}. \quad (2)$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $F = S\mu$. Разлагая подинтегральную функцию в ряд и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании ряда, имеем

$$F(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - tz} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n \right) d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 t^k d\mu(t) \right| = \left| \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right) d\mu(t) \right| \leq \\ &\leq \|\mu\| \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0, 1] \right\} \leq c \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0, 1] \right\}. \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1). Для произвольного полинома $p(t) = \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k$ положим

$$\Lambda(p) := \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k.$$

Очевидно, Λ — линейный ограниченный функционал на пространстве всех полиномов в метрике $C[0, 1]$ и $\|\Lambda\| \leq c$. Применяя теорему Хана–Банаха, продолжим его на $C[0, 1]$ с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса об общем виде функционалов в $C[0, 1]$ существует мера $\mu \in M^b([0, 1])$ такая, что

$$\Lambda(x) = \int_{[0,1]} x(t) d\mu(t),$$

причем $\|\mu\| = \|\Lambda\| \leq c$. При этом $a_k = \Lambda(t^k) = \int_0^1 t^k d\mu(t)$.

Таким образом,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^k d\mu(t) \right) z^k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k z^k \right) d\mu(t) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = S\mu(z),$$

что и завершает доказательство леммы.

Напомним [9], что функция g относится к классу $R[a, b]$, если g голоморфна в открытой верхней полуплоскости, отображает ее в замыкание этой полуплоскости, а также голоморфна и положительна на $(-\infty, a)$ и голоморфна и отрицательна на (b, ∞) . (Из этих условий следует, что g отображает открытую верхнюю полуплоскость в себя.) При этом в силу ([9], теорема П.6) эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ — ограниченная положительная регулярная борелевская мера, сосредоточенная на отрезке $[a, b]$ ("представляющая мера").

Лемма 2.2. *Функция F имеет вид $S\mu$ для некоторой меры $\mu \in M_+^b([0, 1])$, если и только если выполнены следующие условия:*

- 1) F голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ и положительна на интервале $(-\infty, 1)$,
- 2) функция $\zeta F(\zeta)$ отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание.

Доказательство. Необходимость. Голоморфность F в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ была уже отмечена выше.

Далее, если $\zeta < 1$, то $1 - t\zeta > 0$ при $t \in [0, 1)$, а потому и $F(\zeta) > 0$.

Наконец, поскольку $\text{Im}(\zeta/(1-t\zeta)) < 0$ при $\text{Im}\zeta < 0$, $t \in (0, 1)$, то

$$\text{Im}(\zeta F(\zeta)) = \int_0^1 \text{Im} \frac{\zeta}{1-t\zeta} d\mu(t) \leq 0.$$

Это завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Заметим, что при условиях 1) и 2) функция ($\zeta = 1/z$)

$$F_1(z) := -\frac{1}{z} F\left(\frac{1}{z}\right) = -\zeta F(\zeta)$$

голоморфна в верхней полуплоскости и $\text{Im}F_1(z) \geq 0$ при $\text{Im}z > 0$. Кроме того, из условия 1) следует, что она голоморфна и отрицательна на интервале $(0, 1)$ и голоморфна и положительна на интервале $(-\infty; 0)$. Таким образом, F_1 принадлежит классу $R[0, 1]$ функций типа Маркова, и имеет интегральное представление

$$F_1(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{t-z}$$

с представляющей мерой $\mu \in M_+^b([0, 1])$, а потому

$$F(\zeta) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-t\zeta} = S\mu(\zeta),$$

что и требовалось доказать.

3. СИСТЕМЫ С МОМЕНТНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Далее мы преимущественно пользуемся терминологией теории обработки сигналов, применяемой в ([10], сс. 153–159 и [11]). В частности, ниже фильтр Φ — это оператор $f \mapsto \Phi f$. Будет рассматриваться лишь случай дискретного времени (ДВ-сигналы).

Фильтр Φ будем называть *стационарным*, если:

- 1) Φ — линейный ограниченный оператор в $\ell^2(\mathbb{Z})$;

2) Φ является инвариантным по времени, т.е. перестановочен со сдвигом: $\Phi(D^s f) = D^s(\Phi f)$ для каждого момента s и каждого сигнала f , где $D^s f(n) = f(n - s)$ — оператор сдвига.

Фильтр Φ будем называть *каузальным*, если отсутствие входного сигнала до момента $s \in \mathbb{Z}$, т.е. $f(t) = 0$ для $t < s$, влечет отсутствие выходного сигнала: $(\Phi f)(t) = 0$ для $t < s$. Для инвариантного по времени фильтра это равносильно выполнению последнего условия при $s = 0$.

Фильтр Φ будем называть *устойчивым*, если он переводит ограниченные сигналы в ограниченные.

Фильтр Φ будем называть *обратимым*, если соответствующий ему линейный оператор имеет ограниченный обратный.

Последовательность $W = \Phi \delta_0$, где $\delta_n := (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{Z}}$, будем называть *импульсной характеристикой фильтра* Φ , ее обратное (дискретное) преобразование Фурье

$$\varphi(z) = (\mathcal{F}^{-1}W)(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(n) z^n \quad (z \in \mathbb{T})$$

— *частотной характеристикой фильтра* Φ , а норму $\|\varphi\|_{L^\infty}$ — его *амплитудным искажением*. Через $\mathcal{F}$ мы обозначаем преобразование Фурье на единичной окружности $\mathbb{T}$, задаваемое формулой ($n \in \mathbb{Z}$)

$$(\mathcal{F}g)(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\lambda}) e^{-in\lambda} d\lambda.$$

Известно (лемма Винера), что каждый стационарный фильтр есть в точности оператор свертки с последовательностью W , т.е. имеет вид

$$(\Phi_W f)(n) = (f * W)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) W(n - k),$$

причем функция $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$. При этом для каузальности этого фильтра необходимо и достаточно выполнение условия $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, т.е. условия $W(n) = 0$ при $n < 0$ (см., например, [10], с. 155–156, леммы 7.2.1, 7.2.3).

Ниже будет рассмотрен случай, когда импульсная характеристика $(W(n))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ есть последовательность $(\int_0^1 t^n d\mu(t))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ моментов некоторой меры μ (и, в частности, является вполне монотонной последовательностью). При этом возникают фильтры с частотной характеристикой $F(z)$ и передаточной функцией $F(1/z)$, где $F(z)$ — функция типа Маркова–Стилтьеса с представляющей мерой μ . Такие функции, как правило, допускают хорошие рациональные приближения. Например, в [12] выделен широкий класс функций типа Маркова–Стилтьеса, равномерные приближения которых (т.е. погрешности приближений, вычисляемые в метрике Чебышёва) рациональными функциями степени не выше n имеют порядок $\exp(-c\sqrt{n})$ ($c = \text{const} > 0$) (см. также [8], [13], [14] и цитированную там литературу). В этом случае рассмотренные ниже фильтры могут хорошо аппроксимироваться фильтрами с рациональными передаточными функциями, которые представляют большой практический интерес (см., например, [11], [15], [16]).

Как было замечено ранее, для меры $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ при $|z| < 1$

$$F(z) = S\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^n, \quad \text{где } h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t).$$

Пусть $Dx(k) = x(k - 1)$ — оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Рассмотрим оператор

$$F(D) := \sum_{k=0}^{\infty} h(k)D^k,$$

определенный первоначально на финитных слева сигналах из $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Замечание 3.1. На множестве плюс-сигналов (т. е. на подпространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$) система $y = F(D)v$ допускает реализацию в виде следующей динамической системы:

$$P_n(t) = tP_{n-1}(t) + v(n) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad P_0(t) = v(0),$$

$$y(n) = \int_0^1 P_n(t) d\mu(t).$$

(Отметим, что уравнение состояния этой системы не зависит от меры μ , т. е. от фильтра.)

Действительно, для входного плюс-сигнала $v(n)$ рассмотрим следующую последовательность полиномов: $P_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k v(n-k)$ ($n \in \mathbb{N}$), $P_0(t) := v(0)$. Легко проверить, что она удовлетворяет уравнению состояния системы. С другой стороны, если $h(n)$ есть, как выше, последовательность моментов меры μ , то нетрудно убедиться, что

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)D^k v(n) = \sum_{k=0}^n h(k)v(n-k) = h * v(n) = \int_0^1 P_n(t) d\mu(t).$$

Таким образом, часть полученных в данной работе результатов может трактоваться в терминах этой динамической системы.

Для формулировки и доказательства следующей теоремы (в части вычисления обратного оператора) нам понадобятся некоторые сведения о функциональном исчислении, построенном в [17]–[19].

Мы будем говорить, что (вообще говоря, замкнутый плотно определенный) оператор A в банаховом пространстве X принадлежит классу $V_1(X)$, если $[0, 1)$ содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A , и для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t, A)\| \leq \frac{M}{1-t}, \quad t \in [0, 1)$$

(здесь и ниже $R(t, A) = (tI - A)^{-1}$ — резольвента оператора A , I — единичный оператор). Далее нам понадобится тот факт, что унитарные операторы в гильбертовом пространстве H принадлежат $V_1(H)$. Это легко следует из спектральной теоремы для таких операторов.

Будем говорить также, что функция g принадлежит классу R_1 , если она принадлежит классу $R[0, 1]$ (см. определение этого класса в разделе 2) и непрерывна в точке 1. Если g есть функция класса R_1 с представляющей мерой μ , $A \in V_1(X)$, то оператор $g(A)$ определяется формулой $g(A) = \int_0^1 R(t, A) d\mu(t)$. Возникающее функциональное исчисление будем называть R_1 -исчислением.

Положим $Q_1 = \{\varphi | \varphi = 1/g, g \in R_1\}$. Известно, что функция φ класса Q_1 имеет вид $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$, где $f \in R_1$. В этом случае при $A \in V_1(X)$ оператор $\varphi(A)$ с областью определения $D(A)$ определяется формулой $\varphi(A) = \alpha + \beta A - f(A)$, в которой $f(A)$ понимается в смысле R_1 -исчисления. Возникающее функциональное исчисление будем называть Q_1 -исчислением.

В [19] было показано (теорема обращения), что для любой функции $g \in R_1$ и любого $A \in V_1(X)$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой

$$g(A)^{-1} = \varphi(A),$$

где $\varphi = 1/g$ и правая часть понимается в смысле Q_1 -исчисления. При этом с точки зрения применений этой теоремы важно отметить, что коэффициенты α и β , фигурирующие в представлении $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$ функции $\varphi = 1/g$, могут быть вычислены по формулам

$$\beta = -\frac{1}{\mu([a, b])}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu([a, b])^2} \int_a^b t d\mu(t),$$

где μ — представляющая мера функции g , а представляющая мера функции f может быть найдена, например, с помощью формулы обращения для преобразования Стильтьеса [20] (см. [19]).

Теорема 3.1. Пусть $F(z) = S\mu(z)$, $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{R})$. Если

$$\int_0^1 \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty, \quad (3)$$

то оператор $F(D)$ однозначно продолжается до оператора в $\ell^2(\mathbb{Z})$, являющегося стационарным, каузальным и устойчивым фильтром с частотной характеристикой F и амплитудным искажением $\|F\|_{H^\infty}$; при этом $\|F(D)\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \|h\|_{\ell^1}$ (h — последовательность коэффициентов тейлоровского разложения функции F в нуле) и

$$F(D) = \int_0^1 (I - tD)^{-1} d\mu(t), \quad (4)$$

где интеграл Бохнера сходится по норме оператора.

При $\mu \geq 0$ условие (3) является также и необходимым для наличия у оператора $F(D)$ продолжения на все $\ell^2(\mathbb{Z})$ до стационарного и каузального фильтра. Кроме того, в этом случае фильтр $F(D)$ обратим, и его обратный имеет вид

$$F(D)^{-1} = -\left(\frac{1}{F_1}\right)(D^{-1})D,$$

где F_1 есть функция из R_1 с представляющей мерой μ , а $(1/F_1)(D^{-1})$ понимается в смысле Q_1 -исчисления.

Доказательство. Далее будем считать, что $h(n) = 0$ при $n < 0$. Пусть выполнено условие (3). Тогда $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$, так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 t^n d\mu(t) \right| \leq \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n d|\mu|(t) = \int_0^1 \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty.$$

Как уже было отмечено выше, для финитных слева сигналов x из $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$F(D)x = h * x.$$

Следовательно, для таких сигналов $\|F(D)x\|_{\ell^2} \leq \|h\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell^2}$, а потому оператор $F(D)$ однозначно продолжается до (ограниченного) оператора свертки с h в $\ell^2(\mathbb{Z})$, т.е. до стационарного фильтра, и $\|F(D)\| = \|h\|_{\ell^1}$. А так как h сосредоточена на $\mathbb{Z}_+$, то фильтр $F(D)$ каузален.

Поскольку $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$, то F принадлежит диск-алгебре $A(\overline{\mathbb{D}})$ и, в частности, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$ при всех $z \in \mathbb{T}$. Значит, $F = \mathcal{F}^{-1}h$, т.е. F есть частотная характеристика фильтра $F(D)$. Кроме того, условие $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ гарантирует устойчивость фильтра $F(D)$.

Наконец, так как μ не имеет массы в точке 1, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 (I - tD)^{-1} d\mu(t) &= \int_{[0,1)} (I - tD)^{-1} d\mu(t) = \\ &= \int_{[0,1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n D^n \right) d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} t^n D^n d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) D^n = F(D). \end{aligned}$$

При этом почленное интегрирование ряда законно в силу теоремы Лебега, так как с учетом теоремы Б. Леви и условия (3) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} \|t^n D^n\| d|\mu|(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} t^n d|\mu|(t) = \int_{[0,1)} \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty.$$

Пусть $\mu \geq 0$ и оператор $F(D)$ продолжается на все $\ell^2(\mathbb{Z})$, причем соответствующий фильтр стационарный и каузальный. Тогда по лемме Винера ([10], с. 155, 7.2.1)

$$F(D)x = W * x, \quad (5)$$

а по другой лемме Винера (см. [10], с. 156, 7.2.3) $W = \mathcal{F}\varphi$ и $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Полагая в (5) $x = \delta_n$, получаем при всех целых n

$$\mathcal{F}F(n) = h(n) = W(n) = \mathcal{F}\varphi(n),$$

откуда $F = \varphi$ и, следовательно, $F \in H^\infty(\mathbb{D})$. Если число c таково, что $|F(z)| \leq c$, то при $z = r \in (0, 1)$ имеем

$$c \geq |F(r)| = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-rt}.$$

Устремляя r к 1 и применяя теорему Б. Леви, выводим, что условие (3) выполнено.

Докажем обратимость. Поскольку оператор D унитарен и его спектр равен $\mathbb{T}$, то при условии (3) оператор свертки $F(D)$ совпадает со значением функции F на операторе D в смысле классического функционального исчисления унитарных операторов ($F \in A(\overline{\mathbb{D}})$, см. следствие 1.1). В частности, спектр $F(D)$ равен $F(\mathbb{T})$. Поскольку в силу следствия 1.1 функция F не имеет нулей на единичной окружности, оператор $F(D)$ имеет ограниченный обратный, т. е. соответствующий фильтр обратим. Для нахождения обратного оператора напомним, что в доказательстве леммы 2.2 показано, что функция $F_1(z) := -1/zF(1/z)$ принадлежит $R[0, 1]$ и имеет представляющую меру μ . Более того, из условия (3) следует $F_1 \in R_1$. Так как унитарный оператор D^{-1} принадлежит $V_1(\ell^2(\mathbb{Z}))$, то в силу определения R_1 -исчисления и формулы (4)

$$D^{-1}F_1(D^{-1}) = \int_0^1 D^{-1}R(t, D^{-1})d\mu(t) = - \int_0^1 (I - tD^{-1})^{-1}d\mu(t) = -F(D)$$

(мы воспользовались тождеством $D^{-1}R(t, D^{-1}) = -(I - tD^{-1})^{-1}$). Отсюда $F(D)^{-1} = -(F_1(D^{-1}))^{-1}D = -(1/F_1)(D^{-1})D$. $\square$

Следствие 3.1. В условиях теоремы 3.1 амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра Φ на единичной окружности имеет вид

$$A(\omega)^2 = \int_{[0,1)^2} \frac{1 - (t+s)\cos\omega + ts}{(1 - 2t\cos\omega + t^2)(1 - 2s\cos\omega + s^2)} d\mu(t)d\mu(s) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

В частности, если $\mu > 0$, то справедлива оценка

$$A(\omega) \geq \int_{[0,1]} \frac{1-t}{1-2t\cos\omega+t^2} d\mu(t) \geq \int_{[0,1]} \frac{1-t}{(1+t)^2} d\mu(t) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} A(\omega)^2 &= |F(e^{i\omega})|^2 = F(e^{i\omega}) \overline{F(e^{i\omega})} = \int_{[0,1]} \frac{d\mu(t)}{e^{i\omega} - t} \int_{[0,1]} \frac{d\mu(s)}{e^{-i\omega} - s} = \int_{[0,1]^2} \frac{d\mu(t)d\mu(s)}{1+st-se^{i\omega}-te^{-i\omega}} = \\ &= \int_{[0,1]^2} \operatorname{Re} \frac{1}{1+st-se^{i\omega}-te^{-i\omega}} d\mu(t)d\mu(s) = \int_{[0,1]^2} \frac{1-(t+s)\cos\omega+ts}{(1-2t\cos\omega+t^2)(1-2s\cos\omega+s^2)} d\mu(t)d\mu(s). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться тем, что $1-(t+s)\cos\omega+ts \geq (1-t)(1-s)$.

Далее Z -преобразование $\tilde{H}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(n)z^{-n}$ будем называть *передаточной функцией* стационарного фильтра $\Phi = \Phi_W$ (используется также термин *системная функция*, см., например, [11], [15]).

Следующий пример дает нам широкий класс фильтров с рациональными передаточными функциями, подпадающих под действие теоремы 3.1.

Пример 3.1. Рассмотрим ДВ-ЛИВ-систему (рекурсивный фильтр) Φ конечного порядка, описываемую разностным уравнением ($a_k, b_l \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{k=0}^p a_k y[n+k] = \sum_{l=1}^q b_l x[n+l].$$

Предположим, что $q \leq p$ и характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^p a_k z^k = 0$$

имеет p различных корней $t_i \in [0, 1)$ ($i = 1, \dots, p$). Используя разложение на простейшие дроби, получаем для передаточной функции фильтра Φ представление

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{\sum_{l=1}^q b_l z^l}{\sum_{k=0}^p a_k z^k} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i z}{z - t_i} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{1 - t_i z^{-1}}, \quad (6)$$

где $\mu_i = \tilde{H}_1(z)(1 - t_i z^{-1})|_{z=t_i}$ — действительные числа. Мера $\mu := \sum_{i=1}^p \mu_i \delta_{t_i}$ (δ_{t_i} — мера единичной массы, сосредоточенная в точке t_i) удовлетворяет условию (3). Рассмотрим рациональную функцию типа Маркова–Стилтьеса

$$F(z) := S\mu(z) = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{1 - t_i z}.$$

Тогда $\Phi = F(D)$. В самом деле, импульсная характеристика системы $F(D)$, как было показано ранее, есть $h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i t_i^n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Поэтому передаточная функция фильтра $F(D)$ есть (при $|z| > \max_i |t_i|$)

$$\tilde{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^p \mu_i t_i^n \right) z^{-n} = \sum_{i=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} \mu_i \left(\frac{t_i}{z} \right)^n = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{1 - t_i z^{-1}} = \tilde{H}_1(z),$$

т. е. совпадает с передаточной функцией фильтра Φ . Таким образом, в силу теоремы 3.1 Φ является стационарным, каузальным и устойчивым фильтром с частотной характеристикой F и амплитудным искажением $\|F\|_{H^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{1-t_i z} \right|$. При этом

$$\|\Phi\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \|h\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^p \mu_i t_i^n \right|.$$

В силу следствия 3.1 для АЧХ этого фильтра имеем

$$A(\omega)^2 = \sum_{i,j=1}^p \frac{1 - (t_i + s_j) \cos \omega + t_i s_j}{(1 - 2t_i \cos \omega + t_i^2)(1 - 2s_j \cos \omega + s_j^2)} \mu_i \mu_j.$$

Далее, $\Phi = \sum_{i=1}^p \mu_i (I - t_i D)^{-1}$. Как известно, спектр оператора сдвига D в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$ есть единичный круг $\overline{\mathbb{D}}$, а потому оператор $(I - tD)^{-1}$ существует при $|t| < 1$. Легко проверить, что для любого финитного слева ДВ-сигнала $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ и любого t с $|t| < 1$

$$((I - tD)^{-1}x)[n] = t^{n-1}x[1] + t^{n-2}x[2] + \dots + tx[n-1] + x[n] \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Следовательно, в силу формулы (4) фильтр Φ при наших предположениях имеет вид

$$y[n] = (\Phi x)[n] = \sum_{i=1}^p \mu_i (t_i^{n-1}x[1] + t_i^{n-2}x[2] + \dots + t_i x[n-1] + x[n]) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Данная формула дает (при ограничениях, наложенных выше) также решение рассматриваемого разностного уравнения в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$.

Если дополнительно все $\mu_i > 0$, то мы будем иметь случай положительной меры. (Простейшая ситуация, когда это может произойти: $p = q = 1, a_1 = 1, a_0 \in (-1, 0), b_1 > 0$. В случае $p = q = 2$ речь идет о системах вида

$$y[n+2] + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = b_2 x[n+2] + b_1 x[n+1],$$

где $a_1 = -(t_1 + t_2), a_0 = t_1 t_2, b_1 = -(t_1 \mu_2 + t_2 \mu_1), b_2 = \mu_1 + \mu_2$, причем $t_1, t_2 \in [0, 1), \mu_1, \mu_2 > 0$.) В этом случае фильтр обратим и теорема 3.1 дает алгоритм его обращения.

Замечание 3.2. Случай положительной меры может возникнуть и при дискретизации НВ-систем конечного порядка. Действительно, если передаточная функция H_I такой системы разлагается на простейшие дроби следующим образом:

$$H_I(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - s_i},$$

то передаточная функция, возникающая при ее дискретизации, с шагом T ДВ-системы есть

$$\tilde{H}(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i T z}{z - e^{s_i T}} \quad (T > 0)$$

(см., например, [15], с. 167, (5-133), (5-134)). При $A_i > 0$ и $s_i < 0$ мы получаем передаточную функцию вида (6) с $\mu_i = A_i T > 0, t_i = e^{s_i T} \in [0, 1)$. Как показано в примере 3.1, соответствующая ДВ-система имеет вид $F(D)$ с положительной представляющей мерой $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \delta_{t_i}$.

Следующие две теоремы характеризуют фильтры вида $F(D)$ в терминах их передаточных функций. Для формулировки первой из них (в которой также описывается импульсная

характеристика) рассмотрим итерированные разностные операторы ($\Delta := I - D^{-1}$)

$$\Delta^n W(k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j W(j+k) \quad (k, n \in \mathbb{Z}_+).$$

Теорема 3.2. Пусть Φ есть стационарный и каузальный фильтр с передаточной функцией $\tilde{H}$ и импульсной характеристикой W . Следующие утверждения равносильны:

- 1) Φ имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu$, $\mu \in M_+^b([0, 1])$;
- 2) функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2;
- 3) $\Delta^n W(k) \geq 0$ ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), т.е. последовательность W вполне монотонна.

При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$, а W — последовательность моментов меры μ .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В обозначениях, введенных выше, если $\Phi = F(D) := S\mu(D)$, то $\forall n \quad W(n) = h(n)$. А поскольку

$$\tilde{H}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n) \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n = F\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

то функция $\tilde{H}(1/z) = F(z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2. Тогда $\tilde{H}(1/z) = S\mu(z)$, $\mu \geq 0$, где $z \in \mathbb{D}$. Отсюда следует $W(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), поэтому в силу теоремы Хаусдорфа выполняется утверждение 3) (см., например, [21]).

3) $\Rightarrow$ 1). Если выполняется 3), то по упомянутой теореме Хаусдорфа $W(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) для некоторой меры $\mu \in M_+^b([0, 1])$. Если мы положим $F(z) := S\mu(z)$, то в обозначениях, введенных выше, $h = W$. При этом для любой финитной слева последовательности из $\ell^2(\mathbb{Z})$ в силу формулы (5) будет выполняться равенство $\Phi x = W * x = F(D)x$. Следовательно, оператор $F(D)$ ограничен, поэтому $\Phi = F(D)$.

Теорема 3.3. Стационарный каузальный фильтр Φ с передаточной функцией $\tilde{H}$ имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu$, $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.

Авторы благодарят рецензента за замечания и предложения, способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалева И.С., Миротин А.Р. Преобразование Маркова–Стилтьеса мер и системы с дискретным временем, Пробл. физ., матем. и техн. **1** (38), 56–60 (2019).
- [2] Ковалева И.С., Миротин А.Р. Теорема о свертке для преобразования Маркова–Стилтьеса, Пробл. физ., матем. и техн. **3** (16), 66–70 (2013).
- [3] Mirotin A.R., Kovalyova I.S. The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces, Integral Transforms and Special Funct. **27** (12), 995–1007 (2016).
- [4] Mirotin A.R., Kovalyova I.S. Corrigendum to our paper «The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces», Integral Transforms and Special Funct. **28** (5), 421–422 (2017).
- [5] Миротин А.Р., Ковалева И.С. Обобщенный оператор Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди и Лебега, Тр. ин-та матем. **25** (1) 39–50 (2017).
- [6] Миротин А.Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах, Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
- [7] King F.W. Hilbert transforms: in 2 Vol., V.1., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009.
- [8] Вячеславов Н.С. Мочалина Е.П. Рациональные приближения функций типа Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди H^p , $0 < p \leq \infty$, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., № 4, 3–13 (2008).
- [9] Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи (Москва, Наука, 1973).

- [10] Nikolski N.K. *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading*, V.1 (Providence, American Math. Soc., 2002).
- [11] Сиберт И.М. *Цепи, сигналы, системы: в 2-х частях* (Мир, М., 1988).
- [12] Пекарский А.А. *Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова*, Алгебра и анализ **7**, 121–132, (1995).
- [13] Andersson J.-E. *Rational approximation to function like x^α in integral norms*, Anal. Math. **14** (1) 11–25 (1988).
- [14] Andersson J.-E. *Best rational approximation to Markov functions*, Approxim. Theory **76** (2) 219–232 (1994).
- [15] Papoulis A. *Signal analysis* (NY, McGraw Hill, 1977).
- [16] Хемминг Р.В. *Цифровые фильтры* (М.: Советск. радио, 1980).
- [17] Миротин А.Р., Аткиновский А.А. *О некоторых свойствах функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве*, Пробл. физ., матем. и техн., №4, 63–67, (2016).
- [18] Аткиновский А.А., Миротин А.Р. *Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II*, Изв. вузов. Матем. №5, 3–16 (2015).
- [19] Аткиновский А.А., Миротин А.Р. *Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения*, Пробл. физ., матем. и техн. **3** (16), 55–60 (2013).
- [20] Widder D.V. *The Laplace transform* (N.J., Princeton Univ. Press, 1946).
- [21] Ахизер Н.И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней* (М.: Физматлит, 1961).

Адо́льф Руви́мович Ми́ротин

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь,

e-mail: amirotin@yandex.ru

Ири́на Серге́евна Ковале́ва

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь,

e-mail: isida89@list.ru

A.R. Mirotin and I.S. Kovaleva

Discrete-time systems with frequency response of the Markov–Stieltjes type

Abstract. A class of discrete-time filters (systems) is selected, the frequency characteristics of which are functions of the Markov–Stieltjes type. A description of these filters is given in terms of their system function and impulse response. The properties of stationarity, causality, stability and reversibility are investigated. A wide class of filters with rational transfer functions is indicated, which is subject to the main results of the work.

Keywords: discrete time filter, discrete time system, Markov–Stieltjes type function, system function, transfer function, impulse response, frequency response.

Adolf Ruvimovich Mirotin

Francisk Skaryna Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

e-mail: amirotin@yandex.ru

Irina Sergeevna Kovaleva

Francisk Skaryna Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

e-mail: isida89@list.ru