Общероссийский математический портал

В. Н. Паймушин, В. А. Фирсов, В. М. Шишкин, Определение демпфирующих свойств удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием на основе исследования комплексных собственных частот, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 48–64

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-48-64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:28:16

В.Н. ПАЙМУШИН, В.А. ФИРСОВ, В.М. ШИШКИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДЕМПФИРУЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Аннотация. Приведена структура перспективного интегрального демпфирующего покрытия, состоящего по толщине из двух слоев вязкоупругого материала, между которыми располагается тонкий армирующий слой. Разработан четырехслойный конечный элемент с четырнадцатью степенями свободы для моделирования пластины с отмеченным демпфирующим покрытием, позволяющий учитывать эффект поперечного обжатия демпфирующих слоев при высокочастотных колебаниях пластины. Решена обобщенная проблема комплексных собственных значений на основе метода итераций в подпространстве для определения нескольких низших комплексных форм и частот свободных колебаний демпфированной пластины.

Ключевые слова: пластина, демпфирующее покрытие, логарифмический декремент колебаний, конечный элемент, комплексная частота.

УДК: 539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-48-64

ВВЕДЕНИЕ

Для снижения виброактивности и динамической напряженности элементов тонкостенных конструкций широко используются различные по исполнению демпфирующие покрытия (например, [1]–[4]). В качестве материалов для демпфирующих слоев используются эластомеры на основе каучука или термопласты на основе битума с различного рода наполнителями (волокно, известняк, глина, усилитель клейкости и т. д.) для достижения необходимых характеристик демпфирования (например, [5]–[7]). При этом классическими являются однослойные покрытия со свободным или связанным демпфирующим слоем ([8], с. 272). В первом случае демпфирование колебаний происходит в основном за счет деформаций растяжения-сжатия, во втором — за счет поперечного сдвига демпфирующего слоя, что не позволяет эффективно демпфировать колебания во всех областях конструкции при колебаниях на высоких собственных формах. С этой точки зрения перспективным является интегральное демпфирующее покрытие (рис. 1), состоящее по толщине из двух вязкоупругих слоев, между которыми расположен тонкий армирующий слой из высокомодульного материала (металлической фольги, углеткани и пр.). Связанный слой при изгибных колебаниях тонкостенной конструкции работает на сдвиг, а свободный слой испытывает деформации

Поступила в редакцию 13.06.2019, после доработки 13.06.2019. Принята к публикации 19.06.2019.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00058).

растяжения-сжатия. Это позволяет интегрировать зоны активного демпфирования колебаний, практически избавляясь от областей балластного покрытия конструкции при любой форме изгибных колебаний в широком спектре эксплуатационных частот.

Рис. 1. Структура интегрального демпфирующего покрытия

Основной задачей расчета конструкций с вибропоглощающими покрытиями является определение характеристик демпфирования конструкции при гармонических колебаниях, близких к ее собственным частотам, что, обычно, предполагает предварительный модальный анализ (определение собственных форм и частот) недемпфированной конструкции, необходимый для определения динамической реакции и характеристик демпфирования конструкции при резонансных колебаниях по нескольким низшим собственным формам. Данный подход позволяет определять демпфирующие свойства конструкции как при постоянных характеристиках демпфирования материала демпфирующих слоев, так и случае зависимости их от амплитуд соответствующих деформаций. В последнем случае решение задачи необходимо итерировать, пересчитывая характеристики демпфирования материала вязкоупругих слоев на каждой итерации в соответствии с достигнутым уровнем деформаций, что является предметом дальнейших исследований. Однако если демпфирующие свойства материала вязкоупругих слоев постоянны (т.е. не зависят от амплитуды деформации), то демпфирующие свойства конструкции можно определить по мнимым частям комплексных частот [9], определяемым еще на этапе ее модального анализа. В настоящей работе данный подход используется для определения характеристик демпфирования удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием.

1. КОМПЛЕКСНАЯ МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Известно ([10], с. 9), что при гармоническом законе деформирования вязкоупругого материала деформация ε отстает от напряжения σ на некоторый угол φ . Это приводит к неоднозначности кривых деформирования $\sigma(\varepsilon)$ при нагрузке и разгрузке материала и образованию замкнутой петли гистерезиса, площадь которой дает энергию, рассеянную в единице объема материала за один цикл колебаний. При резонансных колебаниях, когда частота деформирования материала ω совпадает с одной из частот ω_j свободных колебаний конструкции, $\tan \varphi = \delta/\pi$ ([10], с. 9), где δ — логарифмический декремент колебаний (ЛДК) материала, являющийся (так же, как и угол φ) одной из мер внутреннего трения в материале.

Фазовые соотношения удобно выражать в комплексной форме:

$$\sigma_0 e^{i\omega t} = E^* \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (1)$$

Здесь σ_0 , ε_0 — соответственно амплитуда напряжения и амплитуда деформации, E^* — комплексный модуль упругости, t — время, i — мнимая единица. Из (1) следует

$$E^* = \sigma_0 e^{i\omega t} / \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \sigma_0 e^{i\varphi} / \varepsilon_0. \quad (2)$$

Применяя после этого формулу $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, вместо (2) получаем

$$E^* = \sigma_0(\cos \varphi + i \sin \varphi)/\varepsilon_0 = \sigma_0 \cos \varphi(1 + i \delta/\pi)/\varepsilon_0. \quad (3)$$

Величина $\sigma_0 \cos \varphi$ представляет составляющую комплексного напряжения $\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}$, совпадающую по фазе с комплексной деформацией $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$, а отношение $\sigma_0 \cos \varphi/\varepsilon_0$ есть модуль упругости E при циклическом деформировании материала. С учетом этого выражение (3) принимает вид

$$E^* = E(1 + i \delta/\pi).$$

Вещественная часть комплексного модуля E^* определяет упругие свойства при циклическом растяжении-сжатии материала, а мнимая часть — демпфирующие свойства. Таким образом, вместо (1) можно записать зависимость

$$\sigma^* = E(1 + i \delta/\pi) \varepsilon^*, \quad (4)$$

выражающую известную модель Е.С. Сорокина (например, ([11], [12]) (гипотезу комплексного внутреннего трения) при гармоническом законе деформирования материала, находящегося в одноосном напряженном состоянии. Зависимость (4) можно обобщить на случай сложного напряженного состояния вязкоупругого материала:

$$\sigma^* = \mathbf{D}^* \varepsilon^*.$$

Векторы σ^* и ε^* содержат соответственно комплексные напряжения и комплексные деформации; $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + i\mathbf{D}_g$ — комплексная матрица жесткости, содержащая матрицу жесткости $\mathbf{D}$ и матрицу демпфирования $\mathbf{D}_g$ отмеченного материала. Для изотропного вязкоупругого материала, находящегося в плоском напряженном состоянии, данные матрицы имеют вид:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{E/(1-\nu^2)}{E\nu/(1-\nu^2)} & \frac{E\nu/(1-\nu^2)}{E/(1-\nu^2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & G \end{array} \right], \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_g = \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2)}{E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2)} & \frac{E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2)}{E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & G\delta_\gamma \end{array} \right].$$

Здесь $E, G, \delta_\varepsilon, \delta_\gamma$ — модули упругости и ЛДК материала соответственно при растяжении-сжатии и сдвиге; ν — коэффициент Пуассона. В случае зависимости характеристик упругости вязкоупругого материала от частоты деформирования ω в качестве E и G необходимо брать соответствующие динамические модули упругости материала [13].

2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, аппроксимация перемещений и геометрические зависимости

Для моделирования свободных колебаний удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием предлагается использовать метод конечных элементов (МКЭ) (например, [14]–[16]). С этой целью разработан четырехслойный конечный элемент с четырнадцатью степенями свободы (рис. 2): слой 1 (основной материал) работает в рамках гипотез Кирхгофа–Лява; демпфирующие слои 2 и 4 находятся в плоском напряженном состоянии; армирующий слой 3 работает на растяжение-сжатие (толщина данного слоя считается пренебрежимо малой). Независимыми узловыми параметрами элемента являются: перемещения u_i, w_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) и углы поворота φ_1, φ_4 поперечных сечений слоя 1, представляемые вектором

$$\mathbf{r}^{(e)} = \{u_1 \ w_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3 \ u_4 \ w_4 \ \varphi_4 \ u_5 \ w_5 \ u_6 \ w_6\}.$$

Рис. 2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием

Слой 1 элемента находится в состоянии растяжения-сжатия и изгиба. Для моделирования данного состояния перемещения $u^{(1)}$, $w^{(1)}$ произвольной точки, расположенной на оси данного слоя, аппроксимируются зависимостями

$$u^{(1)} = \{H_1 \ 0 \ 0 \ H_2 \ 0 \ 0\}^T \mathbf{r}^{(1)}, \quad w^{(1)} = \{0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4\}^T \mathbf{r}^{(1)} \quad (6)$$

с вектором узловых перемещений $\mathbf{r}^{(1)} = \{u_1 \ w_1 \ \varphi_1 \ u_4 \ w_4 \ \varphi_4\}$ и базисными функциями

$$H_1 = 1 - x/l, \quad H_2 = x/l, \quad N_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, \quad N_2 = x - 2x^2/l + x^3/l^2, \quad N_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, \\ N_4 = -x^2/l + x^3/l^2.$$

Деформация $\varepsilon_x^{(1)}$ в точке, расположенной на расстоянии z_1 от оси слоя 1, определяется геометрической зависимостью

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{d}{dx}(u^{(1)} - \varphi^{(1)} z_1) = \frac{d}{dx}(u^{(1)} - w^{(1)} z_1) = u'^{(1)} - w''^{(1)} z_1.$$

С учетом аппроксимаций (6) последнюю зависимость можно привести к виду

$$\varepsilon_x^{(1)} = (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{B}^{(1)} = \{H'_1 \ 0 \ 0 \ H'_2 \ 0 \ 0\} - \{0 \ N''_1 \ N''_2 \ 0 \ N''_3 \ N''_4\} z_1.$$

Перемещения $u^{(2)}$, $w^{(2)}$ произвольной точки слоя 2 с координатами x , z_2 представляются билинейными зависимостями

$$u^{(2)} = \left[\left(u_1 - \varphi_1 \frac{h_1}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \left(u_4 - \varphi_4 \frac{h_1}{2} \right) \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) + \left[u_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_5 \frac{x}{l} \right] \frac{z_2}{h_2}, \quad (8)$$

$$w^{(2)} = \left[w_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_4 \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) + \left[w_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_5 \frac{x}{l} \right] \frac{z_2}{h_2}. \quad (9)$$

Деформации $\varepsilon_x^{(2)}$, $\varepsilon_z^{(2)}$ и угол сдвига $\gamma_{xz}^{(2)}$ рассматриваемого слоя определяются геометрическими зависимостями (соотношениями Коши)

$$\varepsilon_x^{(2)} = \partial u^{(2)} / \partial x, \quad \varepsilon_z^{(2)} = \partial w^{(2)} / \partial z_2, \quad \gamma_{xz}^{(2)} = \partial w^{(2)} / \partial x + \partial u^{(2)} / \partial z_2.$$

С учетом представлений (8) и (9) величины $\varepsilon_x^{(2)}$, $\varepsilon_z^{(2)}$ и $\gamma_{xz}^{(2)}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_z^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^{(2)}] \mathbf{r}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(2)} \mid \mathbf{B}_2^{(2)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(e)} \\ \mathbf{r}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{B}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{-(1-z_2/h_2)}{l} & 0 & \frac{h_1(1-z_2/h_2)}{2l} & \frac{-z_2}{h_2 l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(1-x/l)}{h_2} & 0 & 0 & \frac{(1-x/l)}{h_2} & 0 & 0 \\ \frac{-(1-x/l)}{h_2} & \frac{-(1-z_2/h_2)}{l} & \frac{(1-x/l)h_1}{2h_2} & \frac{(1-x/l)}{h_2} & \frac{-z_2}{h_2 l} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{(1-z_2/h_2)}{l} & 0 & \frac{-h_1(1-z_2/h_2)}{2l} & \frac{z_2}{h_2 l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-x}{h_2 l} & 0 & 0 & \frac{x}{h_2 l} & 0 & 0 \\ \frac{-x}{h_2 l} & \frac{1-z_2/h_2}{l} & \frac{xh_1}{2h_2 l} & \frac{x}{h_2 l} & \frac{z_2}{h_2 l} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_1^{(e)} = \{u_1 \ w_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3\}, \quad \mathbf{r}_2^{(e)} = \{u_4 \ w_4 \ \varphi_4 \ u_5 \ w_5 \ u_6 \ w_6\}.$$

Перемещение $u^{(3)}$ произвольной точки армирующего слоя 3 аппроксимируется линейной зависимостью $u^{(3)} = u_2(1-x/l) + u_5 x/l$, которая дает постоянную в пределах элемента деформацию

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{1}{l} \{-1 \ 1\}^T \mathbf{r}^{(3)}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_5 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Перемещения $u^{(4)}$, $w^{(4)}$ точки слоя 4 с координатами x , z_4 представляются зависимостями

$$u^{(4)} = \left[u_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_5 \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) + \left[u_3 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_6 \frac{x}{l} \right] \frac{z_4}{h_4}, \quad (14)$$

$$w^{(4)} = \left[w_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_5 \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) + \left[w_3 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_6 \frac{x}{l} \right] \frac{z_4}{h_4}. \quad (15)$$

Деформации $\varepsilon_x^{(4)}$, $\varepsilon_z^{(4)}$ и угол сдвига $\gamma_{xz}^{(4)}$ рассматриваемого слоя связаны с перемещениями $u^{(4)}$, $w^{(4)}$, геометрическими зависимостями $\varepsilon_x^{(4)} = \partial u^{(4)} / \partial x$; $\varepsilon_z^{(4)} = \partial w^{(4)} / \partial z_4$; $\gamma_{xz}^{(4)} = \partial w^{(4)} / \partial x + \partial u^{(4)} / \partial z_4$. С учетом представлений (14) и (15) получаем связь $\varepsilon_x^{(4)}$, $\varepsilon_z^{(4)}$ и $\gamma_{xz}^{(4)}$ с узловыми перемещениями $\mathbf{r}^{(e)}$ конечного элемента:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(4)} \\ \varepsilon_z^{(4)} \\ \gamma_{xz}^{(4)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^{(4)}] \mathbf{r}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(4)} \mid \mathbf{B}_2^{(4)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(e)} \\ \mathbf{r}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{B}_1^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \frac{-(1-z_4/h_4)}{l} & 0 & \frac{-z_4}{h_4 l} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(1-x/l)}{h_4} & 0 & \frac{1-x/l}{h_4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-(1-x/l)}{h_4} & \frac{-(1-z_4/h_4)}{l} & \frac{1-x/l}{h_4} & \frac{-z_4}{h_4 l} \end{array} \right], \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_2^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \frac{1-z_4/h_4}{l} & 0 & \frac{z_4}{h_4 l} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-x}{h_4 l} & 0 & \frac{x}{h_4 l} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-x}{h_4 l} & \frac{1-z_4/h_4}{l} & \frac{x}{h_4 l} & \frac{z_4}{h_4 l} \end{array} \right]. \quad (18)$$

3. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ, МАТРИЦА ДЕМПФИРОВАНИЯ И МАТРИЦА МАСС КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДЕМПФИРУЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

При динамическом анализе конструкций на основе МКЭ, обычно, ставится задача синтеза упругих, демпфирующих и инерционных сил, что требует получения матриц жесткости, матриц демпфирования и матриц масс составляющих конструкцию конечных элементов. Для четырехслойного конечного элемента удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием данные матрицы проще всего получить путем прямого сложения соответствующих вкладов слоев, формируемых относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ конечного элемента:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}^{(i)}; \quad \mathbf{C}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}^{(i)}; \quad \mathbf{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}^{(i)}.$$

Матрицы $\mathbf{K}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) можно получить из выражений для потенциальной энергии деформации $U^{(i)}$ соответствующих слоев элемента. Найдем

$$U^{(1)} = 0.5bE_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l (\varepsilon_x^{(1)})^2 dx dz_1. \quad (19)$$

Здесь b — ширина элемента, E_1 — динамический модуль упругости материала первого слоя. Величину $(\varepsilon_x^{(1)})^2$ с учетом (7) можно представить в виде $(\varepsilon_x^{(1)})^2 = (\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)}$. Подставляя последнее выражение в (19), получаем

$$U^{(1)} = 0.5bE_1 (\mathbf{r}^{(1)})^T \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^T dx dz_1 \mathbf{r}^{(1)}.$$

После нахождения определенных интегралов выражение для $U^{(1)}$ можно привести к виду

$$U^{(1)} = 0.5(\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{K}_0^{(1)} \mathbf{r}^{(1)},$$

где $\mathbf{K}_0^{(1)}$ — матрица жесткости первого слоя относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(1)}$:

$$\mathbf{K}_0^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} EF_1/l & 0 & 0 & -EF_1/l & 0 & 0 \\ \hline 0 & 12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 & 0 & -12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 \\ \hline 0 & 6EI_1/l^2 & 4EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 2EI_1/l \\ \hline -EF_1/l & 0 & 0 & EF_1/l & 0 & 0 \\ \hline 0 & -12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 & 0 & 12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 \\ \hline 0 & 6EI_1/l^2 & 2EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 4EI_1/l \end{array} \right],$$

$$EF_1 = E_1 b h_1, EI_1 = E_1 b h_1^3 / 12.$$

Для перехода к матрице $\mathbf{K}^{(1)}$ относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ всего элемента необходимо воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{K}^{(1)} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \mathbf{K}_0^{(1)} \mathbf{L}^{(1)},$$

где $\mathbf{L}^{(1)}$ — матрица связи вектора $\mathbf{r}^{(1)}$ с вектором $\mathbf{r}^{(e)}$,

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{r}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (20)$$

Потенциальная энергия деформации второго и четвертого слоев элемента

$$U^{(i)} = 0.5b \int_0^{h_i} \int_0^l (\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} dx dz_i \quad (i = 2, 4). \quad (21)$$

Матрицы жесткости материала

$$\mathbf{D}^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c|c} E_i/(1-\nu_i^2) & E_i\nu_i/(1-\nu_i^2) & 0 \\ \hline E_i\nu_i/(1-\nu_i^2) & E_i/(1-\nu_i^2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & G_i \end{array} \right].$$

Выражение (21) с учетом зависимостей (10) и (16) можно записать в виде

$$U^{(i)} = 0.5(\mathbf{r}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{r}^{(e)} \quad (i = 2, 4),$$

где

$$\mathbf{K}^{(i)} = b \int_0^{h_i} \int_0^l (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} dx dz_i \quad (22)$$

— вклад слоя i в матрицу жесткости $\mathbf{K}^{(e)}$ конечного элемента.

Введем замену координат

$$x = (1 + \xi)l/2; \quad z_i = (1 + \eta)h_i/2; \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (23)$$

С учетом (23) выражение (22) принимает вид

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} d\xi d\eta. \quad (24)$$

Интеграл в (24) находится численно. Из выражений (11), (12), (17), (18) и введенной замены (23) вытекает, что произведение $(\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}$ под интегралом квадратично зависит от координат ξ, η . В этом случае для точного вычисления интеграла следует использовать

квадратурную формулу Гаусса с двумя точками по каждому координатному направлению (например, [17], с. 602):

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n. \quad (25)$$

Здесь $\xi_1 = \eta_1 = -0.57735$, $\xi_2 = \eta_2 = 0.57735$ — координаты точек Гаусса, $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 1$.

Потенциальная энергия деформации третьего (армирующего) слоя

$$U^{(3)} = 0.5EF_3 \int_0^l (\varepsilon_x^{(3)})^2 dx.$$

Здесь EF_3 — динамическая жесткость слоя при растяжении-сжатии. С учетом соотношения (13)

$$U^{(3)} = 0.5(\mathbf{r}^{(3)})^T \mathbf{K}_0^{(3)} \mathbf{r}^{(3)},$$

где

$$\mathbf{K}_0^{(3)} = \frac{EF_3}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

— матрица жесткости армирующего слоя относительно узловых перемещений $\mathbf{r}^{(3)} = \{u_2 \ u_5\}$ данного слоя. Для перехода к матрице $\mathbf{K}^{(3)}$ относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ всего элемента следует воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{K}^{(3)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \mathbf{K}_0^{(3)} \mathbf{L}^{(3)},$$

где $\mathbf{L}^{(3)}$ — матрица связи вектора $\mathbf{r}^{(3)}$ с вектором $\mathbf{r}^{(e)}$:

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{r}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

Перейдем к определению матриц демпфирования $\mathbf{C}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) слоев элемента. Матрицы демпфирования слоев 1 и 3 (если учитывать их демпфирующие свойства), как вытекает из (4), могут быть получены путем умножения матриц жесткости $\mathbf{K}^{(i)}$ ($i = 1, 3$) соответственно на величины δ_i/π , где δ_i — ЛДК материала данных слоев при циклическом растяжении-сжатии:

$$\mathbf{C}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \delta_i / \pi \quad (i = 1, 3).$$

Матрицы демпфирования слоев 2 и 4 получаются путем замены в соотношении (25) матриц $\mathbf{D}^{(i)}$ ($i = 2, 4$) матрицами $\mathbf{D}_g^{(i)}$, определяемыми согласно второму выражению в (5):

$$\mathbf{C}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T \mathbf{D}_g^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n \quad (i = 2, 4).$$

При формировании матриц масс $\mathbf{M}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) слоев элемента считается, что их кинетическая энергия $T^{(i)}$ определяется только скоростями $\dot{w}^{(i)}$ в направлении оси 1z (рис. 2). Для представления данных скоростей используются аппроксимации

$$\dot{w}^{(1)} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{r}}^{(1)}, \quad \mathbf{N} = \{0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4\}, \quad (26)$$

$$\dot{w}^{(i)} = (\mathbf{N}^{(i)})^T \dot{\mathbf{r}}^{(e)} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{(i)} \\ \mathbf{N}_2^{(i)} \end{bmatrix} \right\}^T \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \quad (i = 2, 4), \quad (27)$$

$$\dot{w}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{array} \right\}, \quad H_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad H_2 = \frac{x}{l}. \quad (28)$$

Векторы $\mathbf{N}^{(i)}$ состоят из блоков $\mathbf{N}_1^{(i)}$ и $\mathbf{N}_2^{(i)}$:

$$\mathbf{N}_1^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & (1 - \frac{x}{l}) & (1 - \frac{z_2}{h_2}) & 0 & 0 & (1 - \frac{x}{l}) & \frac{z_2}{h_2} & 0 & 0 \end{array} \right\}, \quad (29)$$

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & \frac{x}{l} & (1 - \frac{z_2}{h_2}) & 0 & 0 & \frac{x}{l} & \frac{z_2}{h_2} & 0 & 0 \end{array} \right\}, \quad (30)$$

$$\mathbf{N}_1^{(4)} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \frac{x}{l}) & (1 - \frac{z_4}{h_4}) & 0 & (1 - \frac{x}{l}) & \frac{z_4}{h_4} \end{array} \right\}, \quad (31)$$

$$\mathbf{N}_2^{(4)} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} & (1 - \frac{z_4}{h_4}) & 0 & \frac{x}{l} & \frac{z_4}{h_4} \end{array} \right\}. \quad (32)$$

Найдем кинетическую энергию первого слоя:

$$T^{(1)} = 0.5 m_1 \int_0^l (\dot{w}^{(1)})^2 dx.$$

Здесь $m_1 = \rho_1 b h_1$ — погонная масса слоя (ρ_1 — плотность материала). С учетом (26)

$$T^{(1)} = 0.5 m_1 (\dot{\mathbf{r}}^{(1)})^T \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \dot{\mathbf{r}}^{(1)}.$$

Отсюда следует матрица масс первого слоя относительно узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}$:

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = m_1 \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx.$$

После нахождения определенного интеграла получаем

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13l/35 & 11l^2/210 & 0 & 9l/70 & -13l^2/420 \\ 0 & 11l^2/210 & l^3/105 & 0 & 13l^2/420 & -l^3/140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9l/70 & 13l^2/420 & 0 & 13l/35 & -11l^2/210 \\ 0 & -13l^2/420 & -l^3/140 & 0 & -11l^2/210 & l^3/105 \end{bmatrix}.$$

Для перехода к матрице $\mathbf{M}^{(1)}$ относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ всего элемента необходимо использовать преобразование

$$\mathbf{M}^{(1)} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \mathbf{M}_0^{(1)} \mathbf{L}^{(1)}$$

с матрицей $\mathbf{L}^{(1)}$, определяемой выражениями (20).

Кинетическая энергия второго и четвертого слоев элемента

$$T^{(i)} = 0.5 b \rho_i \int_0^{h_i} \int_0^l (\dot{w}^{(i)})^2 dx dz_i \quad (i = 2, 4).$$

С учетом аппроксимации (27) выражение для $T^{(i)}$ можно привести к виду

$$T^{(i)} = 0.5 (\dot{\mathbf{r}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(i)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)},$$

где

$$\mathbf{M}^{(i)} = b\rho_i \int_0^{h_i} \int_0^l \mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T dx dz_i \quad (i = 2, 4)$$

— матрица масс слоя i относительно узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ элемента. Перейдем к безразмерным координатам ξ, η , используя замену (23):

$$\mathbf{M}^{(i)} = \frac{blh_i\rho_i}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T d\xi d\eta. \quad (33)$$

Из выражений (23), (27) и (29)–(32) видно, что произведение $\mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T$ в (33) квадратично зависит от координат ξ, η . Для точного вычисления определенного интеграла можно использовать, как и прежде, квадратурную формулу Гаусса с двумя точками по каждой из отмеченных координат

$$\mathbf{M}^{(i)} = \frac{blh_i\rho_i}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \mathbf{N}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) (\mathbf{N}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T P_m Q_n$$

при $\xi_1 = \eta_1 = -0.57735$, $\xi_2 = \eta_2 = 0.57735$ и $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 1$.

Кинетическая энергия третьего слоя

$$T^{(3)} = 0.5 m_3 \int_0^l (\dot{w}^{(3)})^2 dx.$$

Здесь m_3 — погонная масса слоя. С учетом аппроксимации (28) выражение для $T^{(3)}$ можно привести к виду

$$T^{(3)} = 0.5 \left\{ \begin{array}{c} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{array} \right\}^T \mathbf{M}_0^{(3)} \left\{ \begin{array}{c} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{array} \right\},$$

где

$$\mathbf{M}_0^{(3)} = m_3 \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \end{array} \right\}^T dx = \frac{m_3 l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица масс третьего слоя относительно узловых скоростей $\dot{w}_2, \dot{w}_5$. Для перехода к вектору узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ всего элемента используется преобразование

$$\mathbf{M}^{(3)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \mathbf{M}_0^{(3)} \mathbf{L}^{(3)},$$

где $\mathbf{L}^{(3)}$ — матрица связи скоростей $\dot{w}_2$ и $\dot{w}_5$ с вектором $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{array} \right\} = \mathbf{L}^{(3)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФОРМ И ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Введенная в разделе 1 концепция комплексной матрицы жесткости $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + i\mathbf{D}_g$ при гармоническом законе деформирования вязкоупругого материала дает возможность построить комплексную матрицу жесткости конечного элемента пластины с интегральным демпфирующим покрытием, учитывающую его упругие и демпфирующие свойства:

$$\mathbf{K}^{*(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + i\mathbf{C}^{(e)}.$$

Уравнения свободных колебаний демпфированного конечного элемента формируются относительно его комплексных узловых перемещений $\mathbf{r}^{*(e)}$:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{r}}^{(e)} + \mathbf{K}^{*(e)} \mathbf{r}^{(e)} = 0. \quad (34)$$

Объединяя уравнения (34) по направлениям общих для смежных элементов узловых перемещений приходим к уравнениям свободных колебаний конечно-элементной модели демпфированной пластины

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{r}^* = 0.$$

Здесь $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{r}^*$ — соответственно матрица масс, комплексная матрица жесткости и комплексный вектор узловых перемещений отмеченной модели. С помощью подстановки $\mathbf{r}^* = \mathbf{F}^* e^{i\omega^* t}$ приходим к обобщенной проблеме собственных значений

$$(\mathbf{K}^* - \lambda^* \mathbf{M}) \mathbf{F}^* = 0, \quad (35)$$

где $\lambda^* = (\omega^*)^2$ — комплексное собственное значение, ω^* — комплексная частота, $\mathbf{F}^*$ — комплексная форма колебаний. Демпфирующие свойства пластины при колебаниях по некоторой форме $\mathbf{F}_j^*$ определяются логарифмическим декрементом колебаний $\delta_j = 2\pi\omega''_j/\omega'_j$, где ω''_j , ω'_j — соответственно мнимая и вещественная части комплексной частоты ω_j^* .

Для решения проблемы (35) можно воспользоваться известным методом вращений Якоби (например, [18], с. 623), реализуемым встроенными функциями (решателями) популярных пакетов компьютерной математики MATLAB, Mathcad, Mathematica, дающими полный спектр комплексных форм и частот, но это требует значительных вычислительных затрат — примерно в три раза превышающих затраты на решение задачи без учета демпфирования по оценкам работы [19]. Однако, необходимо заметить, что практический интерес имеют лишь несколько низших собственных пар (форм и частот). Поэтому предпочтительными будут методы, основанные на итерировании матриц ([20]–[22]), из которых наиболее подходящим является метод итераций в подпространстве ([20], с. 418), позволяющий итерировать одновременно несколько низших форм и частот. В работе [23] изложены меры, направленные на обеспечение безусловной устойчивости и повышение скорости сходимости отмеченного метода. Но даже при определении только нижней части спектра комплексных форм и частот вычислительные затраты на решение проблемы (35) остаются по-прежнему довольно высокими. Данные затраты можно значительно уменьшить (для задачи определения комплексных частот демпфированной удлиненной пластины примерно на порядок), если учесть симметрию и ленточную структуру матриц $\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{M}$, формируя их не в квадратных (как обычно), а в прямоугольных массивах, столбцами которого являются соответствующие диагонали ленты ([15], с. 110).

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проведения численных экспериментов выбрана удлиненная шарнирно опертая пластина с интегральным демпфирующим покрытием. Геометрические параметры пластины: длина $L = 200$ мм; ширина $b = 20$ мм; толщина $h_1 = 1$ мм. Толщины демпфирующих слоев: $h_2 = h_4 = 1.8$ мм. Армирующий слой имеет толщину $h_3 = 0.12$ мм. Материал пластины — алюминиевый сплав Д16АТ с динамическим модулем упругости $E = 5.54 \cdot 10^4$ МПа, ЛДК при растяжении-сжатии $\delta = 0.005$ и плотностью $\rho = 2700$ кг/м³. Материал демпфирующих слоев — техническая резина. Динамические модули упругости и ЛДК резины при растяжении-сжатии и сдвиге $E = 20.1$ МПа; $G = 2.6$ МПа, $\delta_\epsilon = 1.23$, $\delta_\gamma = 1.1$. Плотность резины $\rho = 1345$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.49$. Армирующий слой — углерод ЭЛУР-П (динамический модуль упругости $E = 10.5 \cdot 10^4$ МПа, ЛДК при растяжении-сжатии

$\delta = 0.006$, плотность $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$). Пластина разбивалась на 100 конечных элементов одинаковой длины. С целью снижения вычислительных затрат матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + i\mathbf{C}$ конечно-элементной модели пластины формировались в прямоугольных массивах с расположением главных диагоналей данных матриц в первых столбцах массивов. Учет условий закрепления пластины осуществлялся умножением диагональных элементов k_{ii} матрицы $\mathbf{K}$, где i — номера нулевых перемещений, на параметр штрафа $\alpha = 1 \cdot 10^8$.

В табл. 1 приведены вещественные части f'_j и мнимые части f''_j пятнадцати низших циклических комплексных частот $f_j^* = \omega_j^* / (2\pi)$ свободных колебаний пластины, найденные из системы (35) методом итераций в подпространстве, и соответствующие значения ЛДК

$$\delta_j = 2\pi f''_j / f'_j. \quad (36)$$

ТАБЛИЦА 1.

j	f'_j , Гц	f''_j , Гц	δ_j по формуле (36)	f_j , Гц	δ_j по формуле (38)
1	71.09	6.23	0.551	70.05	0.576
2	193.36	17.55	0.570	191.84	0.581
3	360.01	24.79	0.433	358.68	0.436
4	580.97	29.32	0.317	579.89	0.318
5	816.12	32.62	0.238	859.15	0.239
6	1198.57	35.692	0.187	1197.45	0.188
7	1596.04	39.45	0.155	1594.31	0.157
8	2051.05	44.97	0.138	2047.90	0.141
9	2560.78	53.74	0.132	2554.89	0.138
10	3120.79	67.83	0.137	3110.04	0.145
11	3724.57	90.10	0.152	3705.77	0.165
12	4363.03	124.27	0.179	4331.69	0.198
13	5023.98	174.87	0.219	4974.27	0.244
14	5691.83	246.76	0.272	5617.03	0.306
15	6347.62	343.99	0.340	6241.41	0.383

В последних двух столбцах табл. 1 для сравнения приведены недемпфированные частоты f_j , полученные из системы

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{F} = 0, \quad (37)$$

и ЛДК δ_j , найденные энергетическим методом ([24], с. 12):

$$\delta_j = \Delta W_j / (2W_{j,\max}). \quad (38)$$

Здесь ΔW_j , $W_{j,\max}$ — соответственно рассеянная и максимальная энергии в объеме пластины при резонансе по форме $\mathbf{F}_j$ за один цикл колебаний. Резонансные колебания возбуждались погонной нагрузкой $q(t) = q_0 \cos(pt)$ с амплитудой $q_0 = 0.12 \text{ кН/м}$ и частотой $p = \omega_j$. Для получения по формуле (38) значений δ_j при резонансных колебаниях по всем пятнадцати формам $\mathbf{F}_j$ (четным и нечетным) нагрузка $q(t)$ прикладывалась до середины пластины (при $q(t)$, приложенной по всей длине, резонансные колебания можно возбудить только по нечетным формам $\mathbf{F}_j$).

Анализ результатов, приведенных в табл. 1, показывает, что вещественные части f'_j комплексных частот f_j^* демпфированной пластины получаютсЯ незначительно больше частот f_j , полученных без учета демпфирования (аналогичный факт отмечен в работе [25] при анализе влияния демпфирования на собственные частоты линейных динамических систем). Значения ЛДК δ_j , полученные по формулам (36) и (38), получаютсЯ достаточно близкими

между собою. Причем, в обоих случаях, начиная со второй формы до девятой, значения δ_j монотонно убывают, а далее наблюдается их значительный рост, который можно объяснить влиянием на δ_j рассеяния энергии, обусловленного нормальными напряжениями σ_z на высоких частотах колебаний. Что касается комплексных собственных форм $\mathbf{F}_j^*$, то исследования показали, что их нормированные вещественные и мнимые части практически совпадают с соответствующими нормированными формами $\mathbf{F}_j$, полученными из системы (37) для упругой пластины (без учета демпфирующих свойств материала).

На рис. 3 приведены ЛДК δ , полученные по формуле (36), в зависимости от частоты f для трех расчетных случаев: 1 — с учетом всех компонент плоского напряженного состояния демпфирующих слоев пластины; 2 — без учета влияния на δ напряжения σ_z в свободном демпфирующем слое; 3 — то же для связанного демпфирующего слоя. Наблюдается слабое уменьшение ЛДК δ в расчетном случае 2 и значительное падение δ на высоких частотах колебаний в расчетном случае 3 по сравнению с исходными результатами (расчетным случаем 1). Отсюда можно сделать вывод о том, что значительное увеличение демпфирующих свойств пластины на высоких частотах колебаний в расчетном случае 1 в основном происходит за счет рассеяния энергии при поперечном обжатии связанного слоя. Разработанный

Рис. 3. Зависимости ЛДК δ пластины с интегральным демпфирующим покрытием от частоты f (пояснения в тексте)

конечный элемент (рис. 2) удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием может использоваться и для моделирования многослойных удлиненных пластин другой структуры. В работе [26] определены десять низших собственных частот ω_j и соответствующие им коэффициенты потерь η_j ($\eta_j = \delta_j/\pi$) трехслойной шарнирно опертой пластины с жесткими внешними слоями и вязкоупругим внутренним слоем. Результаты были получены с использованием трехслойного конечного элемента, в котором каждый слой рассматривался как балка Тимошенко с выполнением условий неразрывности перемещений между слоями. Геометрические параметры пластины: длина $L = 600$ мм; толщина внешних слоев $h_1 = 1.5$ мм, $h_3 = 4.0$ мм; толщина внутреннего слоя $h_2 = 0.5$ мм. Механические характеристики материалов слоев пластины (материалы в работе [26] не названы): $E_1 = 69000$ МПа, $\nu_1 = 0.32$; $G_1 = E_1/2(1 + \nu_1)$; $\rho_1 = 2760$ кг/м³; $\delta_{\epsilon,1} = \delta_{\gamma,1} = 0.104$; $E_2 = 1.76$ МПа; $\nu_2 = 0.49$; $G_2 = E_2/2(1 + \nu_2)$; $\rho_2 = 980$ кг/м³; $\delta_{\epsilon,2} = \delta_{\gamma,2} = 2.73$; $E_3 = 36000$ МПа; $\nu_3 = 0.28$; $G_3 = E_3/2(1 + \nu_3)$; $\rho_3 = 1900$ кг/м³; $\delta_{\epsilon,3} = \delta_{\gamma,3} = 0.0126$.

Для определения собственных частот f_j и ЛДК δ_j трехслойной пластины использовался разработанный конечный элемент (рис. 2) при нулевой толщине армирующего слоя. На рис. 4, 5 приведены соответственно частоты f_j и соответствующие им ЛДК δ_j рассматриваемой пластины: точки – результаты, полученные с использованием разработанного конечного элемента; квадраты – результаты работы [26]. Наблюдается хорошее согласование частот f_j в диапазоне от первой до девятой форм колебаний и некоторое расхождение их на десятой форме (рис. 4). Значения δ на первых пяти формах колебаний в обоих случаях получились достаточно близкими между собою (рис. 5), но далее при использовании разработанного конечного элемента значения δ начинают существенно возрастать, а по данным работы [26] они продолжают убывать. Отмеченное возрастание δ можно, как и прежде, объяснить рассеянием энергии за счет нормальных напряжений σ_z при поперечном обжатии вязкоупругого слоя пластины на высоких формах колебаний. Интересно также отметить некоторую нерегулярность изменения δ , полученных в работе [26], в диапазоне от седьмой до десятой форм колебаний.

Отмеченное расхождение частот на десятой форме колебаний, так же как и нерегулярность изменения δ на последних четырех формах колебаний, по всей видимости объясняется тем, что трехслойная пластина в работе [26] представлялась в продольном направлении всего лишь четырьмя конечными элементами с кубическим законом изменения перемещений в пределах элемента. Такого количества элементов (даже при кубической аппроксимации перемещений) по мнению авторов явно недостаточно для адекватного учета работы пластины на высоких формах колебаний.

Рис. 4. Частоты свободных колебаний трехслойной пластины (пояснения в тексте)

6. Выводы

1. Рассмотрена зависимость комплексного напряжения σ^* от комплексной деформации ε^* при одноосном напряженном состоянии с использованием концепции комплексного модуля упругости. Дано обобщение отмеченной зависимости на случай сложного напряженного состояния вязкоупругого материала.

2. Разработан четырехслойный конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, позволяющий учитывать поперечное обжатие демпфирующих слоев, что важно при определении демпфирующих свойств пластины на высоких частотах колебаний.

Рис. 5. Логарифмические декременты колебаний трехслойной пластины (пояснения в тексте)

3. Сформулирована обобщенная проблема комплексных собственных значений, обусловленная комплексной матрицей жесткости пластины. Показана возможность определения демпфирующих свойств пластины при колебаниях по формам F_j с использованием мнимых частей f_j'' соответствующих комплексных частот.

4. Показано значительное возрастание демпфирующих свойств пластины с интегральным демпфирующим покрытием на высоких частотах колебаний, обусловленное рассеянием энергии при поперечном обжатии связанного демпфирующего слоя.

5. Определены собственные частоты f_j и соответствующие им ЛДК δ_j трехслойной пластины с внутренним вязкоупругим слоем при исходных данных, приведенных в работе [26]. Получено хорошее согласование частот f_j в диапазоне от первой до девятой форм колебаний и некоторое расхождение их на десятой форме. Значения δ_j на первых пяти формах колебаний хорошо согласуются с результатами работы [26], а далее значения δ_j получились существенно выше отмеченных результатов, что объясняется учетом рассеяния энергии при поперечном обжатии вязкоупругого слоя пластины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чернышев В.М. *Демпфирование колебаний механических систем покрытиями из полимерных материалов* (Наука, М., 2004).
- [2] Kerwin E. *Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer*, J. Acoustical Soc. America **3** (7), 952–962 (1959).
- [3] Ungar E. *Loss factors of viscoelastically damped beam structures*, J. Acoustical Soc. America **34** (8), 1082–1089 (1962).
- [4] Amadori S, Catania G. *Damping contributions of coatings to the viscoelastic behaviour of mechanical components*, In Proceedings of the Inter. Conf. Surveillance 9, Fes. Morocco, 22–24 May 2017.
- [5] Fisher D.K., Asthana S. *Self-adhesive vibration damping tape and composition*, Patent US 6828020 B2, 7.12.2004.
- [6] Паньков Л.А., Фесина М.И., Краснов А.В. *Виброшумодемпфирующая плосколистовая прокладка*, Патент РФ № 2333545, 10.09.2008.
- [7] Tesse C., Stopin G. *Constrained-layer damping material*, Constrained-layer damping material, 11.07.2012.
- [8] Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. *Демпфирование колебаний* (Мир, М., 1988).
- [9] Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. *Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов*, Механ. композит. матер. **5**, 823–830 (1991).
- [10] Постников В.С. *Внутреннее трение в металлах* (Металлургия, М., 1969).
- [11] Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. *Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций* (Вища школа, Киев, 1977).

- [12] Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем* (Госстройиздат, М., 1960).
- [13] Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. *Identification of the elastic and damping characteristics of soft materials based on the analysis of damped flexural vibrations of test specimens*, *Mechan. of Composite Mater.* **52** (4), 435–454 (2016).
- [14] Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов* (Мир, М., 1981).
- [15] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов* (Мир, М., 1979).
- [16] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике* (Мир, М., 1975).
- [17] Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики* (Мир, М., 1966).
- [18] Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. *Численные методы. Использование MATLAB*, 3-е изд. (Издат. дом "Вильямс М.", 2001).
- [19] Джонсон К.Д., Кинхольц Д.А. *Расчет демпфирования колебаний в конструкциях, содержащих закрепленные вязкоупругие слои, методом конечных элементов*, *Аэрокосмическая техн.* **1** (4), 124–133 (1983).
- [20] Бате К., Вильсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов* (Стройиздат, М. 1982).
- [21] Клаф Р., Пензиен Дж. *Динамика сооружений* (Стройиздат, М., 1979).
- [22] Парлетт Б. *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы* (Мир, М., 1983).
- [23] Paimushin V.N., Shishkin V.M. *Modeling the Elastic and Damping Properties of the Multilayered Torsion Bar-Blade Structure of Rotors of Light Helicopters of the New Generation. 1. Finite-Element Approximation of the Torsion Bar*, *Mechan. Composite Mater.* **51** (5), 609–628 (2015).
- [24] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник* (Наукова думка, Киев, 1971).
- [25] Caughey T.K., O, Kelly M.E.J. *Effect damping on the natural frequencies of linear dynamic system*, *J. Acoustical Soc. America.* **33** (11), 1458–1461 (1961).
- [26] Барканов Е.Н. *Метод комплексных собственных чисел для исследования демпфирующих свойств конструкций типа сандвич*, *Механ. композит. матер.* **29** (1), 116–121 (1993).

Виталий Николаевич Паймушин

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия;

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: vrpajmushin@mail.ru

Вячеслав Анатольевич Фирсов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: vafirsov_49@mail.ru

Виктор Михайлович Шишкин

Вятский государственный университет,
ул. Московская, д. 36, г. Киров, 610000, Россия,

e-mail: tism1@rambler.ru

V.N. Paimushin, V.A. Firsov, and V.M. Shishkin

Determination of damping properties of an elongated plate with an integral damping coating on the base of studying complex eigenfrequencies

Abstract. The structure of a perspective integral damping coating consisting of two layers of a viscoelastic material with a thin reinforcing layer between them is presented. A four-layer finite element with fourteen degrees of freedom was developed for modeling a plate with a mentioned damping coating, which allows to take into account the effect of transversal compression of the damping layers during high-frequency oscillations of the plate. The generalized problem of complex eigenvalues based on the method of iterations in a subspace to determine several lower complex forms and frequencies of free vibrations of a damped plate was solved.

Keywords: plate, damping coating, damping constant, finite element, complex frequency.

Vitaly Nickolaevich Paimushin

Kazav National Research Technical University,

10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia;

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: vpajmushin@mail.ru

Vyacheslav Anatolyevich Firsov

Kazav National Research Technical University,

10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: vafirsov_49@mail.ru

Viktor Mikhailovich Shishkin

Vyatka State University,

36 Moskovskaya str., Kirov, 610000 Russia,

e-mail: tism1@rambler.ru