Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2 , *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 65–72

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-65-72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:55:32

М.Ш. ШАБОЗОВ, М.С. САИДУСАЙНОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ В L_2

Аннотация. Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ ($s = \overline{0, r}$, $r \in \mathbb{N}$) последовательности производных $f^{(s)}$ ($s = \overline{0, r}$, $r \in \mathbb{N}$) аналитических в круге $U := \{z : |z| < 1\}$ функций $f \in L_2(U)$ как для специального модуля непрерывности m -го порядка Ω_m , удовлетворяющего условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t)_2 \leq \Phi(t), \quad 0 < t < 1,$$

где Φ — заданная мажоранта, так и для $\mathcal{K}$ -функционала Петре, удовлетворяющего ограничению

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t < 1.$$

Ключевые слова: обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, ортонормированная система функций, неравенство Джексона–Стечкина, $\mathcal{K}$ -функционал.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-65-72

В работе рассматривается задача среднеквадратичного полиномиального приближения функций комплексного переменного, регулярных в некоторой односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, суммами Фурье по ортогональной системе в пространстве $L_2 := L_2(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Отметим, что различные аспекты теории ортогональных по области регулярных функций и аппроксимации в среднем функций $f \in L_2(\mathcal{D})$ суммами Фурье рассмотрены в монографии ([1], гл. III, с. 196–278). В [2], [3] изучена задача отыскания точной константы в неравенстве типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратичного приближения функций $f \in L_2(\mathcal{D})$ и обобщенным модулем непрерывности высшего порядка, а в [4] приведено некоторое уточнение неравенства Джексона–Стечкина из [2]. В случае, когда $\mathcal{D} := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, в [5] получены точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональной в круге U системе $\{z^k\}_{k=0}^\infty$ на классах функций, задаваемых обобщенным модулем непрерывности m -го порядка, и вычислены значения ряда n -поперечников на указанных классах функций. Здесь мы продолжим исследования в этом направлении и попутно обобщим некоторые результаты из [5].

Далее рассмотрим случай, когда $\mathcal{D}$ есть круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Очевидно, что в этом случае система функций $\varphi_k(z) = z^k, k \in \mathbb{Z}_+$, является ортогональной в круге U :

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+l+1} e^{i(k-l)t} dr dt = 0, \quad k \neq l.$$

Но эта система не является ортонормированной, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |\varphi_k(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k+1} dr dt = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, система функций $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1} z^k, k \in \mathbb{Z}_+$, является ортонормированной системой. Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим множество аналитических в U функций f . Ряд Маклорена функции $f \in \mathcal{A}(U)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad (1)$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f . При этом

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}, \quad E_{n-1}^2(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \quad (2)$$

В монографии ([1], с. 209) доказано, что ряд Фурье функции f по ортонормированной системе $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1} z^k, k \in \mathbb{Z}_+$, совпадает с рядом (1) функций $f \in \mathcal{A}(U)$, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad (3)$$

а потому ряд (1) можно сколько угодно раз почленно продифференцировать и по теореме Вейерштрасса ([6], с. 107) для произвольного $r \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) k(k-1) \cdots (k-r+1) z^{k-r} := \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (4)$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k \geq r. \quad (5)$$

При этом легко подсчитать, что при любом $0 \leq s \leq r, s, r \in \mathbb{Z}_+$, имеет место равенство

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2 = \|f^{(s)} - S_{n-s-1}(f^{(s)})\|_2^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}. \quad (6)$$

Обозначим через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(U) (r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} := L_2(U))$ класс функций $f \in L_2$, у которых $f^{(r)} \in L_2 (r \in \mathbb{Z}_+, f^{(0)} \equiv f)$.

В [5] при любых $n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+$ и в предположении $n > r \geq s$ доказаны равенства

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}, \quad (7)$$

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = \sum_{k=r}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}, \quad 0 < t < 1. \quad (8)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $t \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t)_2} = \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (9)$$

В частности, из (9) при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ вытекает соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; 1/(n-r))_2} = (1 - e^{-1})^{-m}. \quad (10)$$

Доказательство. Пользуясь равенством (8) и учитывая соотношение (6), при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 1)$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 &= \sum_{k=r}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \geq \sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \geq \\ &\geq [1 - (1-t)^{n-r}]^{2m} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно (7) запишем (11) в виде

$$\Omega_m(f^{(r)}; t)_2 \geq [1 - (1-t)^{n-r}]^m \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}} \sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2, \quad (12)$$

откуда и вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части (9).

С целью получения аналогичной оценки снизу вводим функцию $f_0(z) = z^n \in L_2^{(r)}$. Для этой функции, как следует из равенств (6) и (8), имеем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}, \quad \Omega_m(f_0^{(r)}; t)_2 = [1 - (1-t)^{n-r}]^m \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}. \quad (13)$$

Воспользуясь равенствами (13), запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t)_2} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{\Omega_m(f_0^{(r)}; t)_2} = \\ &= \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})(\alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1})}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m (\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1})} = \frac{1}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из неравенства (12) и (14) следует требуемое равенство (9). Полагая в (9) $t = 1/(n-r)$ и переходя к верхней грани по всем $n \in \mathbb{N}$ (при фиксированном $r \in \mathbb{Z}_+$), получим соотношение (10), чем и завершаем доказательство теоремы 1. Отметим, что при $s = 0$ теорема 1 ранее доказана в [5]. $\square$

Далее приводим точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ ($s = \overline{0, r}$) функций $f \in L_2^{(r)}$ посредством $\mathcal{H}$ -функционала Петре [7]–[9]. Определим $\mathcal{H}$ -функционал, построенный по пространствам L_2 и $L_2^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_m(f; t^m) := \mathcal{H}(f; t^m; L_2, L_2^{(m)}) = \inf \left\{ \|f - g\|_2 + t^m \|g^{(m)}\|_2 : g \in L_2^{(m)} \right\}. \quad (15)$$

Представляет интерес точно вычислить экстремальную характеристику величины, подобной левой части равенства (9), но содержащей вместо модуля непрерывности Ω_m m -го порядка $\mathcal{K}$ -функционал (15).

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ($r \geq s$) — произвольные числа такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1. \quad (16)$$

Доказательство. Используя равенство (7), для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1} \left(f^{(r)} \right)_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|_2, \quad (17)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ — частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in L_2^{(m)}$. В силу неравенства (2.12) из [5] для $g \in L_2^{(m)}$ получаем

$$\begin{aligned} \|g - S_{n-r-1}(g)\| &= E_{n-r-1}(g)_2 \leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} E_{n-r-m-1} \left(g^{(m)} \right)_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\|_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из неравенств (17) и (18) вытекает

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\|_2 + \|g - S_{n-r-1}(g)\|_2 \right\} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\|_2 + \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\|_2 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Левая часть неравенства (19) не зависит от функции $g \in L_2^{(m)}$, а потому, минимизируя его правую часть по $g \in L_2^{(m)}$ с учетом определения $\mathcal{K}$ -функционала (15), получаем

$$E_{n-s-1}(f)_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right).$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (16):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(f)_2}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \leq 1. \quad (20)$$

С целью получения оценки снизу той же величины, воспользуемся тем, что для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство (см., например, [10])

$$\mathcal{K}_m(p_n, t^m) \leq \min \left\{ \|p_n\|_2, t^m \|p_n^{(m)}\|_2 \right\}. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$. Так как для этой функции

$$f_0^{(r+m)} = n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r) \cdots (n-r-m+1) z^{n-r-m} = \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m} z^{n-(r+m)},$$

то в силу неравенства (21) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|f_0^{(r+m)}\|_2 = \\ &= \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \frac{\alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m}}{\sqrt{n-r-m+1}} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим также, что

$$E_{n-s-1} \left(f_0^{(s)} \right)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}. \quad (23)$$

Пользуясь соотношениями (22) и (23), имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}(f_0)_2}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = \frac{\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1}}{\mathcal{K} \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Требуемое равенство (16) получаем из сравнения оценки сверху (20) с оценкой снизу (24). $\square$

Заметим, что из результата теоремы 1 (равенство (9)) и теоремы 2 (равенство (16)) после некоторых простых вычислений вытекает асимптотическое равенство

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \sim \Omega_m(f^{(r)}, t), \quad 0 < t < 1.$$

Неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция Φ называется k -мажорантой ([11], с. 25), если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют просто мажорантой. Через $W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq \Phi(t), \quad 0 < t < 1,$$

а через $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$ обозначим аналогичный класс функций, $f \in L_2^{(r)}$, для которых

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t < 1.$$

Далее решаем следующую задачу: пусть $\mathfrak{M}^{(r)}$ — некоторый подкласс функций класса $L_2^{(r)}$. Требуется найти величину

$$E_{n-s-1} \left(\mathfrak{M}^{(r)} \right)_2 := \sup \left\{ E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}. \quad (25)$$

Приводим решение задачи (25) для классов функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ и $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$.

Теорема 3. Пусть Φ — мажоранта, определяющая класс функций $W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда для любого натурального $n \geq m + r$, $t \in (0, 1)$ и произвольного s ($0 \leq s \leq r$) справедливо равенство

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi(t)}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (26)$$

Доказательство. Действительно, из равенства (9) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-s-1} \left(f^{(s)} \right)_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \quad (27)$$

и если теперь предполагать, что $f \in L_2^{(r)} \cap W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, то из (27) сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (26):

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right)_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi(t)}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (28)$$

Введем функцию

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi(t)z^n}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \quad 0 < t < 1.$$

Для этой функции легко проверить, что

$$\begin{aligned} g_0^{(s)}(z) &= \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \alpha_{n,s} \frac{\Phi(t)z^{n-s}}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \\ E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi(t)}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}, \\ \Omega_m \left(g_0^{(s)}, t \right)_2 &= \Phi(t), \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Последнее равенство означает, что $g_0(z) \in W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$. Учитывая равенство (29), запишем оценку снизу искомой величины

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right)_2 \geq E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \frac{\Phi(t)}{[1 - (1-t)^{n-r}]^m}. \quad (30)$$

Из сравнения неравенств (28) и (30) следует равенство (26), чем и завершаем доказательство теоремы 3. $\square$

Заметим, что при $t = 1/(n-r)$, $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$ из (26) следует асимптотическое равенство

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right)_2 \asymp \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\frac{1}{n-r} \right) \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-m}.$$

Теорема 4. Пусть Φ — мажоранта, определяющая класс функций $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда для любого натурального $n \geq m+r$ и произвольного $s (1 \leq s \leq r-1)$ справедливо равенство

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \quad (31)$$

Доказательство. Действительно, оценка сверху величины, расположенной в левой части (31), следует из равенства (16), в силу которой для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \quad (32)$$

В [10] доказано, что функция

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) z^n$$

принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, и так как для этой функции

$$g_0^{(s)}(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \alpha_{n,s} z^{n-s},$$

$$E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right),$$

то, пользуясь последним равенством, запишем оценку снизу

$$E_{n-s-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_2 \geq E_{n-s-1} \left(g_0^{(s)} \right)_2 = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \Phi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \quad (33)$$

Сопоставляя оценку сверху (32) с оценкой снизу (33), получаем требуемое равенство (31), чем и завершаем доказательство теоремы 4. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. *Конструктивная теория функций комплексного переменного* (М.-Л.: Наука, 1964).
- [2] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$, ЖВММФ **50** (6), 999–1004 (2010).
- [3] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана, Владикавк. матем. журн. **20** (1), 86–97 (2018).
- [4] Саидусайнов М.С. Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве Бергмана B_2 , Тр. ИММ УрО РАН. **24** (4), 217–224 (2018).
- [5] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников, Матем. заметки **103** (4), 617–631 (2018).
- [6] Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного* (Наука, М., 1984).
- [7] Берг Й., Лефстрем Й. *Введение / Интерполяционные пространства* (Мир, М., 1980).
- [8] Mhaskar N.H. *Weighted polynomial Approximation*, J. Approx. Theory **46** (1), 100–110 (1986).
- [9] Ditzian Z., Totik V. *$\mathcal{K}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$* , J. Approx. Theory **46** (1), 38–41.
- [10] Saidusaynov M.S. *$\mathcal{K}$ -functionals and exact values of n -widths in the Bergman space*, Ural Math. J. **3** 2(5), 74–81.
- [11] Шевчук И. А. *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций* (Наукова думка, Киев, 1992).

Мирганд Шабозович Шабозов

Таджикский национальный университет,
г. Душанбе, 734025, Республика Таджикистан,

e-mail: shabozov@mail.ru

Муқим Саидусайнович Саидусайнов

Университет Центральной Азии,
г. Душанбе, 734013, Республика Таджикистан,

e-mail: smuqim@gmail.com

M.Sh. Shabozov and M.S. Saidusaynov

Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in L_2

Abstract. The sharp inequalities of Jackson-Stechkin type inequalities between the best approximation $E_{n-s-1}(f^{(s)})(s = \overline{0, r}, r \in \mathbb{N})$ of successive derivatives $f^{(s)}(s = \overline{0, r}, r \in \mathbb{N})$ of analytic functions $f \in L_2(U)$ in the disk $U := \{z : |z| < 1\}$ as for special module of continuity Ω_m of m th order satisfying the condition

$$\Omega_m \left(f^{(r)}, t \right)_2 \leq \Phi(t), \quad 0 < t < 1,$$

where Φ is give majorant and also for Peetre $\mathcal{K}$ -functional satisfying the constraint

$$\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, t^m \right) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t < 1,$$

were obtained.

Keywords: the generalized module of continuity, generalized translation operator, orthonormal system of functions, Jackson–Stechkin inequality, $\mathcal{K}$ -functional.

Mirgand Shabozovich Shabozov

Tajik National University,
Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan,

e-mail: shabozov@mail.ru

Mukim Saidusaynovich Saidusaynov

University of Central Asia,
Dushanbe, SPCE, 734013 Republic of Tajikistan,

e-mail: smuqim@gmail.com