Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, Локальные группы и их представления, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 73–78

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-73-78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:15:10

Краткое сообщение, представленное А.М. Бикчентаевым

Посвящается Виктору Арзуманяну, нашему коллеге и другу.

С.А. ГРИГОРЯН, А.Ю. КУЗНЕЦОВА

ЛОКАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Аннотация. Приводится определение локальной группы, предлагаются связанные с локальной группой C^* -алгебраические конструкции. Для локальной группы определяются понятия $*$ -представления и строгого $*$ -представления, которые связывает между собой расширение локальной группы. Локальная группа позволяет определить регулярное представление, которое является $*$ -представлением, и соответствующую редуцированную C^* -алгебру, последняя является градуированной по расширению локальной группы.

Ключевые слова: локальная группа, оператор частичной изометрии, частичное представление группы, регулярное представление, градуированная C^* -алгебра.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-73-78

Введение. Групповые C^* -алгебры, групповые скрещенные произведения C^* -алгебр, ковариантные (или динамические) системы изучаются достаточно давно. В последние несколько десятилетий интерес сместился на более сложные, чем группа, объекты. Значительное число работ посвящено полугрупповым C^* -алгебрам, полугрупповым скрещенным произведениям, например [1]–[7]. В недавно вышедшей монографии [8] рассматриваются частичные динамические системы, в которых действие группы задано не на всей алгебре, а на семействе двусторонних идеалов, индексированном элементами группы. Другими объектами пристального внимания, с которыми ассоциируются C^* -алгебры, являются группоиды (см., например, [9]–[11]), где умножение определено не для всех элементов. Большинство таких конструкций приводит к градуированным C^* -алгебрам. Говорят, что C^* -алгебра $\mathfrak{A}$ градуирована по группе G , если существует набор банаховых пространств $\{B_g\}_{g \in G}$ и как банахово пространство $\mathfrak{A} = \overline{\bigoplus_{g \in G} B_g}$, причем $B_g B_h \subset B_{gh}$, $B_g^* = B_{g^{-1}}$ и $B_g \cap B_h = \{0\}$ (подробно, например, в [12]).

Хорошо известно ([13]) понятие локальной топологической группы, в которой умножение определено только в некоторой окрестности единицы. Мы предлагаем понятие дискретной локальной группы (далее просто локальной группы) использовать в теореме операторных алгебр. Локальные группы можно применить при изучении градуированных C^* -алгебр, кроме того, они позволяют строить интересные примеры операторных алгебр. В [14] авторами было показано, что есть прямая связь между частичным представлением группы, определенном в [8], и локальной группой. Также было показано, что алгебра Кунца–Теплица

порождается представлением локальной группы и, как и алгебра Кунца, является градуированной по локальной группе (т.е. в определении градуированной C^* -алгебры группа G заменяется на локальную группу $\mathcal{G}$).

В данной работе мы уточняем и развиваем понятия, приведенные в [14]. В п. 1 дается определение локальной группы, гомоморфизма и квазигомоморфизма локальных групп. В п. 2 даются определения $*$ -представления и строгого $*$ -представления локальных групп, определение 6 дает связь между ними. Теорема 1 показывает, что не только частичное представление группы порождает представление локальной группы, но и с любым представлением локальной группы связано частичное представление группы. В п. 3 вводится понятие регулярного представления для локальной группы и соответственно редуцированной C^* -алгебры, порожденной локальной группой, которая (теорема 3) является градуированной по локальной группе. Определение 7 и теорема 4 позволяют строить другие примеры градуированных по локальной группе C^* -алгебр.

1. Локальные группы.

Определение 1. Набор $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, e, m, i\}$, где $\mathcal{G}$ — дискретное множество, $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, $m : \mathcal{G}^2 \longrightarrow \mathcal{G}$ и $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ — отображения, назовем локальной группой, если выполняются следующие условия:

- 1) если $(a, b), (b, c) \in \mathcal{G}^2$ и $(m(a, b), c) \in \mathcal{G}^2$ (либо $(a, m(b, c)) \in \mathcal{G}^2$), то $(a, m(b, c)) \in \mathcal{G}^2$ (либо $(m(a, b), c) \in \mathcal{G}^2$) и $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$;
- 2) если $(a, b) \in \mathcal{G}^2$, то $(i(b), i(a)) \in \mathcal{G}^2$ и $m(i(b), i(a)) = i(m(a, b))$;
- 3) существует $e \in \mathcal{G}$ такой элемент, что (e, a) и (a, e) принадлежат $\mathcal{G}^2$ и $m(e, a) = m(a, e) = a$;
- 4) для любого $a \in \mathcal{G}$ пара $(i(a), a)$ и $(a, i(a))$ из $\mathcal{G}^2$ и $m(i(a), a) = m(a, i(a)) = e$.

Элемент e назовем единицей локальной группы, отображение $m : \mathcal{G}^2 \longrightarrow \mathcal{G}$ назовем произведением и будем писать $m(a, b) = ab$, отображение $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ назовем взятием обратного, $i(a) = a^{-1}$.

Очевидно, если $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, то $\mathcal{G}$ — группа. Если же $\mathcal{G} = X \cup X^{-1}$, где X — некоторое множество, $X^{-1} = \{a^{-1} : a \in X\}$ формально обратное, $X \cap X^{-1} = \{e\}$, $e = e^{-1}$, и $\mathcal{G}^2 = \{(a, a^{-1})\} \cup \{(a^{-1}, a)\}$, $a \in X$, то такую локальную группу назовем тривиальной.

Предложение 1.

- 1) Если (a, b) и (a, c) из $\mathcal{G}^2$ и $ab = ac$, то $b = c$;
- 2) если (a, b) и (c, b) из $\mathcal{G}^2$ и $ab = cb$, то $a = c$;
- 3) $i(i(a)) = a$.

Схема доказательства. Из условия 4) определения 1 и по условию предложения имеем $(i(a), a)$, (a, b) и $(i(a), a)$, (a, c) из $\mathcal{G}^2$. Из 1) и 3) получаем $(m(e, a), b)$ и $(m(e, a), c)$ также из $\mathcal{G}^2$. Отсюда

$$c = m(e, c) = m(m(i(a), a), c) = m(i(a), m(a, c)) = m(i(a), m(a, b)) = b.$$

Условия 2) и 3) доказываются аналогично. □

Определение 2. Пусть $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, e, m, i\}$ и $\mathcal{G}_0 = \{\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}, \mathcal{G}_0^2, e, m_0, i_0\}$ — локальные группы. Тогда $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ называется локальной подгруппой локальной группы $\mathcal{G}$, если из условия $a, b \in \mathcal{G}_0$ и $(a, b) \in \mathcal{G}^2$ следует $(a, b) \in \mathcal{G}_0^2$ и $m_0(a, b) = m(a, b) = ab \in \mathcal{G}_0$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1^2, e_1, m_1, i_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_2^2, e_2, m_2, i_2)$ — локальные группы. Отображение $\varphi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ называется гомоморфизмом локальных групп, если:

- 1) $\varphi(\mathcal{G}_1)$ — локальная подгруппа в $\mathcal{G}_2$;
- 2) $\varphi(e_1) = e_2$;
- 3) $\varphi(m_1(a, b)) = m_2(\varphi(a), \varphi(b))$;
- 4) $i_2 \circ \varphi = \varphi \circ i_1$.

Отображение между локальными группами $\varphi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ назовем квазигомоморфизмом, если выполняются условия 2)–4), и образ квазигомоморфизма назовем локальной квази-подгруппой. Каждый гомоморфизм является квазигомоморфизмом, обратное неверно.

Замечание 1. Пусть $\varphi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ — квазигомоморфизм локальных групп. Тогда $\ker \varphi = \{a \in \mathcal{G}_1 : \varphi(a) = e_2\}$ — локальная подгруппа в $\mathcal{G}_1$.

Гомоморфизм $\varphi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ есть изоморфизм, если существует гомоморфизм $\tilde{\varphi} : \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_1$ такой, что $\varphi \circ \tilde{\varphi}$ тождественное отображение на $\mathcal{G}_2$, а $\tilde{\varphi} \circ \varphi$ соответственно на $\mathcal{G}_1$.

2. *-представление локальной группы. Далее везде $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, e, m, i\}$ — локальная группа и $\mathfrak{A}$ — унитарная C^* -алгебра. Определим представление локальной группы в унитарную C^* -алгебру. Поскольку на локальной группе не для всех элементов определено умножение, то образом элемента локальной группы естественно определить частичную изометрию.

Определение 4. Отображение $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ называется *-представлением локальной группы, если:

- 1) $\pi(e) = I$,
- 2) $\pi(a^{-1}) = (\pi(a))^*$,
- 3) $\pi(a)\pi(b)\pi(b^{-1}) = \pi(ab)\pi(b^{-1})$ при $(a, b) \in \mathcal{G}^2$,
- 4) $\pi(a^{-1})\pi(a)\pi(b) = \pi(a^{-1})\pi(ab)$ при $(a, b) \in \mathcal{G}^2$,
- 5) $\{\pi(a)\}_{a \in \mathcal{G}}$ порождают инверсную полугруппу.

В дальнейшем через $C_\pi^*(\mathcal{G})$ будем обозначать подалгебру $\mathfrak{A}$, порожденную семейством $\{\pi(a)\}_{a \in \mathcal{G}}$. Если из условия $\pi(a) = 0$ следует $a = 0$, то *-представление π называется точным. Существуют такие *-представления локальной группы, что из п. 1)–4) следует п. 5).

Определение 5. Отображение $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ назовем строгим *-представлением, если:

- 1) $\pi(e) = I$,
- 2) $\pi(a^{-1}) = (\pi(a))^*$,
- 3) $\pi(a)\pi(b)\pi(b^{-1}) = \begin{cases} \pi(ab)\pi(b^{-1}) & \text{при } (a, b) \in \mathcal{G}^2; \\ 0 & \text{при } (a, b) \notin \mathcal{G}^2, \end{cases}$
- 4) $\pi(a^{-1})\pi(a)\pi(b) = \begin{cases} \pi(a^{-1})\pi(ab) & \text{при } (a, b) \in \mathcal{G}^2; \\ 0 & \text{при } (a, b) \notin \mathcal{G}^2. \end{cases}$

Определение 6. Пусть $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ — точное *-представление, и $\pi' : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathfrak{A}$ — строгое точное *-представление. Пару $(\mathcal{G}', \pi')$ назовем расширением пары $(\mathcal{G}, \pi)$, если существует инъективный квазигомоморфизм $\tau : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{G}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ C_\pi^*(\mathcal{G}) & \xlongequal{\quad} & C_{\pi'}^*(\mathcal{G}'). \end{array}$$

Заметим, что расширение пары $(\mathcal{G}, \pi)$ может определяться неоднозначно.

Понятия $*$ -представления и строгого $*$ -представления локальной группы тесно связаны с определением частичного представления групп, введенного Р. Экселем в ([8], 9.1). Частичное представление группы $\pi : G \longrightarrow \mathfrak{A}$ есть отображение, удовлетворяющее условиям 1)–4) определения 4. В ([14], предложение 1) было показано, что с любым частичным представлением группы связана локальная группа и ее строгое точное $*$ -представление. Верно и обратное.

Предложение 2. Пусть $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ — точное $*$ -представление. Тогда существует группа G и частичное представление $\tau : G \longrightarrow \mathfrak{A}$ такое, что $C_\tau^*(G) = C_\pi^*(\mathcal{G})$.

Доказательство следует из определения 4 и ([8], предложение 12.13). Для произвольной локальной группы построим свободную группу G , порожденную элементами $\mathcal{G}$ как образующими, со следующими операциями: произведением $a, b \in \mathcal{G}$, $(a, b) \notin \mathcal{G}^2$, считаем $a * b \in G$ и обратным к $a * b$ считаем $b^{-1} * a^{-1} \in G$. Зададим $\tau(a) = \pi(a)$ на образующих, и $\tau(a * b) = \pi(a)\pi(b)$, где элемент $a * b \in G$ записан в редуцированной форме.

В свою очередь, согласно ([14], предложение 1) частичное представление группы G τ порождает соответствующую локальную группу $\mathcal{G}' = \{u \in G : \tau(u) \neq 0\}$ с операциями, наследуемыми из G . Далее будем считать локальную группу $\mathcal{G}$ глобализуемой, т. е. существует квазигомоморфизм из $\mathcal{G}$ в некоторую группу. Отсюда, учитывая определение 5 и ([14], лемма 1), следует

Теорема 1. Пусть G — свободная группа, порожденная $\mathcal{G}$, тогда любое точное строгое $*$ -представление $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{A}$ порождает частичное представление $\tau : G \longrightarrow \mathfrak{A}$, и существует локальная группа $\mathcal{G}'$ и точное строгое $*$ -представление $\pi' : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathfrak{A}$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}' & \xrightarrow{\phi} & G \\ \psi \uparrow & \searrow \pi' & \downarrow \tau \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A} \end{array},$$

где ϕ — квазигомоморфизм и ψ — гомоморфизм локальных групп. Если π — точное $*$ -представление, то ψ — квазигомоморфизм, а $(\mathcal{G}', \pi')$ является расширением $(\mathcal{G}, \pi)$.

3. Регулярное представление. Из предложения 1 следует, что мы можем определить понятие регулярного представления для локальной группы. Пусть $\{\delta_a\}_{a \in \mathcal{G}}$ — естественный базис в $l^2(\mathcal{G})$. Тогда под регулярным представлением локальной группы $\mathcal{G}$ понимается отображение $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow B(l^2(\mathcal{G}))$,

$$\rho(b)(\delta_a) = \begin{cases} \delta_{ba}, & \text{если } (b, a) \in \mathcal{G}^2; \\ 0, & \text{если } (b, a) \notin \mathcal{G}^2. \end{cases}$$

Теорема 2. Регулярное представление $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow B(l^2(\mathcal{G}))$ является точным $*$ -представлением локальной группы.

Схема доказательства. Очевидно, образом регулярного представления является частичная изометрия, т. е. $\rho(a)$ для любого $a \in \mathcal{G}$ удовлетворяет условиям 1)–4) определения 4. Если $\rho(a)\rho(b) \neq 0$, значит, существует $c \in \mathcal{G}$ такое, что $\rho(a)\rho(b)\delta_c = \delta_{a(bc)}$, т. е. $\rho(a)\rho(b)$ — частичная изометрия, и выполнено условие 5) определения 4. $\square$

Под редуцированной C^* -алгеброй, порожденной локальной группой $\mathcal{G}$ понимается C^* -алгебра, порожденная регулярным представлением, $C_r^*(\mathcal{G}) = C_\rho^*(\mathcal{G})$.

Замечание 2. Если $\mathcal{G}$ — тривиальная локальная группа, то из определения регулярного представления следует, что для любого $a \in \mathcal{G}$ $\rho(a)$ — оператор конечного ранга, т. е. $C_r^*(\mathcal{G})$ есть алгебра компактных операторов на $l^2(\mathcal{G})$ с добавлением единичного оператора.

В ([14], предложение 3) было показано, что с каждым строгим $*$ -представлением $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{A}$ связано расслоение Фэлла по локальной группе с операциями, наследуемыми из $\mathfrak{A}$. Отсюда и из теорем 2 и 1 получается

Теорема 3. Для любой локальной группы $\mathcal{G}$ регулярное представление допускает расширение $(\mathcal{G}', \rho')$, и $C_r^*(\mathcal{G})$ является $\mathcal{G}'$ -градуированной C^* -алгеброй.

Приведем простой пример построения локальной группы, которая обладает строгим $*$ -представлением. Вообще говоря, локальные группы не исчерпываются локальными квазиподгруппами дискретных групп, но такие локальные группы возникают естественным образом, и алгебры, ими порожденные, обладают рядом дополнительных свойств. Пусть заданы дискретная группа Γ и подмножество $P \subset \Gamma$. Пусть $\Gamma_P = \{a \in \Gamma : (a \cdot P) \cap P \neq \emptyset\}$. Нетрудно проверить, что набор $\{\Gamma_P, \Gamma_P^2, e, m, i\}$, где e — единица группы Γ , m и i — групповые операции, а $\Gamma_P^2 = \{(a, b) : a, b \in \Gamma_P, ab \in P\}$, образует локальную группу Γ_P . Отметим, что если $P' = aP$, то $\Gamma_{P'} = \Gamma_P$.

Определение 7. Назовем P -регулярным представлением локальной группы Γ_P отображение $\rho : \Gamma_P \rightarrow B(l^2(P))$,

$$\rho(a)\delta_b = \begin{cases} \delta_{ab}, & \text{если } ab \in P; \\ 0, & \text{если } ab \notin P. \end{cases}$$

C^* -алгебру $C_r^*(P)$, порожденную P -регулярным представлением, назовем редуцированной C^* -алгеброй, порожденной подмножеством P группы Γ .

Теорема 4. P -регулярное представление локальной группы Γ_P является точным строгим $*$ -представлением.

Следствие. Пусть $\mathcal{G} \subset \Gamma$ — локальная квазиподгруппа группы Γ и $\rho : \mathcal{G} \rightarrow B(l^2(\mathcal{G}))$ — регулярное представление. Тогда пара $(\Gamma_{\mathcal{G}}, \rho')$, где ρ' является $\mathcal{G}$ -регулярным представлением $\Gamma_{\mathcal{G}}$, является расширением $(\mathcal{G}, \rho)$, причем $C_r^*(\mathcal{G})$ является $\Gamma_{\mathcal{G}}$ -градуированной C^* -алгеброй.

В качестве примера рассмотрим представления локальной квазиподгруппы $\mathcal{G} = \{-1, 0, 1\}$ аддитивной группы $\mathbb{Z}$. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ — C^* -алгебра матриц $n \times n$, $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ — множество матричных единиц в $M_n(\mathbb{C})$, и S — максимальная мультипликативная инверсная полугруппа, содержащая $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, $E_{2,1} + E_{3,2} + \dots + E_{n,n-1}$ и единицу $E_{1,1} + E_{2,2} + \dots + E_{n,n}$. Определим $\pi_n : \mathcal{G} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$: $\pi_n(0) = E_{1,1} + E_{2,2} + \dots + E_{n,n}$, $\pi_n(-1) = E_{2,1} + E_{3,2} + \dots + E_{n,n-1}$, и $\pi_n(1) = E_{1,2} + E_{2,3} + \dots + E_{n-1,n}$. Мультипликативная полугруппа, порожденная этими элементами, есть инверсная полугруппа в $M_n(\mathbb{C})$, содержащая $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$. Справедливо

Предложение 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует представление $\pi_n : \mathcal{G} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, порождающее S .

Нетрудно проверить, что $\pi_2 : \mathcal{G} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ является строгим $*$ -представлением, и $M_2(\mathbb{C})$ имеет естественную градуировку по $\{-1, 0, 1\}$. Представление $\pi_3 : \mathcal{G} \rightarrow M_3(\mathbb{C})$ совпадает с регулярным представлением, и $M_3(\mathbb{C})$ градуирована уже по расширению $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Также можно определить представление $\pi_\infty : \mathcal{G} \rightarrow C(\mathbb{T})$ в алгебру функций, непрерывных на единичной окружности. Инверсная полугруппа в $C(\mathbb{T})$ есть $\{z^n\}_{n=-\infty}^\infty$, положим $\pi_\infty(1) = z$ и $\pi_\infty(-1) = z^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Li X. *Semigroups C^* -algebras and amenability of semigroups*, arXiv:1105.5539v2 [math.OA] 22 Feb 2012.
- [2] Nica A. *C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, J. Operator Theory **27**, 17–52 (1992).
- [3] Cuntz J. *C^* -algebras associated with the $ax + b$ -semigroups over $\mathbb{N}$* , K-theory and Noncommutative Geom. (Valladolid, 2006), European Math. Soc., Zürich, 2008, 201–215.
- [4] Exel R., Vershik A. *C^* -algebras of irreversible dynamical systems* arXiv:math/0203185v1[math.OA] (2002).
- [5] Stacey P.J. *Crossed product of C^* -algebras by $*$ -endomorphisms*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **54**, 204–212 (1993).
- [6] Adjai S., Laca M., Nilsen M., and Raeburn I. *Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **122**, 1133–1141 (1994).
- [7] Murphy G.J. *Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms*, Integral Equat. Oper. Theory **24**, 298–319 (1996).
- [8] Exel R. *Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications*, URL: <http://mtm.ufsc.br/exel/papers/pdynsysfellbun.pdf>
- [9] Anantharaman-Delaroche C. *Purely infinite C^* -algebras arising from dynamical systems*, Bull. Soc. math. France, **125**, 199–225 (1997).
- [10] Renault J. *Cartan subalgebras in C^* -algebras*, arXiv:0803.2284v1[math.OA] (2008).
- [11] Deacony V. *Groupoids associated with endomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **347**, 1779–1786 (1995).
- [12] Raeburn I. *On graded C^* -algebras*, arXiv:1707.04215v1 [math.OA] (13 Jul 2017).
- [13] Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы* (ГОИТИ НКТП СССР, М; 1938).
- [14] Grigoryan S. and Kuznetsova A. *On a grading of the Cuntz algebra*, Lobachevskii J. Math. **40**(10), 1479–1482 (2019).

Сурен Аршакович Григорян

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: gsuren@inbox.ru

Алла Юрьевна Кузнецова

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: alla.kuznetsova@gmail.com

S.A. Grigoryan and A.Yu. Kuznetsova

Local groups and their representations

Abstract. In the paper the notion of a local group is applied in the context of operator algebras, and C^* -algebraic constructions are proposed related to the local group. For local group we define $*$ -representation and strong $*$ -representation which are connected by the extension of the local group. Local group allows you to define the regular representation which is a $*$ -representation, and the respective reduced C^* -algebra, the last is graded over the extension of the local group.

Keywords: Local group, partial isometry, group partial representation, regular representation, graded C^* -algebra.

Suren Arshakovich Grigoryan

Kazan State Energy University,
51, Krasnoselskaya str., Kazan 420066 Russia,
e-mail: gsuren@inbox.ru

Alla Yurjevna Kuznetsova

Kazan Federal University,
18, Kremlevskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: alla.kuznetsova@gmail.com