Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Звягин, В. П. Орлов, А. С. Арсентьев, Эквивалентность слабой разрешимости начально-краевых задач для модели Джеффриса–Олдройда и одной интегродифференциальной системы с памятью, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 79–85

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-79-85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:47:00

В.Г. ЗВЯГИН, В.П. ОРЛОВ, А.С. АРСЕНТЬЕВ

**ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ
ДЖЕФФРИСА–ОЛДРОЙДА И ОДНОЙ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАМЯТЬЮ**

Аннотация. Установлена эквивалентность слабой разрешимости начально-краевых задач для модели Джеффриса–Олдройда и одной интегродифференциальной системы с памятью. Доказательства утверждений существенно опираются на свойства регулярных лагранжевых потоков.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-79-85

1. Модель Джеффриса–Олдройда. Эта модель является одной из важнейших моделей движения одного класса вязкоупругих сред. Приведем ее.

Пусть $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ и $Q_T = [0, T] \times \Omega$. Для модели Джеффриса–Олдройда движения вязкоупругой среды с постоянной плотностью $\rho = 1$ рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) = 2\eta \mathcal{E}(v) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right), \quad (t, x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (3)$$

$$v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad (4)$$

$$v|_{t=0} = v^0, \sigma|_{t=0} = \sigma^0. \quad (5)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ — искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t, x)$ — плотность внешних сил в точках

Поступила в редакцию 24.03.2020, после доработки 24.03.2020. Принята к публикации 25.03.2020.

Благодарности. Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZGU-2020-0035), лемма 1. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00146), теорема 4, и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00051), теорема 5.

$(t, x) \in Q_T$, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций, т.е. $n \times n$ -матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$, σ — девиатор тензора напряжений. Дивергенция $\text{Div } \sigma$ $n \times n$ -матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк матрицы σ . Коэффициенты $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $\eta > 0$ означают время релаксации, время запаздывания и вязкость среды соответственно.

Подробное описание этой модели, проблемы ее разрешимости в слабом и сильном смысле, а также открытые вопросы, связанные с ней, можно найти в [1]. Ниже обсуждаются вопросы, связанные со слабыми решениями.

Пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \text{div } v = 0\}$. Пусть $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)^n$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)^n$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$. Символами H и V обозначаются замыкания $\mathcal{V}$ в нормах $L_2(\Omega)^n$ и $W_2^1(\Omega)^n$ соответственно. Обозначим через $\langle f, v \rangle$ действие функционала f из сопряженного к V пространства V^{-1} на элемент v из V . Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным H^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u, w \rangle = (u, w)$ со скалярным произведением в H (см., например, [2], раздел I.1.4).

Через $M^{n \times n}$ обозначим пространство матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A, B)_{M_{n \times n}} = A : B = \sum_{i=1}^n A_{ij} B_{ij}, \quad A = (A_{ij}), B = (B_{ij}),$$

а через $M_S^{n \times n}$ — подпространство симметричных матриц.

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H , $L_2(\Omega)^n$, $L_2(\Omega)^{n \times n}$, в каких именно — ясно из контекста.

Введем банаховы пространства

$$W_1(0, T) = \{v : v \in L_2(0, T; V) \cap L_{+\infty}([0, T]; H), \quad v' \in L_1(0, T; V^{-1})\},$$

$$W_2(0, T) = \{\sigma \in L_2(0, T; L_2(\Omega, M_S^{n \times n})) \cap C_w([0, T]; W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n}))\}$$

с естественными нормами пересечений. Здесь через $C_w([0, T]; W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n}))$ обозначаются пространства слабо непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в $W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n})$.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n})$. Слабым решением задачи (1)–(5) называется пара функций (v, σ) , $v \in W_1(0, T)$, $\sigma \in W_2(0, T)$, удовлетворяющая при почти всех t тождествам

$$\frac{d}{dt}(v, \varphi) + (\sigma, \nabla \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \langle f, \varphi \rangle, \quad (6)$$

$$(\sigma, \Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left(v_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 2\eta(\mathcal{E}(v), \Phi) + 2\eta\lambda_2 \left(\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(v), \Phi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i \mathcal{E}(v), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right), \quad (7)$$

в смысле теории распределений на $(0, T)$ для всех $\varphi \in \mathcal{V}$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_S^{n \times n})$, и условиям (4), (5).

В [3] установлена

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n})$. Пусть $\sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda_1^{-1}\mathcal{E}(v^0) \in L_2(\Omega, M_S^{n \times n})$. Тогда задача (1)–(5) имеет слабое решение (v, σ) .

2. Интегродифференциальная система с памятью. Рассмотрим задачу, разрешимость которой в слабом смысле установлена в работе [4] (ее развитие для случая диссипативных систем см. в [5]):

$$\begin{aligned} & \partial v(t, x) / \partial t + \sum_{i=1}^n v_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i - \lambda_2 \lambda_1^{-1} \Delta v(t, x) - \\ & - 2\eta(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1^{-2} \operatorname{Div} \int_0^t \exp((s-t)/\lambda_1) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & + \nabla p(t, x) = f_1(t, x), \quad (t, x) \in Q_T; \\ & \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \end{aligned} \quad (9)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad 0 \leq t, \tau \leq T, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (10)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega. \quad (11)$$

Здесь

$$f_1 = f + \sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda_1^{-1}\mathcal{E}(v^0)\exp(-t/\lambda_1) + \exp(-t/\lambda_1)\sigma^0,$$

v^0, σ^0 и константы $\lambda_1, \lambda_2, \eta$ те же, что и в задаче (1)–(5).

Отметим, что (10) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в интегральной форме).

В случае $v \in L_1(0, T; C^1(\Omega)^n)$ с нулевым условием на границе задача (10) нелокально однозначно разрешима в классическом смысле (см. [6]). Однако в случае суммируемой вектор-функции v ситуация сильно усложняется, и приходится использовать более широкие понятия решения задачи (10).

Для формулировки определения слабого решения задачи (8)–(11) нам понадобится обобщение понятия классического решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, понятие регулярного лагранжева потока.

Определение 2. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при почти всех (п.в.) x и любом $t \in [0, T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (10);

2) для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества B с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;

3) при всех $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$

$$z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x)).$$

Определение РЛП см., например, в [7]–[9]. Здесь мы приводим это определение в частном случае ограниченной области Ω и для вектор-функции v с $\operatorname{div} v = 0$.

Справедлив следующий результат о существовании регулярного лагранжева потока.

Теорема 2. Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega)^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП, порожденный v . Более того,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad t, \tau \in \Omega, \quad \text{п. в. } x \in \Omega,$$

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) = \bar{\Omega} \quad (\text{с точностью до множества меры нуль}).$$

Определение 3. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in V$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n})$. Пусть $\sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda_1^{-1}\mathcal{E}(v^0) \in L_2(\Omega, M_S^{n \times n})$. Слабым решением задачи (8)–(11) называется пара функций (v, z) , где $v \in W_1$, а z — РЛП, порожденный v , удовлетворяющая при п.в. t уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v, \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ & \mu_1 \int_0^t \exp((s-t)/\lambda_1)(\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds = \langle f_1, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{V}$ в смысле теории распределений на $(0, T)$, и условиям (11).

Здесь $\mu_0 = 2\eta\lambda_2\lambda_1^{-1}$, $\mu_1 = \eta(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1^{-2}$.

В [4] установлена

Теорема 3. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega, M_S^{n \times n})$. Пусть $\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0) \in L_2(\Omega, M_S^{n \times n})$. Тогда задача (8)–(11) имеет слабое решение (v, z) .

Замечание. В случае, когда слабые решения задач (1)–(5) и (8)–(11) оказываются сильными (гладкими функциями), достаточно просто показывается, что решения каждой задачи порождает решение другой. В общем случае это совсем не очевидно. Ниже мы устанавливаем этот факт в общем случае.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 1. Пусть пара (v, σ) является слабым решением задачи (1)–(5). Тогда пара (v, z) , где z — РЛП, порожденный v , является слабым решением задачи (8)–(11).

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 3. Пусть пара (v, z) является слабым решением задачи (8)–(11). Тогда пара (v, σ) , где

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) = & \exp(-t/\lambda_1)(\sigma^0(x) - \mu_0\mathcal{E}(v^0)(x)) + \\ & + f\mu_1 \int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \mu_0\mathcal{E}(v)(t, x), \end{aligned} \quad (13)$$

является слабым решением задачи (8)–(11).

3. Схема доказательства основных результатов. Приведем схему доказательства теоремы 4.

Пусть пара (v, σ) является слабым решением задачи (1)–(5). Тогда $v \in W_1(0, T)$, и в силу теоремы 1 существует единственный РЛП z , порожденный v . Покажем, что пара (v, z) является слабым решением задачи (8)–(11). Для этого достаточно установить тождество (12).

Введем функцию

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t, x) = & \exp(-t/\lambda_1)(\sigma^0(x) - \mu_0\mathcal{E}(v^0)(x)) + \\ & \mu_1 \int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \mu_0\mathcal{E}(v)(t, x). \end{aligned}$$

Сделаем в (7) замену

$$\tau = \sigma - \bar{\sigma}. \quad (14)$$

Тогда если σ удовлетворяет тождеству (7), то τ удовлетворяет тождеству

$$(\tau, \Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\tau, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n (v_i \tau, \nabla \Phi) = 0 \quad (15)$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_S^{n \times n})$ в смысле теории распределений на $(0, T)$, и $\tau(0, x) = 0$.

Это означает, что справедливо тождество

$$\int_0^T (\tau(t, x), \partial \Psi(t, x) / \partial t) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T (v_i(t, x) \tau(t, x), \partial \Psi(t, x) / \partial x_i) dt = 0, \quad (16)$$

где $\Psi(t, x) = \Phi(x) \phi(t)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_S^{n \times n})$, $\phi \in C_0^\infty(0, T)$.

Оказывается, в тождестве (16) в качестве пробных функций можно брать множество $W = \{\Psi : \Psi \in C_0^\infty(Q_T, M_S^{n \times n})\}$. Тогда из справедливости (16) для $\Psi \in W$ вытекает (см. [7], гл. II, IV), что $\tau = 0$. Следовательно, единственной функцией, удовлетворяющей тождеству (15) и условию $\tau(0, x) = 0$, является $\tau \equiv 0$. Тогда из (14) вытекает, что единственной функцией σ , удовлетворяющей тождеству (7) и условию $\sigma(0, x) = \sigma^0(x)$, является σ , определенная формулой (13).

Подстановка σ , определенной правой частью формулы (13), в тождество (6) показывает, что пара (v, z) является слабым решением задачи (8)–(11), что и доказывает теорему 4.

Приведем схему доказательства теоремы 5. Пусть пара (v, z) является слабым решением задачи (8)–(11). Здесь $v \in W_1(0, T)$, а z — РЛП, порожденный v .

Рассмотрим функцию σ , определенную формулой (13). Покажем, что пара (v, σ) является слабым решением задачи (1)–(5). Для этого достаточно установить, что (v, σ) удовлетворяет тождествам (6) и (7).

Справедливы

Лемма 1. Для функции σ , определенной формулой (13), справедливо включение $\sigma \in W_2(0, T)$.

Лемма 2. Пусть $v \in W_1(0, T)$, а z — РЛП, порожденный v . Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1}) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \Phi(x) \right) = \\ & (\mathcal{E}(v)(t, x), \Phi(x)) - \lambda_1^{-1} \int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1}) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \Phi(x) + \\ & + \sum_{i=1}^n (v_i(t, x) \int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1}) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \partial \Phi(x) / \partial x_i) \end{aligned}$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_S^{n \times n})$ в смысле теории распределений на $(0, T)$.

Лемма 2 для случая гладкой v установлена в [10].

Для доказательства лемм 1 и 2 в выражении

$$\left(\int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1}) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \Phi(x) \right) =$$

$$= \int_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1}) \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) : \Phi(x) dx ds \quad (17)$$

делается замена переменной $x = z(t; 0, y)$. При этом существенно используются свойства 2) и 3) для РЛП z из теоремы 1, обеспечивающие сохранение меры $z(s; t, B)$ при $s, t \in [0, T]$ для любого измеримого множества $B \in \Omega$ в силу условия $\operatorname{div} v(t, x) = 0$.

Справедливость тождеств (6) и (7) доказывается с использованием подстановки в них найденной пары (v, σ) . Это и доказывает теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Воротников Д.А., Звягин В.Г. *Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям вязкоупругих сред типа Джексона*, Вестн. ВГУ, № 2, 30–50 (2009).
- [2] Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ* (Мир, М., 1987).
- [3] Zvyagin V.G., Vortnikov D.A. *Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics* (De Gruyter Series in Nonlinear Anal. and Appl. (12), Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2008).
- [4] Zvyagin V.G., Orlov V.P. *Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory*, Nonlinear Anal.: TMA **172**, 79–98 (2018).
- [5] Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.Н. *О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **59**, № 7, 1243–1257 (2019).
- [6] Orlov V.P., Sobolevskii P.E. *On mathematical models of a viscoelasticity with a memory*, Diff. Integral Equat. **4**, № 1, 103–115 (1991).
- [7] DiPerna R.J., Lions P.L. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98**, 511–547 (1989).
- [8] Ambrosio L. *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158**, 227–260 (2004).
- [9] Crippa G., de Lellis C. *Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow*, J. Reine Angew. Math. **6**, № 6, 15–46 (2008).
- [10] Воротников Д.А., Звягин В.Г. *О сходимости решений регуляризованной задачи для уравнений движения вязкоупругой среды Джексона к решениям исходной задачи*, Фундамент. и прикл. матем. **11**, вып. 4, 49–63 (2005).

Виктор Григорьевич Звягин

Воронежский государственный университет,
 Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
 e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Владимир Петрович Орлов

Воронежский государственный университет,
 Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
 e-mail: orlov_vp@mail.ru

Андрей Сергеевич Арсентьев

Воронежский государственный университет,
 Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
 e-mail: arsenyandre@gmail.com

V.G. Zvyagin, V.P. Orlov, A.S. Arsenyev

Equivalence of weak solvability of initial-boundary value problems for the Jeffreys-Oldroyd and one integro-differential system with memory

Abstract. The equivalence of weak solvability of initial boundary value problems for Jeffreys-Oldroyd model and one integro-differential system with memory is established. The proofs substantially use the properties of regular lagrangean flows.

Keywords: viscoelastic medium, the motion equation, initial-boundary-value problem, weak solution.

Viktor Grigor'evich Zvyagin

Voronezh State University,

1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Vladimir Petrovich Orlov

Voronezh State University,

1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: orlov_vp@mail.ru

Andrey Sergeevich Arsentiev

Voronezh State University,

1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: arsenyandre@gmail.com