Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова, О секционной кривизне связностей с векторным кручением, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 86–92

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-86-92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:21:35

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

П.Н. КЛЕПИКОВ, Е.Д. РОДИОНОВ, О.П. ХРОМОВА

О СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЕ СВЯЗНОСТЕЙ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

Аннотация. Римановы многообразия знакоопределенной секционной кривизны исследовались многими математиками, что обусловлено тесной связью между кривизной и топологией римановых многообразий.

Исследуются римановы многообразия, метрическая связность которых является связностью с векторным кручением. В данный класс связностей попадает связность Леви–Чивита. Хотя тензор кривизны этих связностей не обладает симметриями тензора кривизны связности Леви–Чивита, но определить секционную кривизну представляется возможным. Изучается вопрос о связи секционной кривизны связностей с векторным кручением и секционной кривизны связности Леви–Чивита, или римановой кривизны. Исследуется знак секционной кривизны связностей с векторным кручением. В качестве основного тестового примера рассматриваются группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: секционная кривизна, связность с векторным кручением, группы Ли.

УДК: 514.764

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-86-92

Введение. Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией риманова многообразия, и, в частности, влияние знака секционной кривизны на топологическое строение риманова многообразия. В этом направлении хорошо известен ряд теорем римановой геометрии: теорема Адамара–Картана о полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны, теорема М. Громова о римановом многообразии неотрицательной кривизны Риччи [1], теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова–В.А. Топоногова, теорема о сфере, экстремальные теоремы в римановой геометрии, ряд других результатов [2].

Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае. Если секционная кривизна $K_\sigma > 0$, то однородное риманово многообразие либо диффеоморфно КРОСПу (компактному симметрическому пространству ранга один), либо одному из пространств Алоффа–Берже–Уоллача, каждое из которых не гомеоморфно ни одному из симметрических пространств [3]–[5]. В случае неположительной секционной кривизны хорошо известны результаты следующих работ [6]–[8]. Другие результаты о секционной кривизне однородных римановых многообразий содержатся в обзорах [9]–[10].

Поступила в редакцию 29.02.2020, после доработки 29.02.2020. Принята к публикации 25.03.2020.

Пусть (M, g) — риманово многообразие, ∇^g — связность Леви-Чивита, ∇ — связность с векторным кручением, определяемая по формуле

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X, Y — произвольные векторные поля.

При этом кручение $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ связности ∇ есть [11]:

$$T(X, Y) = g(V, X)Y - g(V, Y)X.$$

Тензор кривизны определим равенством $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z$. Заметим, что

- 1) $\nabla_Y(\nabla_X^g Z) = \nabla_Y^g(\nabla_X^g Z) + g(Y, \nabla_X^g Z)V - g(V, \nabla_X^g Z)Y$;
- 2) $\nabla_Y^g(g(X, Y)V) = \nabla_Y^g(g(X, Z)V) + g(Y, g(X, Z)V)V - g(V, g(X, Z)V)Y = g(\nabla_Y^g X, Z)V + g(X, \nabla_Y^g Z)V + g(X, Z)\nabla_Y^g V + g(Y, V)g(X, Z)V - g(V, V)g(X, Z)V$.

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= \nabla_Y(\nabla_X^g Z + g(X, Y)V - g(V, Y)X) = \nabla_Y^g \nabla_X^g Z + g(Y, \nabla_X^g Z)V - g(V, \nabla_X^g Z)Y + \\ &+ g(\nabla_Y^g X, Z)V + g(X, \nabla_Y^g Z)V + g(X, Z)\nabla_Y^g V + g(Y, V)g(X, Z)V - g(V, V)g(X, Z)V - \\ &- g(\nabla_Y^g V, Z)X - g(V, \nabla_Y^g Z)X - g(V, Z)\nabla_Y^g V - g(Y, X)g(V, Z)V - g(V, X)g(V, Z)Y. \end{aligned}$$

Кроме того, $\nabla_{[X, Y]}Z = \nabla_{[X, Y]}^g Z + g([X, Y], Z)V - g(V, Z)[X, Y] = \nabla_{[X, Y]}^g Z + g(\nabla_X^g Y - \nabla_Y^g X, Z)V - g(V, Z)(\nabla_X^g Y - \nabla_Y^g X)$.

Таким образом, после приведения подобных членов для тензоров кривизны связностей ∇ и ∇^g имеем $R(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + g(X, Z)\nabla_Y^g V - g(Y, Z)\nabla_X^g V + [g(V, V)g(Y, Z) - g(\nabla_Y^g V, Z) - g(V, Y)g(V, Z)]X - [g(V, V)g(X, Z) - g(\nabla_X^g V, Z) - g(V, X)g(V, Z)]Y + [g(Y, V)g(X, Z) - g(X, V)g(Y, Z)]V$. Полагая в этом равенстве $\pi(X) = g(X, V)$, получаем $R(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + g(X, Z)\nabla_Y^g V - g(Y, Z)\nabla_X^g V + [\pi(V)g(Y, Z) - g(\nabla_Y^g V, Z) - \pi(Y)\pi(Z)]X - [\pi(V)g(X, Z) - g(\nabla_X^g V, Z) - \pi(X)\pi(Z)]Y + [\pi(Y)g(X, Z) - \pi(X)g(Y, Z)]V$. Отсюда для $R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$ имеем

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, T) &= R^g(X, Y, Z, T) + g(X, Z)[g(\nabla_Y^g V, T) + \pi(T)\pi(Y) - \frac{1}{2}g(Y, T)\pi(V)] + \\ &+ g(Y, T)[g(\nabla_X^g V, Z) + \pi(Z)\pi(X) - \frac{1}{2}g(X, Z)\pi(V)] - g(Y, Z)[g(\nabla_X^g V, T) + \pi(T)\pi(X) - \\ &- \frac{1}{2}g(X, T)\pi(V)] - g(X, T)[g(\nabla_Y^g V, Z) + \pi(Z)\pi(Y) - \frac{1}{2}g(Y, Z)\pi(V)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Положим $\omega(X, Z) = g(\nabla_X^g V, Z) + \pi(X)\pi(Z) - \frac{1}{2}g(X, Z)\pi(V)$.

Тогда (1) представимо в виде

$$R(X, Y, Z, T) = R^g(X, Y, Z, T) + \omega \oslash g(X, Y, Z, T),$$

где $\omega \oslash g(X, Y, Z, T) = g(X, Z)\omega(Y, T) + g(Y, T)\omega(X, Z) - g(Y, Z)\omega(X, T) - g(X, T)\omega(Y, Z)$ — произведение Кулкарни-Номидзу.

Также полезным будет заметить, что для векторных полей $Z = X$ и $T = Y$ равенство (1) может быть переписано как

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= R^g(X, Y, X, Y) + \\ &+ g(X, X)g(\nabla_Y^g V, Y) - g(X, Y)[g(\nabla_X^g V, Y) + g(\nabla_Y^g V, X)] + g(Y, Y)g(\nabla_X^g V, X) + \\ &+ \pi(V)g^2(X, Y) - g(X, X)g(Y, Y)] + \pi^2(X)g(Y, Y) + \pi^2(Y)g(X, X) - 2\pi(X)\pi(Y)g(X, Y). \end{aligned} \quad (2)$$

Определим секционную кривизну в направлении линейно независимых векторов X и Y

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2}, \quad (3)$$

где числитель задается равенством (2). Заметим, что данное определение корректно [12]. Поэтому далее будем предполагать пару $\{X, Y\}$ ортонормированной. Тогда секционная кривизна (3) примет вид

$$K(X, Y) = K^g(X, Y) + g(\nabla_Y^g V, Y) + g(\nabla_X^g V, X) - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y). \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть (M, g) — риманово многообразие, ∇^g — связность Леви-Чивита, ∇ — связность с векторным кручением. Секционные кривизны $K^g(X, Y)$ и $K(X, Y)$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$g(\nabla_Y^g V, Y) + g(\nabla_X^g V, X) - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y) = 0.$$

1. Секционная кривизна связностей с векторным кручением на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Всюду в этом пункте будем предполагать, что $(M, g) = (G, g)$ является группой Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g , $\dim G \geq 3$. Рассмотрим класс связностей с векторным кручением для групп Ли. В этом случае все формулы предыдущего пункта можно переписать с помощью оператора $u(X, Y) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, определяемого по формуле [10]

$$2g(u(X, Y), Z) = g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

где через $\mathfrak{g}$ обозначена алгебра Ли группы Ли G .

Действительно, из определения оператора u , заключаем, что $g(u(X, V), X) = \frac{1}{2}g([V, X], X)$. И поскольку $\nabla_X^g V = \frac{1}{2}[X, V] - u(X, V)$, то (4) будет иметь вид

$$K(X, Y) = K^g(X, Y) + g([Y, V], Y) + g([X, V], X) - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y). \quad (5)$$

Заметим, что выражение $g([Y, V], Y) + g([X, V], X) + \pi^2(X) + \pi^2(Y) - \pi(V)$ может быть переписано в терминах структурных констант алгебры $\mathfrak{g}$.

Действительно, фиксируем некоторый базис $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ в $\mathfrak{g}$ и положим $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, $V = V^k E_k$, $[E_i, E_j] = c_{ij}^s E_s$, $g(E_i, E_j) = g_{ij}$. Тогда $g([X, V], X) = c_{ik}^t g_{ts} V^k X^i X^s$, $\pi^2(X) = (g_{ik} V^k)^2 (X^i)^2$, $\pi(V) = \|V\|^2 = g_{ks} V^k V^s$, т. е. $g([Y, V], Y) + g([X, V], X) + \pi^2(X) + \pi^2(Y) - \pi(V) = c_{jk}^t g_{ts} V^k Y^j Y^s + c_{ik}^t g_{ts} V^k X^i X^s + (g_{ik} V^k)^2 (X^i)^2 + (g_{jk} V^k)^2 (Y^j)^2 - g_{ks} V^k V^s$ является многочленом второй степени с постоянными коэффициентами (в силу левоинвариантности векторных полей и римановой метрики) относительно переменных X^i, Y^j . Ясно, что секционные кривизны совпадают для любых двумерных площадок в том и только том случае, если данный многочлен тождественно равен нулю, а значит, все его коэффициенты и свободный член равны нулю. Равенство нулю последнего равносильно тому, что $\|V\|^2 = 0$, т. е. $V = 0$. Таким образом, равенство секционных кривизн возможно в том и только том случае, если связность с векторным кручением совпадает со связностью Леви-Чивита.

Теорема 2. Пусть (G, g) — группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой, ∇ — связность с векторным кручением. Тогда всегда существует площадка $\{X, Y\}$, для которой $K(X, Y) \neq K^g(X, Y)$.

Более того, если метрика g биинвариантна, то $u(X, Y) = 0$, $g([X, Y], X) = 0$ и $K^g(X, Y) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2$ (см., например, [1], с. 51). Таким образом, из (5) для секционных кривизн биинвариантной метрики выполняется следующее соотношение:

$$K(X, Y) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2 - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y). \quad (6)$$

Далее нам потребуется следующая информация о базисах Дж. Милнора трехмерных групп Ли. Если G — трехмерная унимодулярная группа Ли, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G , то в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором выполняются равенства [9]:

$$[E_1, E_2] = \lambda_3 E_3, \quad [E_2, E_3] = \lambda_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2.$$

Если G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, то в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$ такой, что [9]:

$$[E_1, E_2] = \alpha E_2 + \beta E_3, \quad [E_1, E_3] = \gamma E_2 + \delta E_3, \quad [E_2, E_3] = 0,$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Заметим, что в случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант $D = \alpha\delta - \gamma\beta$ определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма.

С учетом данных обозначений справедлива

Теорема 3. Пусть (G, g) — трехмерная группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой, ∇ — связность с векторным кручением. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) В унимодулярном случае условие $K > 0$ влечет, что универсальная накрывающая группы G изоморфна специальной унитарной группе $SU(2)$.
- 2) В неунимодулярном случае всегда существуют площадки неположительной секционной кривизны.

Схема доказательства. Рассмотрим унимодулярный случай. В базисе Милнора $\{E_1, E_2, E_3\}$ положим $K_{ij} = K(E_i, E_j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда из (5) имеем $K_{ij} = K_{ij}^g - (V^k)^2$, где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j \neq k$. Как показано в [13], $\min K^g \in \{K_{12}^g, K_{13}^g, K_{23}^g\}$ и $\min K^g \leq 0$ в случае, когда группа G локально не гомеоморфна $SU(2)$, а значит, одна из кривизн K_{ij} , $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, неположительна.

Пусть теперь группа G неунимодулярна, а секционная кривизна положительна. Сделаем замену $\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Тогда для бивекторов базиса Милнора имеем $K_{ij} > 0$, где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Тем самым получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} K_{12} &= -1 - 2\xi - \xi^2 - 2\eta^2\xi - \eta^2\xi^2 - (1 + \xi)V^1 - (V^3)^2 > 0, \\ K_{13} &= -1 + 2\xi - \xi^2 + 2\eta^2\xi - \eta^2\xi^2 - (1 - \xi)V^1 - (V^2)^2 > 0, \\ K_{23} &= -1 + \xi^2 + \eta^2\xi^2 - 2V^1 - (V^1)^2 > 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Причем ξ и η не обращаются в нуль одновременно. В противном случае последнее неравенство системы приводит к противоречию.

Положим $V^2 = V^3 = 0$. Тогда из первого и последнего неравенств (7) следует

$$\begin{aligned} V^1 &< -\frac{1 + 2\xi + \xi^2 + 2\eta^2\xi + \eta^2\xi^2}{1 + \xi}, \\ -1 - \sqrt{\eta^2\xi^2 + \xi^2} &< V^1 < -1 + \sqrt{\eta^2\xi^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

То есть должно выполняться

$$-1 - \sqrt{\eta^2\xi^2 + \xi^2} < -\frac{1 + 2\xi + \xi^2 + 2\eta^2\xi + \eta^2\xi^2}{1 + \xi}$$

или

$$\frac{\xi + \xi^2 + 2\eta^2\xi + \eta^2\xi^2}{1 + \xi} < \xi\sqrt{\eta^2 + 1},$$

что равносильно истинности неравенства вида

$$1 + \xi + 2\eta^2 + \eta^2\xi < (1 + \xi)\sqrt{\eta^2 + 1}$$

или

$$(1 + \xi)^2 + 2(1 + \xi)\eta^2(2 + \xi) + \eta^4(2 + \xi)^2 < (1 + \xi)^2 + (1 + \xi)^2\eta^2.$$

Но это невозможно в силу ограничений на ξ и η . Следовательно, система неравенств (7) не является совместной, и справедливо утверждение теоремы.

Замечание. В случае, если универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$, существует целый класс левоинвариантных римановых метрик на группе G , для которых $K^g > 0$ (см., например, [13]). Аналогичный результат справедлив и для некоторых связностей с векторным кручением, отличных от связности Леви–Чивита.

Теорема 4. Пусть (G, g) — группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой, $\dim G \geq 3$, ∇ — связность с векторным кручением. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если группа G коммутативна, то $K \in [-\|V\|^2, 0]$ (в случае связности Леви–Чивита секционная кривизна равна нулю).
- 2) Если группа G компактна, $\text{rk} G > 1$, а метрика g биинвариантна, то $K \leq 0$ для некоторого двумерного направления (в случае связности Леви–Чивита секционная кривизна неотрицательна).
- 3) Если группа G компактна, а метрика g биинвариантна, то условие $K > 0$ влечет, что универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$. Более того, для таких групп Ли любая связность с условием $\|V\| < 1/2$ имеет положительную секционную кривизну.

Схема доказательства. Если G с левоинвариантной римановой метрикой g коммутативна, то из (5) следует $K(X, Y) = \|V\|^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi)$, где базис $\{X, Y\}$ ортонормирован, а φ и ψ углы между X, Y и V соответственно. Понятно, что минимум $K(X, Y)$ достигается, когда, например, X и Y ортогональны V . Рассмотрим $V^\perp$ — ортогональное вектору V и L — порожденное произвольным ортонормированным базисом $\{X, Y\}$ подпространства $\mathfrak{g}$. По формуле Грассмана для вычисления размерности суммы подпространств получаем $\dim(V^\perp \cap L) \geq 1$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $Y \in V^\perp \cap L$, а значит, $K(X, Y) = \|V\|^2(\cos^2 \varphi - 1)$. Следовательно, $\max K(X, Y) = 0$.

Пусть группа G компактна, $\text{rk} G > 1$, а метрика g биинвариантна, тогда существуют элементы $X, Y \in \mathfrak{g}$ такие, что $[X, Y] = 0$. Ортонормируя базис $\{X, Y\}$, в силу условия $[X, Y] = 0$ и формулы (6) секционной кривизны для биинвариантной метрики получаем $K(X, Y) = \|V\|^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi)$, где φ и ψ — углы между X, Y и V соответственно. Как и ранее рассмотрим подпространства $V^\perp$ и L . Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $X \in V^\perp \cap L$, а значит, $K(X, Y) = -\|V\|^2 \sin^2 \psi$.

Пусть G компактна, метрика g биинвариантна, $K > 0$, тогда из утверждения 2) теоремы следует $\text{rk} G = 1$, а универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$. Наконец, пользуясь простотой алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$, можем считать без ограничения общности рассуждений, что метрика g порождена формой Киллинга. В этом случае имеем $K(X, Y) = \frac{1}{4} + \|V\|^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi)$ и $\min K(X, Y) = \frac{1}{4} - \|V\|^2$. Таким образом, $K(X, Y) > 0$ в том и только том случае, если $\|V\| < 1/2$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Громов М. *Знак и геометрический смысл кривизны* (НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2000).
- [2] Громоу Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом* (Мир, М., 1971).
- [3] Berger M. *Les varietes riemanniennes homogenes normales a courbure strictement positive*, Ann. Sc. Norm. Pisa. **15**, (1961).
- [4] Wallach N.R. *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Ann. Math. **2**(96), 277–295 (1972).
- [5] Bérard Bergery L. *Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive*, J. Math. Pures Appl. **55**, 47–67 (1976).
- [6] Alekseevskii D.V. *Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature*, Math. Sb. (N.S.) **96**, 93–117 (1975).
- [7] Heintze E. *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Mat. Ann. **211**, 23–34 (1974).
- [8] Bérard Bergery L. *Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **4**(11), 543–576 (1978).
- [9] Milnor J. *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math. **21**, 293–329 (1976).
- [10] Nikonov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds*, J. Math. Sci. **146**(6), 6313–6390 (2007).
- [11] Agricola I., Kraus M. *Manifolds with vectorial torsion*, Diff. Geometry and Appl. **46**, 130–147 (2016).
- [12] Manuraja D. *Manifolds Admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Shur's theorem*, Int. J. Contemp. Math. Sci. **3**(25), 1223–1232 (2018).
- [13] Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups*, Diff. Geometry and Appl.: Proc. of the 7th Inter. Conf., Brno, Masaryk Univ. in Brno (Czech Republic), 111–126 (1999).

Павел Николаевич Клепиков

Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия,
e-mail: askingnetbarnaul@gmail.com

Евгений Дмитриевич Родионов

Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия,
e-mail: edr2002@mail.ru

Олеся Павловна Хромова

Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия,
e-mail: khromova.olesya@gmail.com

P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, O.P. Khromova

Sectional curvature of connections with vectorial torsion

Abstract. Riemannian manifolds of sign-defined sectional curvature have been studied by many mathematicians, due to the close relationship between curvature and the topology of Riemannian manifolds.

We investigate Riemannian manifolds whose metric connection is a connection with vectorial torsion. The Levi–Civita connection contains into this class of connections. Although the curvature tensor of these connections does not possess the symmetries of the Riemannian curvature tensor, it seems possible to determine sectional curvature. We study the question of a connectivity of the sectional curvature of connections with vectorial torsion and the sectional curvature of the Levi–Civita connection, or Riemannian curvature. We study the sign of sectional curvature of a connection with vectorial torsion. As the main test example, we consider Lie groups with a left-invariant Riemannian metric.

Keywords: sectional curvature, connection with vectorial torsion, Lie groups.

Pavel Nikolaevich Klepikov,
Altai State University,
61 Lenina str., Barnaul, 656049 Russia,
e-mail: askingnetbarnaul@gmail.com

Evgeny Dmitrievich Rodionov
Altai State University,
61 Lenina str., Barnaul, 656049 Russia,
e-mail: edr2002@mail.ru

Olesya Pavlovna Khromova
Altai State University,
61 Lenina str., Barnaul, 656049 Russia,
e-mail: khromova.olesya@gmail.com