Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Трошин, Фрактал Коха в неевклидовых геометриях, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 6, 99–103

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-99-103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:22:30

Краткое сообщение, представленное В.В. Шурыгиным

П.И. ТРОШИН

ФРАКТАЛ КОХА В НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Аннотация. Предложены сферический и гиперболический (на плоскости Лобачевского) аналоги кривой Коха и снежинки Коха. Приведены формулы, описывающие метрические характеристики этих фракталов. Указан способ их построения при помощи групп собственных движений рассматриваемых пространств.

Ключевые слова: кривая Коха, снежинка Коха, остров Коха, сферическая геометрия, гиперболическая геометрия, геометрия Лобачевского, фрактал, L -система.

УДК: 514.135:514.132

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-99-103

Устройство кривой Коха. В статье [1] автором предложен аналог треугольника Серпинского на евклидовой плоскости для плоскости Лобачевского, построенный с помощью известного в теории фракталов метода систем итерированных функций [2]. При этом принцип проведения аналогии основывался на применении групп движений обеих плоскостей. Используя схожий принцип, в [3] семейство треугольников Серпинского было построено на поверхности сферы, а в [4] на плоскости Лобачевского был предложен аналог аттрактора системы двух аффинных отображений плоскости (важный пример из фрактальной геометрии, см. [2]). В данной работе мы продолжаем исследование построений фрактальных множеств в неевклидовых пространствах, а именно, строим аналоги кривой Коха и снежинки Коха (1904 г., [5]) на поверхности сферы и на плоскости Лобачевского, также используя группы движений этих пространств.

Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, являющееся плоскостью Лобачевского Λ с константой кривизны 1 или сферой $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса 1 (ρ — соответствующая метрика). Для иллюстраций в данной статье выбрана модель Бельтрами–Клейна Λ_{BK} плоскости Лобачевского (в ней прямолинейный отрезок является геодезическим сегментом). К другим моделям Λ можно перейти, используя соответствующие изометрии [6].

Зафиксируем произвольный геодезический сегмент $K^0 = A_0^0 A_1^0 \subset M$ длины $S > 0$ (в случае Λ) или $2\pi > S > 0$ (в случае S^2) с концевыми точками $A_0^0, A_1^0 \in M$, а также число $\gamma \in (0, 2)$. Множество K^1 получается заменой сегмента K^0 на ломаную линию $A_0^1 A_1^1 A_2^1 A_3^1 A_4^1$ со следующими свойствами (рис. 1, $n = 1$):

$$A_0^1 = A_0^0, \quad A_4^1 = A_1^0, \quad A_1^1, A_3^1 \in A_0^1 A_4^1,$$

Поступила в редакцию 12.03.2020, после доработки 12.03.2020. Принята к публикации 25.03.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00295).

Рис. 1. Нумерация вершин $A_{4^k(p+4q)}^n$ в предфрактале $\mathcal{K}^n$ кривой Коха в $\mathcal{M}$

$$\rho(A_0^1, A_1^1) = \rho(A_1^1, A_2^1) = \rho(A_2^1, A_3^1) = \rho(A_3^1, A_4^1), \quad \rho(A_1^1, A_3^1) = \gamma \rho(A_0^1, A_1^1).$$

Множество $\mathcal{K}^n = A_0^n \dots A_{4^n}^n$, $n \geq 1$, получается из множества $\mathcal{K}^{n-1}$ заменой каждого сегмента ломаной на четыре новых сегмента аналогично построению множества $\mathcal{K}^1$. Для вершин

$$A_{4^k(2+4q)}^n, \quad n \geq 1, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad q = 0, \dots, 4^{n-k-1} - 1,$$

существует два способа их выбора (по одну или по другую сторону от ломаной $\mathcal{K}^{n-1}$), поэтому условимся выбирать их так, как показано на рис. 1. Тогда множество $\mathcal{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}^n$ (предел в метрике Хаусдорфа) будет аналогом в $\mathcal{M}$ классической кривой Коха в $\mathbb{R}^2$. Для построения предфрактала $\mathcal{K}^n$, $n \geq 0$, необходимо знать метрические характеристики этого множества: величины сторон и углов.

Предложение 1 (об устройстве предфрактала кривой Коха). *Множество вершин предфрактала $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{M}$, $n \geq 1$, без концевых вершин A_0^n и $A_{4^n}^n$ распадается на n дизъюнктивных семейств ($k = 0, \dots, n-1$), каждое из которых состоит из 4^{n-k-1} равных между собой равнобедренных треугольников*

$$\triangle A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n, \quad q = 0, \dots, 4^{n-k-1} - 1,$$

с основаниями $A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n$, при этом:

- 1) $\rho(A_{4^k(1+4q)}^n, A_{4^k(2+4q)}^n) = \rho(A_{4^k(2+4q)}^n, A_{4^k(3+4q)}^n) = \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}},$
- 2) $\rho(A_{4^k(1+4q)}^n, A_{4^k(3+4q)}^n) = \frac{\gamma S}{(2+\gamma)^{n-k}},$
- 3) $\cos \angle A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n = \cos \angle A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n A_{4^k(1+4q)}^n =$

$$= \begin{cases} \operatorname{cth} \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}} \operatorname{th} \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}} & \text{в случае } \Lambda; \\ \operatorname{ctg} \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}} \operatorname{tg} \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}} & \text{в случае } \mathbb{S}^2, \end{cases}$$

$$4) \quad \cos \angle A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}}}{\operatorname{sh}^2 \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}}} & \text{в случае } \Lambda; \\ 1 - 2 \frac{\sin^2 \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)^{n-k}}}{\sin^2 \frac{S}{(2+\gamma)^{n-k}}} & \text{в случае } \mathbb{S}^2. \end{cases}$$

Замечание 1. Для произвольной вершины $A_i^n = A_{4^k(p+4q)}^n \in \mathcal{K}^n$

$$k = \phi(i), \quad p = \frac{i}{4^{\phi(i)}} \pmod{4},$$

где $\phi(i)$ — наибольшая степень числа 4, делящая $i \in \mathbb{N} : \phi(i) = \max\{k = 0, 1, \dots \mid i : 4^k\}$.

Замечание 2. В частности, при $\gamma = 1$ треугольники $\triangle A_{4^{i+1}}^n A_{4^{i+2}}^n A_{4^{i+3}}^n, i = 0, \dots, 4^{n-1} - 1$, получаются равносторонними (хотя и с различными углами при разных n).

Для построения снежинки (острова) Коха составим фигуру, показанную на рис. 2, из трех экземпляров кривой Коха ABC, CDE, EFA , при этом $S \in (0, 2\pi/3]$ в случае $\mathbb{S}^2$.

РИС. 2. Снежинка Коха ($n = 5$) в Λ_{BK} ((a) и (b)) и на сфере $\mathbb{S}^2$ ((c) и (d))

Предложение 2 (об устройстве предфрактала снежинки Коха). Для снежинки Коха в дополнение к формулам из предложения 1 мы имеем

$$\cos \angle ACE = \cos \angle CEA = \cos \angle EAC = \begin{cases} \operatorname{cth} S \operatorname{th} \frac{S}{2} = 1 - 2 \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{S}{2}}{\operatorname{sh}^2 S} & \text{в случае } \Lambda; \\ \operatorname{ctg} S \operatorname{tg} \frac{S}{2} = 1 - 2 \frac{\sin^2 \frac{S}{2}}{\sin^2 S} & \text{в случае } \mathbb{S}^2. \end{cases}$$

Предложение 3. Для снежинки Коха фигуры ABC и BCD равны, если и только если

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{S}{2}}{\operatorname{sh} S} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)}}{\operatorname{sh} \frac{S}{2+\gamma}}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad \text{в случае } \Lambda; \quad \frac{\sin \frac{S}{2}}{\sin S} = \frac{\sin \frac{\gamma S}{2(2+\gamma)}}{\sin \frac{S}{2+\gamma}}, \quad \gamma \in (1, 2), \quad \text{в случае } \mathbb{S}^2.$$

Графики зависимостей $S = S(\gamma)$ изображены на рис. 3.

Рис. 3. Кривые $S = S(\gamma)$ из предложения 3 (слева — для Λ , справа — для $\mathbb{S}^2$)

Используя предложение 3, мы построили примеры снежинки Коха (рис. 2, (b) и (d)), обладающие дополнительными симметриями. Непосредственно способ построения ломаной линии $\mathcal{K}^n$ указывается в следующем пункте.

Построение кривых $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{M}$. Для построения ломаной $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{M}$ воспользуемся предложенной нами модификацией метода “ L -систем” (этот метод известен в евклидовых пространствах [7]). Произвольно зафиксируем две первые вершины $A_0^n, A_1^n \in \mathcal{M}$, $\rho(A_0^n, A_1^n) = \frac{S}{(2+\gamma)^n}$ (для этого можно воспользоваться преобразованиями из группы движений пространства $\mathcal{M}$). Последовательно получим вершины A_{i+1}^n поворотом вершин A_{i-1}^n вокруг вершин A_i^n на углы $\pi + \varphi$, рассчитанные по формулам 3) и 4) из предложения 1, а именно, если $A_i^n = A_{4^k(1+4q)}^n$ или $A_i^n = A_{4^k(3+4q)}^n$, то

$$\varphi = \angle A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n = \angle A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n A_{4^k(1+4q)}^n,$$

если же $A_i^n = A_{4^k(2+4q)}^n$, то

$$\varphi = -\angle A_{4^k(1+4q)}^n A_{4^k(2+4q)}^n A_{4^k(3+4q)}^n;$$

здесь $n \geq 1$, $k = 0, \dots, n-1$, $q = 0, \dots, 4^{n-k-1} - 1$.

В случае сферы $\mathbb{S}^2$ для поворота вокруг точки можно воспользоваться формулой Родрига [8], [9], а в случае плоскости Лобачевского Λ группа ее движений, включающая повороты, описана в [6].

Для построения снежинки Коха при объединении трех экземпляров кривой Коха дополнительно воспользуемся формулами из предложений 2 и 3.

Заключение. Получаемые нами фрактальные кривые не являются самоподобными в отличие от классической кривой Коха из-за отсутствия понятия подобия в неевклидовых геометриях. В данной работе мы предпочли принцип итерационного деления геодезических сегментов в заданном соотношении принципу равенства углов, из-за чего предфракталы $\mathcal{K}^n$ и $\mathcal{K}^{n+1}$ пересекаются по совокупности геодезических сегментов и в фигуре сохраняется некоторая “прямолинейность”.

Благодаря схожести тригонометрических формул сферической и гиперболической геометрий, удалось компактно описать фрактал Коха сразу в двух метрических пространствах. С другой стороны, сложные формулы для собственных движений в этих пространствах существенно затрудняют вычисления и сохранение точности численных построений, учитывая экспоненциальный рост количества вершин предфрактала $\mathcal{K}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Troshin P.I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 751–762 (2017).

- [2] Barnsley M.F. *Fractals everywhere* (Acad. Press Professional, San Diego, 1988).
- [3] Зубкова С.К., Трошин П.И. *Фрактальный аттрактор в неевклидовой геометрии на примере треугольника Серпинского*, Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского **56**, 128–130 (Изд-во Казанск. матем. о-ва, Изд-во Акад. наук РТ, Казань, 2018).
- [4] Лисенков Д.С., Трошин П.И. *Неевклидов аналог аттрактора пары линейных отображений на плоскости*, Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского **56**, 174–177 (Изд-во Казанск. матем. о-ва, Изд-во Акад. наук РТ, Казань, 2018).
- [5] von Koch H. *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*, Arkiv för Matem. **1**, 681–704 (1904).
- [6] Сосов Е.Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: Учебно-метод. пособие* (Казанск. ун-т, Казань, 2016).
- [7] Prusinkiewicz P. *Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants*, Lecture Notes in Biomathematics № 79 (Springer-Verlag, New York, 1989).
- [8] Rodrigues O. *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'une système solide dans l'espace et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire*, J. Math. Pures Appl. **5**, 380–440 (1840).
- [9] Piña E. *Rotations with Rodrigues' vector*, Eur. J. Phys. **32**, 1171–1178 (2011).

Павел Игоревич Трошин

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: paul.troshin@gmail.com

P.I. Troshin

Koch fractal in non-Euclidean geometries

Abstract. We propose a spherical and a hyperbolic (on the Lobachevskii plane) analogues for the Koch curve and the Koch snowflake. The formulae describing metric characteristics of these fractals are given. We also suggest the method of construction for these curves with the help of the groups of rigid motions of the spaces in question.

Keywords: Koch curve, Koch snowflake, Koch island, spherical geometry, hyperbolic geometry, Lobachevskii geometry, fractal, L -system.

Pavel Igorevich Troshin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: paul.troshin@gmail.com