Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Абасов, О сумме узких ортогонально аддитивных операторов, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-3-9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:47:27

Н.М. АБАСОВ

О СУММЕ УЗКИХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. В работе рассматриваются ортогонально аддитивные операторы, заданные на векторной решетке E и принимающие значение в банаховом пространстве X . Ортогонально аддитивный оператор $T : E \rightarrow X$ называется узким, если для любых $e \in E$, $\varepsilon > 0$ существует разбиение $e = e_1 \sqcup e_2$ элемента e на два дизъюнктивных осколка e_1 и e_2 такое, что выполняется неравенство $\|Te_1 - Te_2\| < \varepsilon$. Установлено, что сумма двух ортогонально аддитивных операторов $S + T$, заданных на порядково полной, безатомной векторной решетке E и принимающих значение в банаховом пространстве X , при условии, что S — узкий, а T — латерально-по-норме непрерывный, C -компактный оператор, также является узким оператором.

Ключевые слова: векторная решетка, ортогонально аддитивный оператор, узкий оператор, латерально-по-норме непрерывный оператор, C -компактный оператор.

УДК: 517.98:519.46

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-3-9

ВВЕДЕНИЕ

Узкие операторы в пространствах измермых функций, как самостоятельный объект исследования, впервые попали в поле зрения исследователей в 1990 г. [1]. В течение последующих двадцати лет теория узких операторов активно развивалась. Промежуточные итоги теории были подведены в монографии [2]. Линейные узкие операторы в векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах изучались в работах [3], [4], [5]. Одной из важных проблем теории узких операторов является вопрос об узости суммы двух операторов. В общем случае даже сумма двух линейных узких операторов узкой не является [6]. Тем не менее в отдельных случаях, при наложении дополнительных условий на слагаемые, сумма сохраняется узкой [7].

В данной статье данная проблема рассматривается в контексте теории нелинейных ортогонально аддитивных операторов. Отметим, что данная теория в последнее время активно развивается [8]–[13]. В работе установлено, что для ортогонально аддитивных операторов, заданных на порядково полной, безатомной векторной решетке и принимающих значение в банаховом пространстве, сумма узкого и латерально-по-норме-непрерывного, C -компактного операторов также является узким оператором.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Стандартным источником ссылок по теории векторных решеток являются монографии [14], [15].

Поступила в редакцию 25.06.2019, после доработки 25.06.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Все векторные решетки, рассматриваемые ниже в тексте, являются архимедовыми. Два элемента x и y векторной решетки E называются *дизъюнктивными* (обозначение $x \perp y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Элемент y векторной решетки E называется *осколком* элемента $x \in E$, если $y \perp (x - y)$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x . Множество всех осколков x обозначается через $\mathfrak{F}_x$. Будем писать $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$, если $x = \sum_{i=1}^n x_i$ и $x_i \perp x_j$, $i \neq j$. Для суммы двух дизъюнктивных элементов x и y будем использовать обозначение $x \sqcup y$. Два осколка x_1, x_2 элемента x называются *взаимно дополнительными*, если $x = x_1 \sqcup x_2$. Элемент e векторной решетки E называется атомом, если из соотношений $0 \leq x \leq |e|$, $0 \leq y \leq |e|$ и $x \wedge y = 0$ следует, что либо $x = 0$, либо $y = 0$. Векторная решетка E называется *безатомной*, если не существует ненулевых атомов $e \in E$.

Пусть E — векторная решетка, и X — действительное векторное пространство. Оператор $T: E \rightarrow X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x + y) = Tx + Ty$ для любых дизъюнктивных элементов $x, y \in E$. Из определения ясно, что $T(0) = 0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством, относительно сложения операторов и умножения на скаляры.

Рассмотрим типичный пример ортогонально аддитивного оператора.

Пусть (A, Σ, μ) и (B, Ξ, ν) — пространства с полными σ -конечными мерами и $(A \times B, \mu \times \nu)$ — их пополненное произведение. Пусть $K: A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям ((C_1) и (C_2) называются условиями Каратеодори):

(C_0) $K(s, t, 0) = 0$ для $\mu \times \nu$ -почти всех $(s, t) \in A \times B$;

(C_1) $K(\cdot, \cdot, r)$ является $\mu \times \nu$ -измеримой для всех $r \in \mathbb{R}$;

(C_2) $K(s, t, \cdot)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ для $\mu \times \nu$ -почти всех $(s, t) \in A \times B$.

Обозначим через $L_0(B, \Xi, \nu)$ или $L_0(\nu)$ упорядоченное пространство классов эквивалентности ν -измеримых почти всюду конечных действительных функций, заданных на B , где частичный порядок $f \leq g$ задан как $f(t) \leq g(t)$ ν -почти всюду на B . Известно, что $L_0(\nu)$ — порядково полная векторная решетка, относительно вышеуказанного порядка.

Для заданной функции $f \in L_0(\nu)$ функция $|K(s, \cdot, f(\cdot))|$ является ν -измеримой для μ -почти всех $s \in A$ и $h_f(s) := \int_B |K(s, t, f(t))| d\nu(t)$ также является μ -измеримой функцией. Введем обозначение

$$\text{Dom}_B(K) := \{f \in L_0(\nu): h_f \in L_0(\mu)\}.$$

Тогда определен оператор $T: \text{Dom}_B(K) \rightarrow L_0(\mu)$,

$$(Tf)(s) := \int_B K(s, t, f(t)) d\nu(t) \quad \mu\text{-почти всюду.}$$

Пусть E, F — порядковые идеалы в $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$, соответственно и K удовлетворяет условиям (C_0) – (C_2) . Тогда, если $E \subseteq \text{Dom}_B(K)$ и $T(E) \subseteq F$, определен ортогонально аддитивный оператор, действующий из $T: E \rightarrow F$, называемый *интегральным оператором Урысона*.

Частным случаем интегрального оператора Урысона является *оператор Гаммерштейна*, заданный формулой

$$(Tf)(s) := \int_B K(s, t) u(t, f(t)) d\nu(t) \quad \mu\text{-почти всюду,}$$

где $K(\cdot, \cdot)$ — $\mu \times \nu$ -измеримая функция на $A \times B$ и $u: B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что $u(t, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для ν -почти всех $t \in B$, $u(\cdot, r)$ ν -измерима для любого $r \in \mathbb{R}$ и $u(t, 0) = 0$ для ν -почти всех $t \in B$ (для соблюдения условия C_0).

Пусть E — векторная решетка, X — банахово пространство и S — ортогонально аддитивный оператор из E в X . Оператор S называется *узким*, если для любых $e \in E$, $\varepsilon > 0$ найдется пара u, w взаимно дополнительных осколков элемента e , таких что $\|Su - Sw\| < \varepsilon$. Ортогонально аддитивный оператор $T: E \rightarrow X$ называется *C-компактным*, если для любого $e \in E$ множество $T(\mathfrak{F}_e)$ предкомпактно в X .

Пусть X — векторное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T: E \rightarrow X$ называется *оператором конечного ранга*, если линейное пространство $[T(E)]$, порожденное множеством $T(E)$, конечномерно. Для подмножеств H, K векторного пространства X будем использовать обозначение $H + K := \{v + u : v \in H; u \in K\}$. Сумму $H + \dots + H$ n -копий множества H будем обозначать через nH .

Пусть E — векторная решетка. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ называется *латерально сходящейся* к $x \in E$, если $x_\alpha \sqsubseteq x_\beta \sqsubseteq x$ для любых индексов $\alpha < \beta$ и сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ порядково сходится к x . Пусть X — нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T: E \rightarrow X$ называется *латерально-по-норме непрерывным*, если каждую латерально сходящуюся сеть в E оператор T переводит в сходящуюся по норме сеть в X .

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В данном разделе покажем, что сумма узкого и латерально-по-норме непрерывного, C -компактного ортогонально аддитивных операторов является узким оператором. Нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1 ([13], теорема 3.2). *Пусть E — порядково полная, безатомная векторная решетка, X — банахово пространство. Тогда каждый ортогонально аддитивный, C -компактный, латерально-по-норме непрерывный оператор $T: E \rightarrow X$ является узким.*

Лемма 2 ([16], лемма 3.5). *Пусть E — векторная решетка, $x, y, z, v \in E$ и $z \sqcup v = x \sqcup y$. Тогда найдутся элементы $z_1, z_2, v_1, v_2 \in E$ такие, что*

- (i) $z = z_1 \sqcup z_2; v = v_1 \sqcup v_2;$
- (ii) $x = z_1 \sqcup v_1; y = z_2 \sqcup v_2.$

Лемма 3. *Пусть E — порядково полная, безатомная векторная решетка, X — банахово пространство, $e \in E$ и $T: E \rightarrow X$ — латерально-по-норме непрерывный, C -компактный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $e = \bigsqcup_{i=1}^n e_i$ такое, что для любой пары e_i^1, e_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента e_i , $1 \leq i \leq n$, справедливо неравенство $\|Te_i^1 - Te_i^2\| < \varepsilon$.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что утверждение неверно. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения $e = \bigsqcup_{i=1}^n e_i$, $n \in \mathbb{N}$, найдется

номер $1 \leq i_0 \leq n$ и такая пара $e_{i_0}^1, e_{i_0}^2$ взаимно дополнительных осколков элемента e_{i_0} , что справедливо неравенство $\|Te_{i_0}^1 - Te_{i_0}^2\| \geq \varepsilon$. Покажем, что отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется семейство $e_1, \dots, e_k$ попарно дизъюнктивных осколков элемента e такое, что для любого $1 \leq i \leq k$ существует пара e_i^1, e_i^2 взаимно дополнительных осколков e_i такая, что $\|Te_i^1 - Te_i^2\| > \frac{\varepsilon}{3}$. Докажем утверждение по индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно.

Предположим, что оно верно для $k > 1$ и покажем, что тогда оно справедливо и для $k + 1$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — набор попарно дизъюнктивных осколков элемента e , для которых выполняется индукционное предположение и пусть $f = e - \bigsqcup_{i=1}^k e_i$. Если найдутся взаимно

дополнительные осколки f_1 и f_2 элемента f такие, что $\|Tf_1 - Tf_2\| > \frac{\varepsilon}{3}$, то в качестве e_{k+1} возьмем элемент f . В противном случае найдется осколок e_{i_0} с номером $1 \leq i_0 \leq k$ такой, что существуют взаимно дополнительные осколки $e_{i_0}^1$ и $e_{i_0}^2$ элемента e_{i_0} , для которых выполняется неравенство $\|Te_{i_0}^1 - Te_{i_0}^2\| \geq \varepsilon$. Не уменьшая общности можем считать, что $i_0 = k$. Согласно лемме 1 оператор T является узким. Это означает, что для e_k и для любого $\delta > 0$ найдутся взаимно дополнительные осколки g и h элемента e_k такие, что $\|Tg - Th\| < \delta$. Используя лемму 2 найдем такие попарно дизъюнктивные осколки g_1, g_2 и h_1, h_2 элементов g и h соответственно, что

$$g = g_1 \sqcup g_2, \quad h = h_1 \sqcup h_2, \quad e_k^1 = g_1 \sqcup h_1, \quad e_k^2 = g_2 \sqcup h_2.$$

Имеют место оценки

$$\|Tg_1 + Th_1 - Tg_2 - Th_2\| = \|T(g_1 + h_1) - T(g_2 + h_2)\| = \|Te_k^1 - Te_k^2\| \geq \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\|Tg_1 + Tg_2 - Th_1 - Th_2\| = \|T(g_1 + g_2) - T(h_1 + h_2)\| = \|Tg - Th\| < \delta.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|Tg_1 + Th_1 - Tg_2 - Th_2\| = \|Tg_1 + Tg_2 - Tg_2 + Th_1 - Tg_2 - Th_1 + Th_1 - Th_2\| \leq \\ &\leq \|Tg_1 + Tg_2 - Th_1 - Th_2\| + 2\|Th_1 - Tg_2\| < \delta + 2\|Th_1 - Tg_2\|, \\ \varepsilon &\leq \|Tg_1 + Th_1 - Tg_2 - Th_2\| = \|Tg_1 + Th_1 + Th_2 - Th_2 - Tg_2 - Tg_1 + Tg_1 - Th_2\| \leq \\ &\leq \|Th_1 + Th_2 - Tg_1 - Tg_2\| + 2\|Th_2 - Tg_1\| < \delta + 2\|Th_2 - Tg_1\|. \end{aligned}$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда можем написать

$$\|Th_1 - Tg_2\| > \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|Th_2 - Tg_1\| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $u_k = h_2 \sqcup g_1$, $u_{k+1} = h_1 \sqcup g_2$, $u_k^1 = h_2$, $u_k^2 = g_1$, $u_{k+1}^1 = h_1$, $u_{k+1}^2 = g_2$. Тогда $e_1, \dots, e_{k-1}, u_k, u_{k+1}$ — последовательность попарно дизъюнктивных осколков элемента e , обладающая требуемыми свойствами и справедливость индукционного перехода установлена. Положим $Z_e = \{u - v : u, v \in \mathfrak{F}_e; u \perp v\}$. Используя теперь C -компактность оператора T , получаем, что $K_e := \overline{T(Z_e)}$ — компактное подмножество. Положим $B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{6}\}$. В силу компактности множества K_e найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$ и окрестность нуля B_1 в X такие, что $K_e + B_1 \subset nB$. Возьмем теперь окрестность нуля $H \subset B$ и конечный набор $x_1, \dots, x_m$ элементов множества K_e таких, что $nH \subset B_1$ и $K_e \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i + H)$. Пусть, кроме того, $l = nm$. Согласно вышеприведенным рассуждениям найдется набор $e_1, \dots, e_l$ попарно дизъюнктивных осколков элемента e и набор пар e_i^1, e_i^2 взаимно дополнительных осколков элементов e_i , где $1 \leq i \leq l$, такой, что $\|Te_i^1 - Te_i^2\| > \frac{\varepsilon}{3}$, $1 \leq i \leq l$. Так как $\{Te_i^1 - Te_i^2 : 1 \leq i \leq mn\} \subset \bigcup_{k=1}^m (x_k + H)$, то найдется номер $k_0 \leq m$ такой, что $\text{card}\{i \leq l : (Te_i^1 - Te_i^2) \in x_{k_0} + H\} \geq n$. Без ограничения общности можем полагать, что $(Te_i^1 - Te_i^2) \in x_{k_0} + H$ для любого $1 \leq i \leq n$. Так как $\|Te_i^1 - Te_i^2\| > \frac{\varepsilon}{3}$, $H \subset B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{6}\}$, то $\|x_{k_0}\| \geq \frac{\varepsilon}{6}$, откуда следует $x_{k_0} \notin B$. Пусть теперь $h = \sum_{i=1}^n (e_i^1 - e_i^2)$.

Так как осколки e_i попарно дизъюнкты, то $h \in Z_e$ и $\sum_{i=1}^n (Te_i^1 - Te_i^2) = Tq_1 - Tq_2$. Положим $x = Tq_1 - Tq_2 \in Z_e$. Теперь можем записать

$$x \in nx_{k_0} + nH \subset nx_{k_0} + B_1.$$

Тогда $nx_{k_0} \in K_e - B_1 = K_e + B_1 \subset nH$ и отсюда выводим $x_{k_0} \in H$. Получили противоречие. $\square$

Следующий технический результат потребуется ниже.

Лемма 4 ([2], лемма 10.2). Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — семейство векторов конечномерного нормированного пространства X и пусть $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — набор действительных чисел такой, что $0 \leq \lambda_i \leq 1$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда существует набор действительных чисел $(\theta_i)_{i=1}^n$, где $\theta_i \in \{0, 1\}$ такой, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \theta_i) x_i \right\| \leq \frac{\dim(X)}{2} \max_i \|x_i\|.$$

Лемма 5. Пусть E — порядково полная, безатомная векторная решетка, X — банахово пространство, $S: E \rightarrow X$ — ортогонально аддитивный узкий оператор и $T: E \rightarrow X$ — латерально-по-норме непрерывный, C -компактный ортогонально аддитивный оператор конечного ранга. Тогда $R = S + T$ — узкий оператор.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $e \in E$ и $\varepsilon > 0$. Применяя лемму 3, можно найти такое разбиение $e = \bigsqcup_{i=1}^n e_i$ элемента e на дизъюнктыные осколки, что для любой пары e_i^1, e_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента e_i , выполняется $\|Te_i^1 - Te_i^2\| < \frac{\varepsilon}{2\dim[T(E)]}$, $1 \leq i \leq n$. Используя теперь узость оператора S , для каждого осколка e_i подберем пару взаимно дополнительных осколков u_i, w_i , такую что $\|Su_i - Sw_i\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, $1 \leq i \leq n$. Положим $x_i = Tu_i - Tw_i$, $1 \leq i \leq n$, и пусть $\lambda_i = \frac{1}{2}$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда согласно лемме 3 можем записать

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \theta_i) x_i \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \frac{\dim[T(E)]}{2} \max_i \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда существует разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на два дизъюнктыных подмножества I и J таких, что $\alpha_i = 1$, $i \in I$, и $\alpha_i = -1$, $i \in J$. Положим $u = \bigsqcup_{i \in I} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in J} w_i$ и $w = \bigsqcup_{i \in J} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in I} w_i$. Теперь можем записать

$$\begin{aligned} \|Ru - Rw\| &= \|(S + T)u - (S + T)w\| \leq \|Su - Sw\| + \|Tu - Tw\| = \\ &= \left\| \sum_{i \in I} Su_i + \sum_{i \in J} Sw_i - \sum_{i \in J} Su_i - \sum_{i \in I} Sw_i \right\| + \left\| \sum_{i \in I} Tu_i + \sum_{i \in J} Tw_i - \sum_{i \in J} Tu_i - \sum_{i \in I} Tw_i \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i \in I} (Su_i - Sw_i) + \sum_{i \in J} (Sw_i - Su_i) \right\| + \left\| \sum_{i \in I} (Tu_i - Tw_i) - \sum_{i \in J} (Tu_i - Tw_i) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|Su_i - Sw_i\| + \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая пара взаимно дополнительных осколков u и w элемента e найдена. $\square$

Основным результатом статьи является

Теорема. Пусть E — порядково полная, безатомная векторная решетка, X — банахово пространство, $S: E \rightarrow X$ — ортогонально аддитивный узкий оператор и $T: E \rightarrow X$ — латерально-по-норме непрерывный, C -компактный ортогонально аддитивный оператор. Тогда $R = S + T$ — узкий оператор.

Доказательство. Банахово пространство X можем рассматривать как замкнутое линейное подпространство банахова пространства $l_\infty(B_{X^*})$ — ограниченных функций на компакте. Это можно записать в виде цепочки вложений

$$X \hookrightarrow X^{**} \hookrightarrow l_\infty(B_{X^*}),$$

где под символом $\hookrightarrow$ понимаем изометрическое вложение, а через B_{X^*} обозначается единичный шар банахова пространства X^* . Известно, что если H — предкомпактное подмножество $l_\infty(D)$ для некоторого бесконечного множества D и $\varepsilon > 0$, то существует оператор конечного ранга $R \in \mathcal{L}(l_\infty(D))$ такой, что $\|x - Rx\| \leq \varepsilon$ для любого $x \in H$ ([2], лемма 10.25). Возьмем произвольный элемент $e \in E$ и $\varepsilon > 0$. Так как T — C -компактный оператор, то $K = T(\mathcal{F}_e)$ — предкомпактное множество в X и, следовательно, в $l_\infty(B_{X^*})$. Тогда найдется линейный, непрерывный оператор конечного ранга $R \in \mathcal{L}(l_\infty(B_{X^*}))$ такой, что $\|w - Rw\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ для любого $w \in K$. Ясно, что $G = R \circ T$ — латерально-по-норме непрерывный, C -компактный ортогонально аддитивный оператор конечного ранга. Согласно лемме 5 найдутся взаимно дополнительные осколки e_1, e_2 элемента e такие, что $\|(S + G)e_1 - (S + G)e_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|(S + T)e_1 - (S + T)e_2\| &= \|Se_1 - Se_2 + Te_1 - Te_2 + Ge_1 - Ge_2 - Ge_1 + Ge_2\| \leq \\ &\leq \|(S + G)e_1 - (S + G)e_2\| + \|Te_1 - Te_2 - Ge_1 + Ge_2\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|Te_1 - R(Te_1)\| + \|Te_2 - R(Te_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Popov M.M., Plichko A.M. *Symmetric function spaces on atomless probability spaces*, Diss. Math. (Rozprawy Math.) **306**, 1–85, (1990).
- [2] Popov M., Randrianantoanina B. *Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices*, De Gruyter, 2013.
- [3] Maslyuchenko O.V., Mykhaylyuk V.V., Popov M.M. *A lattice approach to narrow operators*, Positivity **13** (4), 459–495 (2009).
- [4] Pliev M. *Narrow operators on lattice-normed spaces*, Cent. Eur. J. Math., **9** (6), 1276–1287 (2011).
- [5] Абасов Н.М., Плиев М.А. *О сумме узкого и C -компактного операторов*. Владикавказск. матем. журн., **20** (1), 3–9 (2018).
- [6] Mykhaylyuk V., Popov M. *On sums of narrow operators on Köthe function space*, J. Math. Anal. Appl. **404**, 554–561 (2013).
- [7] Mykhaylyuk V. *On sums of narrow and a compact operators*, J. Funct. Anal. **404**, 5912–5920 (2014).
- [8] Kusraeva Z.A. *Powers of quasi-Banach lattices and orthogonally additive polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **458** (1) 767–780 (2018).
- [9] Плиев М.А., Фан С. *Узкие ортогонально аддитивные операторы в решеточно-нормированных пространствах*. Сиб. матем. журн., **58** (1), 174–184 (2017).
- [10] Orlov V., Pliev M., Rode D. *Domination problem for AM-compact abstract Uryson operators*, Arch. der Math., **107** (5), 543–552 (2016).
- [11] Плиев М.А., Попов М.М. *О продолжении абстрактных операторов Урысона*, Сиб. матем. журн., **57** (3), 700–708 (2016).
- [12] Pliev M. *Domination problem for narrow orthogonally additive operators*, Positivity **21** (1), 23–33 (2017).

- [13] Pliev M., Popov M. *Narrow orthogonally additive operators*, Positivity, **18** (4), 641–667 (2014).
- [14] Aliprantis C.D., Burkinshaw O. *Positive Operators*. Springer, Dordrecht, 2006.
- [15] Кусраев А.Г. *Мажорируемые операторы* (Наука, М., 2003).
- [16] Pliev M., Ramdane K. *Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices*, Mediterranean J. Math., 2 (2018).

Нариман Магамедович Абасов

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
ул. Оршанская, д. 3, Москва, 121552, Россия,

e-mail: abasovn@mail.ru

N.M. Abasov

On the sum of narrow orthogonally additive operators

Abstract. In this article we consider orthogonally additive operators defined on a vector lattice E and taking value in a Banach space X . We say that an orthogonally additive operator $T : E \rightarrow X$ is a narrow if for every $e \in E$ and $\varepsilon > 0$ there exists a decomposition $e = e_1 \sqcup e_2$ of e into a sum of two disjoint fragments e_1 and e_2 such that $\|Te_1 - Te_2\| < \varepsilon$. It is proved that the sum of two orthogonally additive operators $S + T$ defined on Dedekind complete, atomless vector lattice and taking value in Banach space, where S is a narrow operator and T is a C -compact laterally-to-norm continuous operator, is a narrow operator as well.

Keywords: vector lattice; orthogonally additive operator; narrow operator; laterally-to-norm continuous operator; C -compact operator.

Nariman Magamedovich Abasov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
3 Orshanskaya str., Moscow, 121552 Russia,

e-mail: abasovn@mail.ru