Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, Т. А. Шорникова, О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем некоторые пары функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 10–17

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-10-17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:41:58

М.А. АЛЕХИНА, Т.А. ШОРНИКОВА

**О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА
ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛНОМ КОНЕЧНОМ БАЗИСЕ,
СОДЕРЖАЩЕМ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ФУНКЦИЙ**

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе, содержащем некоторые пары функций. Предполагается, что все функциональные элементы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0, 1/2)$), переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Доказано, что в рассматриваемых базисах почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: ненадежный функциональный элемент, надежность и ненадежность схемы, синтез схем из ненадежных элементов.

УДК: 519.718

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-10-17

ВВЕДЕНИЕ

Эта статья относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики — теории синтеза, надежности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надежности управляющих систем относятся схемы из ненадежных функциональных элементов, реализующие булевы функции. Проблема построения оптимальных по критериям надежности и сложности схем из ненадежных элементов является одной из наиболее важных и в то же время трудных в теории синтеза управляющих систем. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадежных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. К основным моделям неисправностей относятся, например, инверсные и константные неисправности на выходах элементов. В статье рассматривается задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах.

Исторически сложилось так, что сначала исследовались инверсные неисправности функциональных элементов, реализующих булевы функции. Первые существенные математические результаты, касающиеся синтеза надежных схем из ненадежных элементов, получил

Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент E с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$, переходя в неисправное состояние с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/6$), реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Неймана произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c \cdot \varepsilon$ (c — некоторая положительная, зависящая лишь от базиса, константа), т.е. ненадежность схемы сравнима с ненадежностью одного элемента (такие схемы в теории надежности управляющих систем принято называть надежными). С ростом числа итераций сложность схемы при использовании метода Дж. фон Неймана увеличивается экспоненциально.

Любой метод синтеза схем из ненадежных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадежностью) и сложностью схемы. Именно минимизации сложности схем, реализующих булевы функции, уделялось главное внимание в работах Р.Л. Добрушина, С.И. Ортюкова [2], [3], Д. Улига [4] и некоторых других авторов. Задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов, подверженных тем или иным неисправностям, ни Дж. фон Нейманом, ни другими исследователями до появления работ М.А. Алехиной не рассматривалась.

Н. Пишпенджер [5] в классическом базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ построил надежные схемы без существенного увеличения сложности в предположении, что все элементы схемы ненадежны, подвержены инверсным неисправностям на выходах.

С.В. Яблонский [6] рассматривал задачу синтеза надежных схем в базисе

$$\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}.$$

Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ абсолютно надежный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор ненадежные, подвержены произвольным неисправностям, ненадежность каждого из них не больше ε . Им доказано, что для любого p существует алгоритм, который для каждой булевой функции строит асимптотически оптимальную по сложности схему, ненадежность которой не больше p .

В.В. Тарасов [7] рассматривал задачу построения схем сколь угодно высокой надежности (когда ненадежность схемы стремится к 0). Для базисов из ненадежных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом он нашел необходимые и достаточные условия, при которых любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надежности.

Позднее в работах В.В. Чугуновой, А.В. Васина, Д.М. Клянчиной и некоторых других авторов решалась задача реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надежности схемами при различных неисправностях элементов.

Эта работа продолжает исследования, начатые в [8] для полного базиса $\{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\}$, элементы которого подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Позднее задача синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем при неисправностях типа 0 была решена [9] во всех полных неприводимых базисах из двухвходовых функциональных элементов, кроме одного. Задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов решена А.В. Васиным [10] во всех полных конечных базисах, содержащих функции трех переменных. В частности, А.В. Васин нашел необходимые и достаточные условия на функции полного конечного базиса B_i ($i \in \{1, 2\}$), содержащего функции трех переменных, при которых почти любую функцию можно реализовать схемой с ненадежностью, асимптотически равной $i\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оказалось, что при инверсных неисправностях на выходах элементов базис B_1 содержит одну функцию

определенного вида [10], а для базиса B_2 возможны два варианта: либо он содержит одну функцию специального вида (и, возможно, какие-то еще функции), либо он содержит две определенные функции (и, возможно, какие-то еще функции) [11]. В случае неисправностей типа 0 на выходах элементов оказалось, что наличие двух функций определенного вида (и, возможно, каких-то еще функций) гарантирует реализацию в этом базисе почти любой булевой функции схемой с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Конструктивное доказательство этого утверждения с указанием необходимых пар базисных функций приводится в этой работе.

Чтобы изложить полученные результаты, введем необходимые понятия и определения.

1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РАНЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе B . Схема реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbf{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагается, что все функциональные элементы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0, 1/2)$) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему функцию, а в неисправном — константу 0.

Пусть $P_{\tilde{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления значения $\tilde{f}(\tilde{a}^n)$ на выходе схемы S , реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$ при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ненадежность схемы S равна $P(S) = \max\{P_{\tilde{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берется по всем наборам $\tilde{a}^n$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую f , назовем *асимптотически оптимальной* (асимптотически наилучшей) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

Булевы функции f_1 и f_2 назовем *конгруэнтными* [12], если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления).

Пусть $X \subseteq P_2$. Обозначим через $\text{Congr}(X)$ множество всех функций, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X .

Замечание. При неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность не меньше ε при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$ ([9]).

Пусть

$$\Theta = \text{Congr}\{x_1 x_2^{\sigma_2}, x_1 x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}, x_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1}, x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) | \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\},$$

$$\Theta_1^* = \Theta^* \cup \text{Congr}\{\bar{x}_1 \vee (x_2 \sim x_3)\},$$

где Θ^* — множество функций, каждая из которых двойственна некоторой функции множества Θ .

Пусть $G = \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} x_4^{\sigma_4} | \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Сформулируем необходимые для доказательств теорем ранее известные леммы 2 из [10], 3 из [9] и 4 из [13] (в лемме 3 базис предполагается полным конечным, а неисправности элементов произвольными).

Лемма 1 ([10]). Пусть $\varphi \in \Theta$. Тогда подстановкой (т. е. отождествлением и/или переименованием) переменных из φ можно получить функцию вида $x_1 x_2^a$, $a \in \{0, 1\}$.

Лемма 2 ([10]). Пусть $\psi \in \Theta_1^*$. Тогда подстановкой переменных из ψ можно получить функцию вида $x_1 \vee x_2^b$, $b \in \{0, 1\}$.

Лемма 3 ([9]). Пусть функция f реализована схемой S с ненадежностью не больше p ($p \leq 1/2$). Пусть схема S_g реализует функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} x_4^{\sigma_4})^{\sigma_5}$ из множества G с ненадежностью $P(S_g)$ ($P(S_g) \leq 1/2$), причем v_0 и v_1 — вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4)$ соответственно ($\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Тогда функцию f можно реализовать схемой $\Phi(S)$, ненадежность которой

$$P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 4pP(S_g) + 6p^2.$$

Лемма 4 ([13]). В произвольном полном конечном базисе при неисправностях типа 0 на выходах элементов любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть при некоторых $a, b \in \{0, 1\}$ полный конечный базис B содержит функции $x_1 x_2^a$ и $x_1 \vee x_2^b$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадежность которой не больше $\varepsilon + 25\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть четыре случая для параметров a и b .

1) Пусть $a = 0$, $b = 0$, т. е. базис содержит функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$ и $\psi(x_1, x_2) = x_1 \vee \bar{x}_2$. Этот случай рассмотрен в [9], утверждение верно.

2) Пусть $a = 0$, $b = 1$, т. е. базис содержит функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$ и $\psi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. Моделируя формулу $\psi(\varphi(x_1, \bar{x}_2), \varphi(x_3, \bar{x}_4)) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_4$, построим схему S_g , состоящую из трех элементов и реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_4 \in G$. Эту схему будем использовать для повышения надежности исходных схем. Очевидно $P(S_g) \leq 3\varepsilon$.

По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе $(1, 0, 1, 0)$: $v_0 = (1 - \varepsilon)^2 \varepsilon + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \leq \varepsilon + \varepsilon^2$. На наборе $(0, 1, 0, 1)$ схема S_g работает абсолютно надежно, поэтому вероятность ошибки $v_1 = 0$.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 4 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g , с помощью леммы 3 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность:

$$P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 4pP(S_g) + 6p^2 \leq \varepsilon + \varepsilon^2 + 4 \cdot 5, 2\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(5, 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 225, 64\varepsilon^2 \leq 1, 236\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi(\Phi(S)) = \Phi^2(S)$. По лемме 3 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$: $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + \varepsilon^2 + 4 \cdot 1, 236\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(1, 236\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 25\varepsilon^2$.

Схема $\Phi^2(S)$ искомая.

3) Пусть $a = 1$, $b = 0$, т. е. базис содержит функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$ и $\psi(x_1, x_2) = x_1 \vee \bar{x}_2$. Моделируя формулу $\psi(\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_3, \bar{x}_4)) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_3 x_4$, построим схему S_g , состоящую из трех элементов и реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_3 x_4 \in G$. Эту схему будем использовать для повышения надежности исходных схем. Очевидно, $P(S_g) \leq 3\varepsilon$.

Вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе $(1, 1, 0, 1)$: $v_0 = \varepsilon$ (эта вероятность равна вероятности ошибки выходного элемента). На наборе $(0, 0, 1, 0)$ вероятность ошибки v_1 схемы S_g равна $v_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon)$.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 4 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g , с помощью леммы 3 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность:

$$P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 4pP(S_g) + 6p^2 \leq \varepsilon + 4 \cdot 5, 2\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(5, 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 224, 64\varepsilon^2 \leq 1, 234\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi(\Phi(S)) = \Phi^2(S)$. По лемме 3 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$: $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 4 \cdot 1, 234\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(1, 234\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 24\varepsilon^2$.

Схема $\Phi^2(S)$ искомая.

4) Пусть $a = 1$, $b = 1$, т. е. базис содержит функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1x_2$ и $\psi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. Этот случай рассмотрен в [9], утверждение верно. $\square$

Следствие. Пусть полный конечный базис B таков, что $B \cap \Theta \neq \emptyset$ и $B \cap \Theta_1^* \neq \emptyset$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадежность которой не больше $\varepsilon + 25\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Действительно, по лемме 1 из каждой функции множества Θ подстановкой переменных можно получить функцию вида $x_1x_2^a$, ($a \in \{0, 1\}$), а по лемме 2 из каждой функции множества Θ_1^* подстановкой переменных можно получить функцию вида $x_1 \vee x_2^b$, $b \in \{0, 1\}$. Таким образом, имеем функции $x_1x_2^a$ и $x_1 \vee x_2^b$. По теореме 1 утверждение верно. $\square$

Теорема 2. Пусть полный конечный базис B удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

- 1) B содержит функцию из множества $\text{Congr}\{x_1 \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} | \sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\}\}$, и хотя бы одну из функций 0 , $\bar{x}_1$;
- 2) B содержит функцию из множества $\text{Congr}\{x_1 \vee (x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1} | \sigma_1 \in \{0, 1\}\}$ и константу 0 .

Тогда произвольную булеву функцию f в базисе B можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq \varepsilon + 38\varepsilon^2$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что требуемая для доказательства функция (обозначим ее через φ) базиса B зависит от переменных x_1, x_2, x_3 .

1) Пусть полный конечный базис B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ вида $x_1 \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ (т.е. при некоторых $\sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\}$ верно $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$) и хотя бы одну из функций 0 , $\bar{x}_1$. Напомним, что функциональный элемент с функцией 0 при рассматриваемых неисправностях функционирует абсолютно надежно. Рассмотрим два случая.

а) Пусть базис B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ и константу 0 .

Если $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, то $\varphi(0, x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2$, утверждение теоремы верно [9].

Если среди чисел σ_2, σ_3 есть 1 (пусть для определенности, $\sigma_3 = 1$), то $\varphi(0, x_2, x_1) = x_1x_2^{\sigma_2}$. Моделируя формулу $\varphi(\varphi(0, x_1, x_2), x_3, x_4) = x_1x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_2}x_4$, построим схему S_g , состоящую из трех элементов (один из которых, реализующий константу 0 , абсолютно надежен) и реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_2}x_4 \in G$. Эту схему будем использовать для повышения надежности исходных схем. Очевидно, $P(S_g) \leq 2\varepsilon$.

По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе $(1, \sigma_2, \sigma_2, 1)$: $v_0 = \varepsilon$. На наборе $(0, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_2, 0)$ схема S_g работает абсолютно надежно, поэтому вероятность ошибки v_1 на этом наборе равна нулю.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 4 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g , с помощью леммы 3 по

схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность:

$$P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 4pP(S_g) + 6p^2 \leq \varepsilon + 4 \cdot 5, 2\varepsilon \cdot 2\varepsilon + 6(5, 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 203, 84\varepsilon^2 \leq 1, 22\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi(\Phi(S)) = \Phi^2(S)$. По лемме 3 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$: $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 4 \cdot 1, 22\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(1, 22\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 19\varepsilon^2$.

Схема $\Phi^2(S)$ искомая.

б) Пусть полный конечный B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ и $\bar{x}_1$. По лемме 1 подстановкой переменных из функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ можно получить функцию $x_1 \vee x_2^{\sigma}$ ($\sigma \in \{0, 1\}$).

Моделируя формулу $\varphi(\overline{x_1 \vee x_2^{\sigma}}, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2^{\bar{\sigma}} \vee x_3^{\sigma_2} x_4^{\sigma_3}$, построим схему S_g , состоящую из трех элементов и реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2^{\bar{\sigma}} \vee x_3^{\sigma_2} x_4^{\sigma_3} \in G$. Эту схему будем использовать для повышения надежности исходных схем. Очевидно, $P(S_g) \leq 3\varepsilon$.

По формуле полной вероятности вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе $(0, \bar{\sigma}, \sigma_2, \sigma_3)$: $v_0 = \varepsilon$. На наборе $(1, \sigma, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ схема S_g вероятность ошибки v_1 на этом наборе равна ε , т. е. $v_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon)^2$.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 4 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 5, 2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g , с помощью леммы 3 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность:

$$P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 4pP(S_g) + 6p^2 \leq \varepsilon + 4 \cdot 5, 2\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(5, 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 225, 64\varepsilon^2 \leq 1, 236\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi(\Phi(S)) = \Phi^2(S)$. По лемме 3 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$: $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 4 \cdot 1, 236\varepsilon \cdot 3\varepsilon + 6(1, 236\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 24\varepsilon^2$.

Схема $\Phi^2(S)$ искомая.

2) Полный конечный базис B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ вида $x_1 \vee (x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1}$ (т. е. при некотором $\sigma_1 \in \{0, 1\}$ верно $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee (x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1}$) и константу 0. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(0, x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2)^{\sigma_1}$ является линейной, а функция $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_1 \vee x_2^{\sigma_1}$ — обобщенной двухместной дизъюнкцией, поэтому [14] утверждение теоремы верно. $\square$

Полученные результаты справедливы в двойственных базисах при неисправностях типа 1 на выходах базисных элементов [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из теорем 1, 2, следствия и замечания следует, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе B , который удовлетворяет условиям

- 1) $B \cap \Theta \neq \emptyset$ и $B \cap \Theta_1^* \neq \emptyset$;
- 2) B содержит функцию из множества $\text{Congr}\{x_1 \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} | \sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\}\}$, и хотя бы одну из функций $0, \bar{x}_1$;
- 3) B содержит функцию из множества $\text{Congr}\{x_1 \vee (x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1} | \sigma_1 \in \{0, 1\}\}$ и константу 0;

почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, в теоремах 1, 2 и следствии найдены пары функций, наличие которых в полном конечном базисе обеспечивает реализацию почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с тривиальной ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым, расширено множество полных конечных базисов, в которых возможна реализация почти любой булевой функции

асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим, что при инверсных неисправностях на выходах элементов для некоторых пар функций из следствия для почти любой функции асимптотически оптимальная по надежности схема функционировала с ненадежностью, асимптотически равной 2ε ([10]), а для других пар функций из этого следствия — 3ε ([10]).

Полученные в работе результаты справедливы в двойственных базисах при неисправностях типа 1 на выходах базисных элементов [15].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Von Neumann J. *Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components* в сб. «Automata studies» (Princeton Univ. Press., Princeton, 1956), 43–98.
- [2] Добрушин Р.Л., Ортюков С.И. *Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов*, Пробл. передачи информ. **13** (3), 56–76 (1977).
- [3] Ортюков С.И. *Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов*, Тр. сем. по дискретной математике и ее приложениям, Москва, 27–29 января 1987 (Изд-во Московск. ун-та, М., 1989), 166–168.
- [4] Uhlig D. *Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity*, Lecture Notes in Comput. Sci. **278**, Intern. conf. «Fundamentals of Computation Theory (FCT'87)», Kazan, June 1987 (Proc. Berlin Springer-Verl., Berlin, 1987), 462–469.
- [5] Pippenger N. *On networks of Noisy Gates*, Materials of 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science, Portland, 21–23 Oct. 1985 (Portland, 1985), 30–38.
- [6] Яблонский С.В. *Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов*, Banach Center Publ., № 7, 11–19 (1982).
- [7] Тарасов В.В. *К синтезу надежных схем из ненадежных элементов*, Матем. заметки, **20** (3), 391–400 (1976).
- [8] Алехина М.А. *О синтезе надежных схем из функциональных элементов x/y при однотипных константных неисправностях на выходах элементов*, Вест. Московск. ун-та, Матем., Механ. № 5, 80–83 (1991).
- [9] Алехина М.А. *Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов*, Дисс. докт. физ.-матем. наук (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2004).
- [10] Васин А.В. *Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехходовых элементов*, Дисс. канд. физ.-матем. наук (КФУ, Казань, 2010).
- [11] Алехина М.А., Васин А.В. *О базисах с коэффициентом ненадежности 2*, Матем. заметки, **95** (2), 170–201 (2014).
- [12] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Задачи и упражнения по дискретной математике*, 3-е изд., перераб. (Физматлит, М., 2006).
- [13] Алехина М.А., Гусынина Ю.С., Шорникова Т.А. *Верхняя оценка ненадежности схем в полном конечном базисе (в P_2) при произвольных неисправностях элементов*, Изв. вузов, Матем. №12, 80–83 (2017).
- [14] Алехина М.А. *О надежности схем в полном конечном базисе, содержащем линейную функцию двух переменных и обобщенную дизъюнкцию*, Изв. выс.уч.заведений. Поволжский регион. Физ.-матем. науки, № 1, 56–62 (2019).
- [15] Алехина М.А., Пичугина П.Г. *О надежности двойственных схем в полном конечном базисе*, Матер. XVIII Международ. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем», Пенза, 28 сентября–3 октября 2009 (Изд-во Московск. гос. ун-та, 2009), с. 10–13.

Марина Анатольевна Алехина

Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, д. 1а/1, г. Пенза, 440039, Россия,

e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru

Татьяна Александровна Шорникова

Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, д. 1а/1, г. Пенза, 440039, Россия,

e-mail: shornikovat@mail.ru

M.A. Alekhina and T.A. Shornikova

About the reliability of circuits under failures of type 0 at the outputs of elements in a complete finite basis containing some pairs of functions

Abstract. We consider the realization of Boolean functions by the circuits from unreliable elements in a complete finite basis containing some pairs of functions. We assume that all elements of a circuit are exposed to the faults type 0 at the outputs with probability $\varepsilon \in (0, 1/2)$ independently of each other. We prove that almost any Boolean function can be implemented by an asymptotically optimal in reliability circuit functioning with the unreliability which is asymptotically equal to ε with $\varepsilon \rightarrow 0$.

Keywords: unreliable functional gates, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

Marina Anatol'evna Alekhina

*Penza State Technological University,
1a/1 proezd Baidukova/str. Garagina, Penza, 440039 Russia,*

e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru

Tat'ana Aleksandrovna Shornikova

*Penza State Technological University,
1a/1 proezd Baidukova/str. Garagina, Penza, 440039 Russia,*

e-mail: shornikovat@mail.ru