Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Белоногов, С. Г. Пятков, О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 18–32

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-18-32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:00:33

В.А. БЕЛОНОВ, С.Г. ПЯТКОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения для параболических систем второго порядка с условиями сопряжения типа неидеального контакта. Решение имеет все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемые с некоторой степенью $p \in (1, \infty)$. На поверхности раздела предельные значения конормальных производных выражаются через комбинации предельных значений решения. Задача не входит в класс классических задач дифракции и возникает при описании процессов тепломассопереноса. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и методе продолжения по параметру.

Ключевые слова: задача сопряжения, разрывной коэффициент, параболическая система, тепломассоперенос.

УДК: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-18-32

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваем параболическую систему второго порядка вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где u — вектор длины h , $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t)u_{x_i} + a_0(x, t)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ , a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$ -матрицы-функции, $h \in \mathbb{N}$. Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$. Положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$Bu|_S = \varphi \quad (S = \Gamma \times (0, T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x, t)u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ -матрицы, и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x, t) - \alpha_1(x, t)u^+(x, t) - \alpha_2(x, t)u^-(x, t) = g^+(x, t), \quad (x, t) \in S_0, \quad (3)$$

Поступила в редакцию 25.06.2019, после доработки 20.09.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00620а) и гранта на развитие научных школ ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» по приоритетным направлениям научных исследований № 13-01-20/43.

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(x, t) - \beta_1(x, t)u^+(x, t) - \beta_2(x, t)u^-(x, t) = g^-(x, t), \quad (x, t) \in S_0, \quad (4)$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0, t) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j$, $u^\pm = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(x, t)$, и ν — внешняя единичная нормаль к ∂G^- . Далее иногда используем обозначение $u^\pm = u|_{G^\pm}$ и записываем функцию u в виде вектора $u = (u^+, u^-)$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4). Условия сопряжения (3), (4) обобщают известные в теории тепломассопереноса условия на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. постановки в [1]):

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{S_0}, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = \alpha(u^+ - u^-). \quad (5)$$

Если $\alpha \rightarrow \infty$, получим стандартную постановку задачи дифракции ([2], §16, гл. 3), когда условия имеют вид $u^+ = u^-$, $\frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{S_0}$. Первые результаты об обобщенной разрешимости и простейшие результаты о дифференциальных свойствах решений задач дифракции для параболических и эллиптических уравнений второго порядка (L_2 -теория) были получены в работах О.А. Ладыженской и О.А. Олейник [3]–[6] и ряда других авторов в 50–60 гг. Общая теория задач типа дифракции для эллиптических операторов высокого порядка имеется в работах З.Г. Шефтеля [7], [8], где приведены условия разрешимости как в пространствах Соболева, так и в пространствах Гёльдера. Можно также отметить работу [9], где по существу был рассмотрен вопрос об обобщенной в некотором смысле разрешимости задачи типа дифракции, и работу [10], посвященную задачам типа дифракции для эллиптических систем высокого порядка в пространствах Соболева и Гёльдера. Задачи типа дифракции в общей постановке для параболических систем высокого порядка были рассмотрены в [11] также в пространствах Соболева и Гёльдера. Отметим книгу ([12], §6.5), где приведены результаты о разрешимости задачи дифракции для параболических операторов второго порядка с коэффициентами, не зависящими от времени, с решениями, принадлежащими пространству Соболева–Бесова со значениями в гильбертовом пространстве (в частности, сюда входят и обычные системы параболических уравнений второго порядка). Задача (1)–(4) не является задачей дифракции в смысле классического определения и не входит в класс задач, изученных в вышеупомянутых работах. Обобщенная разрешимость задачи (1)–(4) в случае квазилинейного оператора M , записанного в дивергентном виде, причем функции u^+, u^- входят в (3), (4) также нелинейным образом, была доказана в работе [13], где фактически была использована теория монотонных операторов. Обобщенная разрешимость задачи (1)–(4) (т.е. решение u принадлежит классу $L_2(0, T; W_2^1(G))$) с условиями вида (5) в линейном случае была получена в [14]. Обобщенная разрешимость модельной задачи близкой по смыслу к задаче (1)–(4) для модельного параболического уравнения в одномерном случае установлена в [15]. В данной работе, в отличие от [14], [13] приведем некоторые результаты о регулярной разрешимости задачи (1)–(4) в классах Соболева, т.е. в классах $W_p^{1,2}(Q)$. Результаты предполагается использовать при исследовании ряда обратных задач об определении неизвестных коэффициентов в (3), (4) (коэффициентов теплопередачи) (см., например, [16], [17]).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ ([18]). Мы также используем пространства $C^k(\bar{G})$, состоящие из

функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\bar{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные [19], [18]. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем через $W_p^s(Q)$. Аналогично вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\bar{G}; E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\bar{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\bar{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\bar{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$ (соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$). Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\bar{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\bar{S})$ могут быть найдены, например, в [2]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными.

Далее считаем, что $\Gamma \in C^2$ (см., например, [2], с. 9, определение.). Пусть $(u, v) = \int_G u(x) \times v(x) dx$, если u, v — скалярные функции и $(u, v) = \int_G \langle u(x, t), v(x) \rangle dx$, если u, v — векторы длины h . Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^h$. Введем обозначения

$$S_\phi = \Gamma \times (0, \phi), \quad S_{\alpha,\beta} = \Gamma \times (\alpha, \beta), \quad Q_\phi = G \times (0, \phi), \quad Q_{\alpha,\beta} = G \times (\alpha, \beta),$$

$$S_{\alpha,\beta}^0 = \Gamma_0 \times (\alpha, \beta), \quad S_\phi^0 = \Gamma \times (0, \phi), \quad Q_{\alpha,\beta}^\pm = G^\pm \times (\alpha, \beta), \quad Q^\pm = G^\pm \times (0, T), \quad Q_\phi^\pm = G^\pm \times (0, \phi).$$

В пространстве $W_p^s(\alpha, \beta; E)$ ($s \in (0, 1)$, E — банахово пространство) будем использовать норму $\|q(t)\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)} = (\|q\|_{L_p(\alpha,\beta;E)}^p + \langle q \rangle_{s,\tau}^p)^{1/p}$, $\langle q \rangle_{s,\tau}^p = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2$. Если $E = \mathbb{R}$, то получим обычное пространство $W_p^s(\alpha, \beta)$. При $s \in (0, 1)$ положим

$$\tilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E) = \{q \in W_p^s(\alpha, \beta; E) : (t - \alpha)^{-s} q(t) \in L_p(\alpha, \beta; E)\}.$$

Это банахово пространство с нормой $\|q(t)\|_{\tilde{W}_p^s(\alpha,\beta;E)}^p = \left\| \frac{q}{(t-\alpha)^s} \right\|_{L_p(\alpha,\beta;E)}^p + \langle q \rangle_{s,\tau}^p$. Если $s > 1/p$, то все функции q из этого пространства обладают тем свойством, что $q(\alpha) = 0$ и при $s \neq 1/p$ эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)}$ эквивалентны для таких функций $q(t)$, что $q(\alpha) = 0$ если $s > 1/p$. Эквивалентность вытекает, например, из ([18], п. 3.2.6, лемма 1). Тогда пространства $\tilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))$, $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta}) = \tilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G)) \cap L_p(\alpha, \beta; W_p^{2s}(G))$ при $s \neq 1/p$ состоят из функций $v(t, x)$ из $W_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))$ и $W_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta})$ соответственно таких, что $v(\alpha, x) = 0$, если $s > 1/p$. Нормы $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta})}$, $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^s(\alpha,\beta;L_p(G))}$ определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в $\tilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E)$. Имеем

$$\|u\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta})}^p = \left(\int_G \int_\alpha^\beta \frac{|u(x, t)|^p}{(t - \alpha)^{sp}} dt dx + \int_G \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau dx + \|u\|_{L_p(\alpha,\beta;W_p^{2s}(G))}^p \right)^{1/p}. \quad (6)$$

Аналогично определяем пространства $\tilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(\Gamma))$, $\tilde{W}_p^{s,2s}(S_{\alpha,\beta})$. Следующая лемма по существу известна (см., например, [20]), в ней получена правая часть нижеприведенного неравенства при $S \in (1/p; 1)$.

Лемма 1. *Найдутся постоянные C_1 и C_2 , не зависящие от $\phi \in (0, T]$, такие, что*

$$C_1 \|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S_\phi)} \leq \|v\|_{W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})} \leq C_2 \|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S_\phi)} \quad (7)$$

для всех $v \in W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})$ таких, что $v = 0$ при $t < 0$.

Доказательство. Пусть $v \in W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})$, $v = 0$ при $t < 0$. Рассмотрим выражение, которое входит в норму $\|v\|_{W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})}^p$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{\phi} |v(x, t)|^p dt + \int_{-1}^{\phi} \int_{-1}^{\phi} \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau = \\ &= \int_0^{\phi} |v(x, t)|^p dt + \int_{-1}^0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau + \int_0^{\phi} \int_{-1}^0 \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau + \\ &\quad + \int_0^{\phi} \int_0^{\phi} \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим второе и третье слагаемые через J_2 и J_3 :

$$J_2 = \int_{-1}^0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau = \int_0^{\phi} |v(x, t)|^p \int_{-1}^0 \frac{1}{|t - \tau|^{1+sp}} d\tau dt. \quad (9)$$

Внутренний интеграл равен $\int_{-1}^0 \frac{1}{|t - \tau|^{1+sp}} d\tau = \frac{|t - \tau|^{-sp}}{sp} \Big|_{-1}^0 = \frac{t^{-sp}}{sp} - \frac{|1 + t|^{-sp}}{sp} = \varphi(t)$. Отметим, что $\varphi(t) \leq \frac{1}{t^{sp} sp}$ и $\varphi(t) = \frac{t^{-sp}}{sp} \left(1 - \frac{t^{sp}}{(1+t)^{sp}}\right) \geq \frac{1}{t^{sp}} \left(1 - \left(\frac{T}{1+T}\right)^{sp}\right)$. Таким образом,

$$\delta_0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x, \tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau \leq J_2 \leq \int_0^{\phi} \frac{|v(x, \tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau \frac{1}{sp}, \quad (10)$$

где $\delta_0 = \frac{1}{sp} \left(1 - \left(\frac{T}{1+T}\right)^{sp}\right) > 0$. Аналогично можно показать, что и интеграл J_3 удовлетворяет неравенству (10). Используя определение норм, получаем

$$J \geq 2\delta_0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x, \tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau + \int_0^{\phi} \int_0^{\phi} \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau \geq \min(1, 2\delta_0) \|v\|_{\tilde{W}_p^s(0,\phi)}^p. \quad (11)$$

Из вышеприведенных оценок имеем

$$J \leq \max\left(1, T^{sp} + \frac{2}{sp}\right) \|v\|_{\tilde{W}_p^s(0,\phi)}^p. \quad (12)$$

Из (10)–(12) и определения нормы в пространствах $W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})$ и $\tilde{W}_p^{s,2s}(S_\phi)$ вытекает неравенство (7), где постоянные C_1, C_2 равны постоянным из оценок (11), (12), возведенным в степень $1/p$. $\square$

Лемма 2. *Существует постоянная C , не зависящая от $\phi \in (0, T]$, такая, что*

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\phi)} &\leq C \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \\ \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi)} &\leq C \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p, \end{aligned} \quad (13)$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(x, 0) = 0$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к Γ .

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство в (13). Пусть $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ и $v(x, 0) = 0$. Тем же символом обозначаем продолжение функции v нулем при $t < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}^p &= \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_{-1,\phi})}^p = \int_G \int_{-1}^\phi |v_t|^p + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha v|^p dx dt \geq \\ &\int_G \int_0^1 |\tilde{v}_\tau|^p \frac{1}{(1+\phi)^p} + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha \tilde{v}|^p dx d\tau (1+\phi), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\tau = \frac{t+1}{1+\phi}$ и $\tilde{v}(\tau, x) = v(\tau(1+\phi) - 1, x)$. Последний интеграл оценивается снизу через (используем теорему о следах, см., например, теорему 7.3 из [21])

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+T)^{p-1}} \|\tilde{v}\|_{W_p^{1,2}(Q_1)}^p &\geq C_0 \|\tilde{v}\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_1)}^p = \\ &= C_0 \left(\int_\Gamma \left(\int_0^1 |\tilde{v}(x, \xi)|^p d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\tilde{v}(x, \xi) - \tilde{v}(x, \eta)|^p}{|\xi - \eta|^{1+s_1 p}} d\xi d\eta \right) d\Gamma + \|\tilde{v}\|_{L_p(0,1; W_p^{2s_1}(\Gamma))}^p \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Сделаем замену $\xi = \frac{t+1}{1+\phi}$, $\eta = \frac{\tau+1}{1+\phi}$. Тогда для первого слагаемого в (15) получим оценку

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \left(\int_{-1}^\phi \frac{|v|^p}{1+\phi} dt + \int_{-1}^\phi \int_{-1}^\phi \frac{|v(x, t) - v(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_1 p}} dt d\tau (1+\phi)^{s_1 p-1} \right) d\Gamma &\geq \\ &\geq \frac{1}{1+\phi} \|v\|_{L_p(\Gamma; W_p^{s_1}(-1, \phi))}^p \geq \frac{1}{1+T} \|v\|_{L_p(\Gamma; W_p^{s_1}(-1, \phi))}^p. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично,

$$\|\tilde{v}\|_{L_p(0,1; W_p^{2s_1}(\Gamma))}^p \geq \frac{1}{1+T} \|v\|_{L_p(-1, \phi; W_p^{2s_1}(\Gamma))}^p. \quad (17)$$

Из (16), (17) и леммы 1 вытекает $\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}^p \geq \frac{C_0 C_1^p}{1+T} \|v\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_\phi)}^p$. Доказательство второго неравенства в (13) проводится аналогично. $\square$

Приведем один вспомогательный результат. Рассмотрим задачу

$$M_0 u = u_t - L_0 u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (18)$$

где $L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u$, $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$ -матрицы-функции,

$$Ru|_S = \varphi \quad (S = \Gamma \times (0, T)), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \Omega), \quad (19)$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x, t) u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ -матрицы.

Фиксируем $p \in (1, \infty)$. Предполагаем, что

$$a_{ij} \in C(\bar{Q}), \quad a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0 + \varepsilon_0, 2s_0 + 2\varepsilon_0}(\bar{S}) \quad (\varepsilon_0 > 0), \quad (21)$$

где $q > n + 2$ при $p \leq n + 2$ и $q = p$ при $p > n + 2$, $r > (n + 2)/2$ при $p \leq (n + 2)/2$ и $r = p$ при $p > (n + 2)/2$.

Лемма 3. Пусть G — ограниченная область с границей Γ класса C^2 . Рассмотрим дифференциальное выражение вида $Rv = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_{x_i} + \sigma v$, где γ_i, σ удовлетворяют условиям (21) и оператор M_0 , коэффициенты которого удовлетворяют условиям (20). Тогда существуют постоянные C_0, C_1 , не зависящие от $\phi \in (0, T]$, такие, что

$$\|Rv\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi)} \leq C_0 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p, \quad (22)$$

$$\|M_0 v\|_{L_p(Q_\phi)} \leq C_1 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \quad (23)$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(x, 0) = 0$.

Доказательство леммы основано на теоремах о следах и теоремах вложения (см., например, [21], теорема 7.3 или [22], теорема 5.1) и теоремах о точечных мультипликаторах (см., например, [23], теорема 3.3.2, с.198). Используя лемму 1 и продолжение коэффициентов с сохранением класса в область $t < 0$, задачу сводим к задаче об оценке выражения $\|Rv\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{-1, \phi})}$ через норму $\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_{-1, \phi})}$. Последняя оценка (и даже более общие оценки) получена, например, в ([22], доказательство теоремы 5.4). Неравенство (23), где постоянная C_1 будет зависеть от норм коэффициентов уравнения в соответствующих классах и не зависит от ϕ , было получено, например, в ([19], доказательство теоремы 2.1) или в ([2], гл.4, доказательство теоремы 9.1). К сожалению, мы не нашли работ, где оценки леммы 3 были бы сформулированы как отдельное утверждение.

Опишем условия параболичности оператора L_0 . Рассмотрим матрицу

$$A_0(t, x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \quad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

и предположим, что найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что все корни p полинома $\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0$ (E — единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in Q. \quad (24)$$

Пусть $R_0 u = u$ в случае условий Дирихле в (19) и $R_0 u = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j} u$ в противном случае. Условие Лопатинского может быть записано в следующем виде ([2], §9, гл. 7): для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ и операторов $A_0(x, t, D)$ и $R_0(x, t, D)$, записанных в локальной декартовой системе координат y в этой точке (ось y_n направлена по нормали к S и оси $y_1, \dots, y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости в точке (x_0, t_0)), система

$$(\lambda E + A_0(x_0, t_0, i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad R_0(x_0, t_0, i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (25)$$

где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}}^+)$, убывающее на бесконечности при всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2$, и $h_j \in \mathbb{C}$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$. Также предполагаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad \varphi \in W_p^{2k_0, k_0}(S), \quad (26)$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и выполнены условия согласования: в случае условий Дирихле $u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0)$ при $p > 3/2$, в случае условий с косою производной $R(x, 0)u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0)$ при $p > 3$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (20), (21), (24)–(26) ($p \neq 3/2, 3$), $f \in L_p(Q)$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q)$ задачи (18), (19). Справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq c[\|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{2k_0, k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)}]. \quad (27)$$

Доказательство. Утверждение теоремы в случае ограниченных младших коэффициентов вытекает из ([2], теорема 10.4). Однако, как известно (это отмечается и в [2]), их можно ослабить (см., например, [19], с.198, условия на младшие коэффициенты). $\square$

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. Пусть выполнены условия (20), (21), (24)–(26) ($p \neq 3/2, 3$), $u_0 \equiv 0$ и $\phi \in (0, T]$. Тогда на промежутке $(0, \phi)$ существует единственное решение и задачи (18), (19) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$. Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \leq c \left(\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0, 2k_0}(S_\phi)} + \|f\|_{L_p(Q_\phi)} \right),$$

где постоянная c не зависит от $\phi \in (0, T]$ и f, φ .

Доказательство. Достаточно доказать, что постоянная c не зависит от ϕ . Продолжим φ нулем при $t < 0$ и пусть

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t, x), & t \in (-\infty, \phi); \\ \varphi(2\phi - t, x), & t \in [\phi, T] \end{cases}.$$

Очевидно, $\tilde{\varphi} \in W_p^{k_0, 2k_0}(S)$. Построим функции $\tilde{f} = f$ при $t \leq \phi$ и $\tilde{f} = 0$ при $t > \phi$. Используя теорему 1 построим решение задачи (18), (19) с функциями $\tilde{\varphi}, \tilde{f}$ вместо φ и f такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. По теореме 1 имеем

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \leq \|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|\tilde{f}\|_{L_p(Q)}).$$

Оценим правую часть. Имеет место неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s, 2s}(S)} \leq \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s, 2s}(S_{-1, \beta})} \leq c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s, 2s}(S_{-1, \phi})} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s, 2s}(S_{\phi, \beta})}), \quad \beta = \max(1 + 2\phi, T).$$

Здесь использовали аддитивность пространств Соболева относительно разбиения области ([18], п. 4.4.1, замечание 3) и определение соответствующей нормы. Первое слагаемое в правой части в силу леммы 1 оценивается через $c_2\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(S_\phi)}$. После замены переменных в определении нормы оценку второго слагаемого также сведем к лемме 1, получим

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s, 2s}(S_{\phi, \beta})} \leq c_3\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(S_\phi)},$$

где c_3 — постоянная, не зависящая от ϕ . Кроме того, $\|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} = \|f\|_{L_p(Q_\phi)}$. Отсюда вытекает утверждение. $\square$

Замечание. Ясно, что если граница области состоит из нескольких компонент связности, то вообще говоря, граничные условия на них могут отличаться. Утверждение теорем 1, 2 останутся в силе. Однако следует иметь ввиду, что показатель k_0 , равно как и условия согласования, будет меняться в зависимости от соответствующей компоненты связности Γ . Например, в работе ([24], §4) это в явном виде принимается во внимание. В нашем случае также будем иметь дело с несколькими компонентами связности границы. В случаях $p = 3/2$, $p = 3$ утверждения теорем 1, 2 также справедливы, однако, условия согласования в этом случае записываются в довольно сложном виде.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагаем, что число компонент связности границ Γ, Γ_0 конечно и каждая из них принадлежит классу C^2 . Пусть $p \in (1, \infty)$. Приведем условия на исходные данные. Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \quad a_{ij} \in C(Q^\pm), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

где $q > n + 2$ при $p \leq n + 2$ и $q = p$ при $p > n + 2$, $r > (n + 2)/2$ при $p \leq (n + 2)/2$ и $r = p$ при $p > (n + 2)/2$, и функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$.

Условие (28) означает, что функции a_{ij} при переходе через Γ_0 могут допускать разрывы первого рода. Через $a_{ij}^\pm$ обозначим предельные значения функций $a_{ij}|_{G^\pm}$ на Γ_0 . Далее предположим, что

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad s_0 = 1/2 - 1/2p; \quad (29)$$

$$a_{ij}^\pm, \alpha_k, \beta_k \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}) \quad (k = 1, 2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$,

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm), \quad \varphi \in W_p^{k_0, 2k_0}(S), \quad g^\pm \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0). \quad (31)$$

Условия согласования на внешней границе Γ имеют следующий вид: при $p > 3/2$ в случае условия Дирихле и при $p > 3$ в случае условия с косо́й производной выполнено равенство

$$\varphi(x, 0) = B(x, 0, \partial_x)u_0|_\Gamma. \quad (32)$$

Пусть $u_0^\pm = u_0|_{G^\pm}$. Условия согласования на Γ_0 записываются в следующем виде: если $p > 3$, то

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} - \alpha_1(x, 0)u_0^+ - \alpha_2(x, 0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^+(x, 0), \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_0^-}{\partial N} - \beta_1(x, 0)u_0^+ - \beta_2(x, 0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^-(x, 0). \quad (34)$$

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$Mu^+ = f(x, t), \quad (x, t) \in Q^+, \quad Bu^+|_S = \varphi, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = g^+, \quad u^+|_{t=0} = 0; \quad (35)$$

$$Mu^- = f(x, t), \quad (x, t) \in Q^-, \quad \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{S_0} = g^-, \quad u^-|_{t=0} = 0, \quad (36)$$

где исходные данные удовлетворяют условиям согласования (32)–(34).

Основным результатом работы является

Теорема 3. Пусть выполнены условия (28)–(34), условие параболичности (24) для оператора L , и для задач (35), (36) выполнены условия Лопатинского (25). Тогда существует единственное решение задачи (1)–(4) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q^+) \cap W_p^{1,2}(Q^-)$.

Доказательство. Сначала мы сведем задачу к задаче с нулевым начальным условием. Построим функцию $v_0(x, t) \in W_p^{1,2}(Q^+) \cap W_p^{1,2}(Q^-)$ такую, что $v_0(x, 0) = u_0(x)$. Без ограничения общности можем считать, что справедлива оценка

$$\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq c \left(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} \right), \quad (37)$$

где постоянная c не зависит от u_0 . Чтобы определить такую функцию, сначала построим продолжение U_0^+ функции u_0^+ на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса (используя, например, метод Хестенса или метод, описанный в [18], п. 4.2.3). Без ограничения общности считаем, что $\text{supp } U_0^+ \subset B_R = \{x : |x| < R\}$ для некоторого $R > 0$, и R таково, что $\overline{G^+} \subset B_R$. Далее построим функцию V как решение задачи $V_t - \Delta V = 0$, $V|_{t=0} = U_0^+$, $V|_{\partial B_R \times (0, T)} = 0$. Имеем $V \in W_p^{1,2}(B_R \times (0, T))$ ([2], теорема 10.4). Пусть $v_0^+ = v_0|_{G^+} = V|_{G^+}$. Аналогично построим $v_0^- = v_0|_{G^-}$. Операторы продолжения ([18], теорема 4.2.3) и оператор построения решения

уравнения теплопроводности ограничены в соответствующих пространствах. Поэтому можем считать, что постоянная в (37) не зависит от u_0 . Далее сделаем замену $u = w + v_0$, придем к задаче

$$Mw = w_t - Lw = f(x, t) - Mv_0 = \tilde{f}, \quad (38)$$

$$Bw|_S = \varphi - Bv_0|_S = \tilde{\varphi}, \quad v|_{t=0} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial w^+}{\partial N}(x, t) - \alpha_1(x, t)w^+(x, t) - \alpha_2(x, t)w^-(x, t) = \tilde{g}^+(x, t), \quad (x, t) \in S_0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial N}(x, t) - \beta_1(x, t)w^+(x, t) - \beta_2(x, t)w^-(x, t) = \tilde{g}^-(x, t), \quad (x, t) \in S_0, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}^+(x, t) &= g^+ - \frac{\partial v_0^+}{\partial N}(x, t) + \alpha_1(x, t)v_0^+(x, t) + \alpha_2(x, t)v_0^-(x, t), \\ \tilde{g}^-(x, t) &= g^- - \frac{\partial v_0^-}{\partial N}(x, t) + \beta_1(x, t)v_0^+(x, t) + \beta_2(x, t)v_0^-(x, t). \end{aligned}$$

В силу (32)–(34) новые данные также удовлетворяют условиям согласования (32)–(34), в частности, $\tilde{g}^\pm(x, 0) = 0$, если $p > 3$. Тогда по теореме 1 заключаем, что задачи (35), (36) с данными $\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-$ вместо f, φ, g^+, g^- имеют единственные решения $u^\pm \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$, причем справедлива оценка

$$\|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq c[\|\tilde{g}^+\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|\tilde{g}^-\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)}].$$

В силу леммы 3 и (37) оценку можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} &\leq c[\|g^+\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \\ &+ \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Определим функцию

$$\vartheta(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t), & x \in G^+, t \geq 0; \\ u^-(x, t), & x \in G^-, t \geq 0, \end{cases}$$

после замены $w = v + \vartheta$ задача (38)–(41) сведется к задаче

$$Mv = 0, \quad Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - (\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-)|_{S_0} = g_0^+, \quad \frac{\partial v^-}{\partial N} - (\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-)|_{S_0} = g_0^-, \quad (44)$$

где $g_0^+ = \alpha_1 u^+ + \alpha_2 u^-$, $g_0^- = \beta_1 u^+ + \beta_2 u^-$. Вместо задачи (43), (44) рассмотрим задачу с параметром $\tau \in [0, 1]$, заменив условия (44) условиями

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \tau(\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-)|_{S_0} = g_0^+, \quad \frac{\partial v^-}{\partial N} - \tau(\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-)|_{S_0} = g_0^-. \quad (45)$$

При $\tau = 0$ задача (43), (44) имеет единственное решение в силу условий теоремы. Определим оператор $R = (R^+, R^-)$, сопоставляющий паре (g^+, g^-) решение (v^+, v^-) задач (35), (36), с $f \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Таким образом, $(v^+, v^-) = R(g^+, g^-) = (R^+(g^+), R^-(g^-))$. Тогда задача (43), (45) эквивалентна системе

$$(v^+, v^-) = R(g_0^+, g_0^-) + \tau R(\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-, \beta_1 v^+ + \beta_2 v^-). \quad (46)$$

Если $(v^+, v^-) \in W_p^{1,2}(Q^+) \times W_p^{1,2}(Q^-)$, то $v^+ \in W_p^{s_1, 2s_1}(S_0)$, $v^- \in W_p^{s_1, 2s_1}(S_0)$ ([21], теорема 7.3). Рассматриваем оператор $R(v^+, v^-)$ как оператор из

$$H_\phi = \{v = (v^+, v^-) \in W_p^{1,2}(Q_\phi^+) \times W_p^{1,2}(Q_\phi^-) : Bv^+|_{S_\phi} = 0, v^\pm|_{t=0} = 0\} \text{ в } H_\phi.$$

В качестве нормы в H_ϕ берем $\|v\|_{H_\phi} = \|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}$. Получим априорные оценки, равномерные по параметру $\tau \in [0, 1]$, которые гарантируют в том числе ограниченность оператора $R : H_\phi \rightarrow H_\phi$. Пусть вектор-функция (v^+, v^-) есть решение уравнения (46). В силу теоремы 2

$$\|R(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq C \left(\|\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} + \|\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} \right). \quad (47)$$

Поскольку $\alpha_i, \beta_i \in C^{\alpha, 2\alpha}(S_0)$ и $\alpha > s_0$, то в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах ([23], теорема 3.3.2, с.198), можно также использовать определение нормы, имеем

$$\|\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} + \|\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} \leq C \left(\|v^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} + \|v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} \right), \quad (48)$$

где постоянная C не зависит от ϕ , а зависит от величин $\|\alpha_i\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(\overline{S_0})}$ и $\|\beta_i\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(\overline{S_0})}$, $i = 1, 2$. Далее

$$\|v^\pm\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \phi)}^p = \int_0^\phi \frac{|v^\pm|^p}{t^{s_0 p}} dt + \int_0^\phi \int_0^\phi \frac{|v^\pm(t) - v^\pm(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau \leq \phi^{(s_1 - s_0)p} \|v^\pm\|_{\tilde{W}_p^{s_1}(0, \phi)}^p. \quad (49)$$

Отсюда вытекает

$$\|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0; \tilde{W}_p^{s_0}(0, \phi))} \leq \phi^{1/2} \|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0; \tilde{W}_p^{s_1}(0, \phi))}. \quad (50)$$

По лемме 2 правая часть оценивается через $C\phi^{1/2}\|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}$. Таким образом, имеем неравенство

$$\|v^+\|_{L_p(\Gamma_0; \tilde{W}_p^{s_0}(0, \phi))} + \|v^-\|_{L_p(\Gamma_0; \tilde{W}_p^{s_0}(0, \phi))} \leq C\phi^{1/2} (\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}). \quad (51)$$

Оценим нормы $\|v^\pm\|_{L_p(0; \phi; W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))}$:

$$\begin{aligned} \|v^\pm\|_{L_p(0; \phi; W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))} &\leq c_1 \|v^\pm\|_{L_p(0; \phi; W_p^1(G^\pm))} \leq \\ &\leq c_2 \|v^\pm\|_{L_p(Q_\phi^\pm)}^{1/2} \|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^\pm)}^{1/2} \leq c_3 \phi^{1/2} \|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^\pm)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь воспользовались теоремой о следах ([18], теорема 4.7, с.412) и соответствующей оценкой $\|u\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} \leq c_1 \|u\|_{W_p^1(G^\pm)}$, интерполяционным неравенством

$\|u\|_{W_p^1(G^\pm)} \leq C \|u\|_{L_p(G^\pm)}^{1/2} \|u\|_{W_p^2(G^\pm)}^{1/2}$ и неравенством $\|u\|_{L_p(0, \phi)} \leq \phi \|u_t\|_{L_p(0, \phi)}$ ($u(0) = 0$), вытекающим из формулы Ньютона–Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от ϕ . Из неравенств (48), (50)–(52) вытекает оценка

$$\|R(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq C\phi^{1/2} (\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}), \quad (53)$$

где постоянная C не зависит от $\phi \in (0; T]$. Таким образом, если $\phi \leq \gamma_0$, $C\gamma_0^{1/2} = 1/2$, то из (46) и теоремы 2 вытекает неравенство

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq 2\|R(g_0^+, g_0^-)\|_{H_\phi} \leq 2c \left(\|g_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} + \|g_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} \right), \quad (54)$$

где постоянная c не зависит от ϕ . Используя оценку (48), примененную к функциям u^+, u^- , и определение функций $g_0^\pm$, получим

$$\|g_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} + \|g_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi^0)} \leq c \left(\|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q)} \right) = c_0. \quad (55)$$

Далее покажем, что найдется такой параметр $\gamma_1 \leq \gamma_0$, что из неравенства

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq c_1 \quad (56)$$

для решений уравнения (46) вытекает оценка

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_{\min(\phi+\gamma_1, T)}} \leq c_2,$$

где параметры c_i зависят от норм данных и не зависят от $\tau \in [0, 1]$, параметр γ_1 не зависит от $\phi \in (0, T)$. Возьмем параметр $\gamma_1 \leq \gamma_0$ и предположим, что справедлива оценка (56). Пусть $v|_{G^\pm} = v^\pm$, продолжим v нулем при $t < 0$. Определим функции $v_0(x, t) = v(x, t)$ при $t \leq \phi$ и $v_0(x, t) = v(x, 2\phi - t)$ при $t \in (\phi, T)$. Имеем $v_0 \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ и $\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq 2\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}$. Сделаем замену $v = v_0 + v_1$. Функция v_1 есть решение задачи

$$\begin{aligned} Mv_1 &= -Lv_0, \quad Bv_1|_S = -Bv_0|_S, \quad \frac{\partial v_1^+}{\partial N} = \tau(\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-) + \tilde{g}_0^+, \\ \frac{\partial v_1^-}{\partial N} &= \tau(\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-) + \tilde{g}_0^- \quad ((x, t) \in S_0), \end{aligned} \quad (57)$$

где $\tilde{g}_0^+ = (-\frac{\partial v_0^+}{\partial N} + \tau(\alpha_1 v_0^+ + \alpha_2 v_0^-))|_{S_0} + g_0^+$, $\tilde{g}_0^- = (-\frac{\partial v_0^-}{\partial N} + \tau(\beta_1 v_0^+ + \beta_2 v_0^-))|_{S_0} + g_0^-$. По построению $v_1 = 0$ при $t \in [0, \phi], x \in G$. По лемме 3 найдется постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$\|Lv_0\|_{L_p(Q)} \leq c_0\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq 2c_0\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \leq 2c_0c_1, \quad (58)$$

где постоянная c_0 зависит от норм коэффициентов уравнения в соответствующих классах. В силу леммы 3

$$\|Bv_0\|_{\tilde{W}_p^{k_0, 2k_0}(S)} \leq \tilde{c}\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq 2\tilde{c}c_1. \quad (59)$$

Аналогично, в силу леммы 2

$$\|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|\tilde{g}_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} \leq c_2\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_0 \leq 2c_2(c_1 + c_0). \quad (60)$$

Из теоремы 2, примененной к задаче (57), вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} &\leq C \left(\|Lv_0\|_{L_p(Q)} + \|Bv_0\|_{\tilde{W}_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \right. \\ &\quad \left. + \|\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|\tilde{g}_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} \right), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ϕ, γ_1 . Из (58)–(60) имеем

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_0 + c_5 \left(\|\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} \right),$$

где постоянные c_4, c_5 не зависят от ϕ, τ . В силу оценки (48)

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_0 + c_6 \left(\|v_1^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} \right). \quad (61)$$

Оценим последнее слагаемое. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} J &= \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm|}{t^{s_0 p}} dt + \int_0^{\phi+\gamma_1} \int_0^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau = \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm|}{t^{s_0 p}} dt + \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \int_0^{\phi} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau + \\ &\quad + \int_0^{\phi} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau + \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau. \end{aligned}$$

В силу того, что $v_1 = 0$ при $t \leq \phi$, второй интеграл может быть оценен так:

$$\begin{aligned} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \int_0^{\phi} \frac{|v_1^{\pm}(t) - v_1^{\pm}(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0p}} dt d\tau &= \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \int_0^{\phi} \frac{|v_1^{\pm}(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0p}} dt d\tau = \\ &= \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} |v_1^{\pm}(\tau)|^p \left(\frac{1}{(\tau - \phi)^{s_0p}} - \frac{1}{\tau^{s_0p}} \right) \frac{1}{s_0p} d\tau \leq \frac{1}{s_0p} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^{\pm}(\tau)|^p}{|\tau - \phi|^{s_0p}} d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично, $\int_0^{\phi} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^{\pm}(t) - v_1^{\pm}(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0p}} dt d\tau \leq \frac{1}{s_0p} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^{\pm}(t)|^p}{|t - \phi|^{s_0p}} dt$. Тогда

$$\begin{aligned} J &\leq \left(1 + \frac{2}{s_0p}\right) \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^{\pm}(t)|^p}{|t - \phi|^{s_0p}} dt + \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^{\pm}(t) - v_1^{\pm}(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+s_0p}} dt d\tau \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2}{s_0p}\right) \gamma_1^{p/2} \|v_1^{\pm}\|_{\tilde{W}_p^{s_1}(\phi, \phi+\gamma_1)}^p. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 (чтобы применить лемму, сначала делаем замену переменных $\xi = t - \phi$, $\eta = \tau - \phi$)

$$\int_{\Gamma} J d\Gamma \leq C_0 \|v_1^{\pm}\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi, \phi+\gamma_1}^{\pm})}^p \gamma_1^{p/2}, \quad (62)$$

где C_0 не зависит от ϕ, γ_1 . Как и ранее, в (52)

$$\begin{aligned} \|v_1^{\pm}\|_{L_p(0, \phi+\gamma_1; W_p^{1-1/p}(\Gamma))} &= \|v_1^{\pm}\|_{L_p(\phi, \phi+\gamma_1; W_p^{1-1/p}(\Gamma))} \leq \\ &\leq C_0 \|v_1^{\pm}\|_{L_p(\phi, \phi+\gamma_1; W_p^1(G^{\pm}))} \leq C_1 \|v_1^{\pm}\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi, \phi+\gamma_1}^{\pm})} \gamma_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Из (61), (62) и последней оценки вытекает неравенство

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq c_4 \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_0 + c_8 \|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \gamma_1^{1/2},$$

где постоянные c_4, c_8 не зависят от параметров $\phi, \gamma_1, \tau \in [0, 1]$. Выберем γ_2 так, чтобы $C_8 \gamma_2^{1/2} = 1/2$, тогда при $\gamma_1 \leq \gamma_2$ из предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq 2c_4 \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_0 \leq 4c_4 \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi})}. \quad (63)$$

Тогда из (42), (55), (54), (60), (63) имеем

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} &\leq 5c_4 \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi})} + c_0 \leq c \left[\|g^+\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0^+\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0^-\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} \right], \end{aligned}$$

здесь постоянная c зависит от норм коэффициентов и постоянных из теорем вложения и не зависит от параметров $\tau \in [0, 1], \phi, \gamma_1$. Возьмем $\phi = \gamma_0$. Далее, в силу доказанного, можем выписать оценку такого вида на $[0, \gamma_0 + 2\gamma_1], [0, \gamma_0 + 3\gamma_1]$ и так далее. За конечное число шагов достигнем конца промежутка T . Это позволяет утверждать, что на всем промежутке $[0, T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} &\leq c \left[\|g^+\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)} + \|u_0^+\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0^-\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} \right] \quad (64) \end{aligned}$$

с некоторой постоянной c не зависящей от $\tau \in [0, 1]$. Далее сошлемся на метод продолжения по параметру ([25], гл. 3, теорема 3.13), согласно которому уравнение (46) разрешимо для

всех $\tau \in [0, 1]$. Решение будет удовлетворять оценке (64), из которой вытекает единственность решений задачи. $\square$

В заключение приведем один пример, показывающий применимость метода доказательства теоремы 3 к случаю $\overline{G^-} \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Пример. Пусть G — ограниченная область вида $G = \Omega \times (0, l)$, $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $G_i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $Q_i = G_i \times (0, T)$, $i = 1, \dots, k$, $l_{i-1} < l_i$, $l_0 = 0$, $l_k = l$, $\Gamma = \partial G$, $S_0 = \Omega \times (0, T)$. Ищем решение системы

$$Mu = u_t - \alpha(x, t)\Delta u + \sum_{i=1}^n a_i(x, t)u_{x_i} + a_0(x, t)u = f, \quad (65)$$

где $\alpha(x, t)$ — непрерывная в каждой области G_i матрица-функция такая, что матрица $\alpha(x, t)|_{G_i}$ допускает продолжение до непрерывной на $\overline{G_i}$ матрицы-функции и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $(\alpha\xi, \xi) \geq \delta_0|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $(x, t) \in Q$. Данные задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_\nu + \sigma(x, t)u|_S = \varphi, \quad (u_{x_n} - \alpha_i^1(x', t)u)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(x', t)u|_{x_n=l_i-0} = g_i^+, \\ (u_{x_n} - \beta_i^1(x', t)u)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(x', t)u|_{x_n=l_i+0} = g_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (66)$$

где u_ν — производная по направлению внешней единичной нормали к Γ и σ — матрица-функция. Условия согласования имеют следующий вид: при $p > 3$ $\varphi(x, 0) = u_{0\nu}(x) + \sigma u_0(x)|_\Gamma$ и

$$\begin{aligned} (u_{0x_n} - \alpha_i^1(x', 0)u_0)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(x', 0)u_0|_{x_n=l_i-0} = g_i^+(x', 0), \\ (u_{0x_n} - \beta_i^1(x', 0)u_0)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(x', 0)u_0|_{x_n=l_i+0} = g_i^-(x', 0), \end{aligned} \quad (67)$$

где $i = 1, 2, \dots, k-1$. Далее предположим, что

$$\sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i}), \quad S_i = \partial\Omega \times (l_{i-1}, l_i), \quad \sigma(x', l, t) = \sigma(x', 0, t) = 0, \quad (68)$$

$$\beta_i^j, \alpha_i^j \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}) \quad (j = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, k-1) \quad (69)$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$,

$$\begin{aligned} u_0(x) \in \cap_i W_p^{2-2/p}(G_i), \quad g_i^\pm \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad i = 1, \dots, k, \\ \varphi(x, t) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_i) \quad \forall i, \quad \varphi(x', 0, t), \varphi(x', l, t) \in W_p^{s_0, 2s_0}(\Omega). \end{aligned} \quad (70)$$

Отметим, что каждая из функций $\sigma, u_0(x), \varphi(x)$ может иметь разрыв при переходе через плоскости $x_n = l_i$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (67)–(70) и (20) для функций a_i, a_0 . Тогда существует единственное решение задачи (65), (66) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Доказательство проводится по следующей схеме. Сначала устанавливается, что вспомогательные задачи

$$Mu = f(x, t), \quad Bu|_{S_i} = \varphi, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_{x_n}|_{x_n=l_{i-1}} = g^-, \quad u_{x_n}|_{x_n=l_i} = g^+, \quad (71)$$

где $(x, t) \in Q_i$, данные удовлетворяют условиям согласования и обладают приведенной выше гладкостью, разрешимы и решение $u \in W_p^{1,2}(Q_i)$ удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_i)} \leq c \left[\|g^+\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|f\|_{L_p(Q_i)} + \|\varphi\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} \right].$$

Идея доказательства разрешимости задачи (71) известна: сводим задачу к случаю однородных данных $g^\pm$ и замечаем, что решение допускает четное относительно плоскостей $x_n = l_{i-1}$, $x_n = l_i$ продолжение с сохранением класса (коэффициенты при этом также

продолжаются четным образом, за исключением a_n , который продолжается нечетным образом). Этот факт позволяет исследовать вопрос о гладкости решений в окрестности множества $\{(x, t) : x \in \partial\Omega, x_n = l_i \text{ или } x_n = l_{i-1}\}$. Далее доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Baehr H.D., Stephan K. *Heat and Mass Transfer* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006).
- [2] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* (М., Наука, 1968).
- [3] Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я., Уральцева Н.Н. *О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов*, Докл. АН СССР, **158** (3), 513–515 (1964).
- [4] Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я., Уральцева Н.Н. *О классической разрешимости задач дифракции*, Тр. МИАН СССР, **92**, 116–146 (1966).
- [5] Олейник О.А. *Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами*, УМН, **14** (5(89)), 164–166 (1959).
- [6] Олейник О.А. *Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами*, Изв. Академии Наук СССР, Сер. матем., **25**, 3–20 (1961).
- [7] Шефтель З.Г. *Разрешимость в L_p и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами*, УМН, **19** (4(118)), 230–232 (1964).
- [8] Шефтель З.Г. *Оценки в L_p решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и условиям сопряжения*, Докл. АН СССР, **149** (1), 48–51 (1963).
- [9] Schechter M. *A generalization of the problem of transmission*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze 3^e, **14** (3), 207–236 (1960).
- [10] Житарашу Н.В. *Априорные оценки и разрешимость общих краевых задач*, Докл. АН СССР, **165** (1), 24–27 (1965).
- [11] Житарашу Н.В. *Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами*, Докл. АН СССР, **169** (3), 511–514 (1966).
- [12] Prüss V., Simonett G. *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations* (Basel: Birkhauser Publishing, 2016).
- [13] Simon L. *On contact problems for nonlinear parabolic functional differential equations*, Electronic J. of Qualit. Theory of Diff. Equat. **22**, 1–11 (2004).
- [14] Номировский Д.А. *Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта*, Дифференц. уравнения, **40** (10), 1390–1399 (2004).
- [15] Jovanovi B.S., Vulkov L.G. *Formulation and analysis of a parabolic transmission problem on disjoint intervals*, Publ. De L'Institut Math. Nouvelle Ser., **91** (105), 111–123 (2012).
- [16] Abreu A., Orlande H.R.B., Naveira-Cotta C.P., Quaresma J.N.N., Cotta R.M. *Identification of contact failures in multi-layered composites*, Proc. of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011 August 28–31, 1–9 (2011).
- [17] Lugon J.Jr., Neto A.J.S. *An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a one-dimensional porous medium*, Proceedings of COBEM 2003. 17th International Congress of Mechanical Engineering, November 10–14, 1–11 (2003).
- [18] Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы* (Мир, М., 1980).
- [19] Denk R., Hieber M., Prüss J. *Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data*, Math. Z. **257** (1), 193–224 (2007).
- [20] Пятков С.Г., Вержбицкий М.А. *О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов*, Матем. заметки СВФУ, **23** (2), 3–18 (2016).
- [21] Grisvard P. *Equations différentielles abstraites*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e series, **2**, 311–395 (1969).
- [22] Солонников В.А. *О краевых задачах для линейных параболических систем общего вида*, Тр. МИАН, **83**, 3–163 (1965).
- [23] Трибель Х. *Теория функциональных пространств* (М., Мир, 1986).
- [24] Amann H. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary-value problems*, Function Spaces, Diff. Operators and Nonlinear Anal. **133**, 9–126 (1992).

- [25] Lieberman G.M. *Second order parabolic differential equations* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996).

Владимир Андреевич Белоногов

*Югорский государственный университет,
ул. Чехова, д. 16, г. Ханты-Мансийск, 628012, Россия,
e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru*

Сергей Григорьевич Пятков

*Югорский государственный университет,
ул. Чехова, д. 16, г. Ханты-Мансийск, 628012, Россия,
e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru*

V.A. Belonogov and S.G. Pyatkov

On solvability of conjugation problems with non-ideal contact conditions

Abstract. In the article we examine the questions of regular solvability in the Sobolev spaces of the transmission problems with transmission conditions of non-ideal contact type for parabolic second order systems. A solution has all generalized derivatives occurring in the system summable to some power $p \in (1, \infty)$. At the interface the limit values of the conormal derivatives are expressed through the limit values of a solution. The problem does not belong to the class of classical diffraction problems and arises when describing heat-and-mass transfer processes. The proof relies on a priori bounds and the method of continuation in a parameter.

Keywords: transmission problem, discontinuous coefficient, parabolic system, heat-and-mass transfer.

Vladimir Andreevich Belonogov

*Yugra State University,
16 Chekhov str., Khanty-Mansiysk, 628012 Russia,
e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru*

Sergey Grigorievich Pyatkov

*Yugra State University,
16 Chekhov str., Khanty-Mansiysk, 628012 Russia,
e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru*