Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Вильданова, Существование решения задачи Коши для уравнения агрегации в гиперболическом пространстве, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 33–44

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-33-44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:20:04

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В гиперболическом пространстве рассматривается задача Коши для уравнения агрегации. Неотрицательная начальная функция ограничена и суммируема. Доказано существование слабого решения на малом интервале времени. В случае, когда ядро интегрального оператора гладкое и быстро убывает на бесконечности, доказано существование ограниченного решения на произвольном интервале времени.

Ключевые слова: уравнение агрегации, существование решения, гиперболическое пространство.

УДК: 517.954

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-33-44

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{H}^n$ — гиперболическое пространство размерности $n \geq 2$. В работе [1] исследуется корректность задачи Коши

$$a(x)u_t = \Delta A(u), (x, t) \in \mathbb{H}^n \times [0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_0 \in C(\mathbb{H}^n) \cap L_\infty(\mathbb{H}^n),$$

где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами. Непрерывная функция a положительна, функция A , $A(0) = 0$, имеет положительную производную в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Рассматривается модель Пуанкаре гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$ в виде шара $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ с римановой метрикой $g_{ij} = 4\delta_{ij}(1 - |x|^2)^{-2}$. Доказывается существование ограниченного решения задачи Коши. При дополнительном условии $a(x) \geq C(1 - |x|)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, доказывается единственность ограниченного решения задачи Коши. Если же $a(x) \leq C(1 - |x|)^{-\alpha}$, $\alpha < 0$, то решение задачи Коши имеет след на бесконечности, и для единственности нужно задавать значение этого следа.

Мотивацией для настоящего исследования явились работы [1], [2]. В [2] доказывается существование и единственность ограниченного решения задачи Коши для уравнения агрегации

$$u_t = \Delta A(u) - \operatorname{div}(u \nabla K * u) \quad (2)$$

Поступила в редакцию 17.06.2019, после доработки 20.12.2019. Принята к публикации 25.03.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 18-01-00428а.

с гладким симметричным ядром $K = K(|x|)$. Была доказана также корректность первой смешанной задачи в цилиндре $D^T = \Omega \times (0, T)$ в случае выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Однако доказательства существования решения содержали пробел, который был устранен в работе [3].

Работу [1] можно рассматривать как распространение результатов работы [4] о корректности задачи Коши для уравнения

$$a(x)u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (3)$$

на случай гиперболического пространства. В этой работе доказано, что если функция $a(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то ограниченное решение задачи Коши для уравнения (3) имеет определенный след на бесконечности в виде функции времени $\gamma(t)$, и для единственности решения нужно задавать значение этого следа.

Отметим, что уравнения (1), (2) существенно различны. Если для уравнений (1), (3) справедлив принцип максимума в обычной для параболического уравнения форме, то для уравнения (2) принцип максимума неизвестен (и, по-видимому, не имеет места). Поэтому методы работы с уравнениями (1), (2) сильно различаются.

В настоящей работе в слое $Q^T = \mathbb{H}^n \times [0, T)$ рассматривается задача Коши для уравнения агрегации

$$u_t = \operatorname{div}_g(a(u) - u\mathcal{G}(u)), \quad (4)$$

где $a(u) = |\nabla_g A(u)|_g^{p-2} \nabla_g A(u)$, с ограниченной начальной функцией $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$:

$$u(x, 0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{H}^n. \quad (5)$$

Здесь и далее у операторов div_g , ∇_g нижний индекс g на многообразии $\mathbb{H}^n$ будет отличать их от соответствующих операторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ — шар радиуса $r \in (0, 1]$. Условия на интегральный оператор

$$\mathcal{G}(v) = \int_{\mathbb{H}^n} X(y)v(y)d\nu$$

приведены в секции 2; здесь $d\nu$ — элемент объема в $\mathbb{H}^n$, $X(y)$ при каждом $y \in \mathbb{H}^n$ является векторным полем в $\mathbb{H}^n$.

Обзор работ, посвященных вопросам существования и единственности решения смешанной задачи для уравнения агрегации в случае областей в $\mathbb{R}^n$, можно найти в [3]. Отметим, что в последнее десятилетие проводится очень много исследований, касающихся уравнения агрегации. Соответствующие ссылки можно найти в списках литературы работ [2], [5].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, РЕЗУЛЬТАТ

Будем рассматривать гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ в виде модели Пуанкаре в шаре B_1 с римановой метрикой

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \delta_{ij}, \quad x \in B_1, \quad i, j = 1, \dots, n;$$

кроме того, пусть g^{ij} — элементы обратной матрицы к (g_{ij}) ,

$$\partial B_1 \equiv \partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\infty\}.$$

Геодезическое расстояние между произвольным $x \in \mathbb{H}^n$ и точкой 0 определяется формулой

$$\rho(x) = \int_0^{|x|} \frac{2}{1-s^2} ds = \ln \frac{1+|x|}{1-|x|}, \quad x \in \mathbb{H}^n \equiv B_1;$$

поэтому

$$|x| = \tanh \left(\frac{\rho(x)}{2} \right).$$

Для любого $\varrho > 0$ определим

$$\mathfrak{B}_\varrho = \{x \in \mathbb{H}^n | \rho(x) < \varrho\}, \quad \mathfrak{S}_\varrho = \{x \in \mathbb{H}^n | \rho(x) = \varrho\}.$$

Следовательно, для любого $r \in (0, 1)$

$$B_r = \mathfrak{B}_{\ln \frac{1+r}{1-r}}.$$

Всюду далее числа r, ϱ связаны равенством $\varrho = \ln \frac{1+r}{1-r}$. Ниже будем использовать обозначения $D_r^T = B_r \times [0, T)$, $Q_r^T = \mathfrak{B}_\varrho \times [0, T)$.

В $\mathbb{H}^n$ элемент объема имеет вид

$$d\nu = \sqrt{g} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{2^n}{(1-|x|^2)^n} dx,$$

где dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для каждого $x \in \mathbb{H}^n$ через $T_x \mathbb{H}^n$ обозначим касательное пространство в этой точке. Очевидно, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ — базис в $T_x \mathbb{H}^n$. Скалярное произведение векторов будем обозначать в угловых скобках

$$\langle \beta, \xi \rangle_g \equiv \langle \beta, \xi \rangle_{g,x} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \beta^i \xi^j$$

для любых $\beta, \xi \in T_x \mathbb{H}^n$, где $\beta = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ для некоторых $(\beta^1, \dots, \beta^n) \in \mathbb{R}^n$ и $(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Градиент $\nabla_g u = ((\nabla_g u)^1, \dots, (\nabla_g u)^n)$ определяется формулой

$$(\nabla_g u)^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

кроме того,

$$|\beta|_g = \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle_g}, \quad \beta \in T_x \mathbb{H}^n, \quad x \in \mathbb{H}^n.$$

Легко видеть, что

$$\nabla_g A(u) = \frac{(1-|x|^2)^2}{4} \nabla A(u), \quad |\nabla_g A(u)|_g = \frac{(1-|x|^2)}{2} |\nabla A(u)|, \quad (6)$$

где ∇ без индекса — обычный градиент в декартовой системе в $\mathbb{R}^n$.

Через $\chi^k(\mathcal{M})$ обозначим множество векторных полей класса C^k , $k \geq 0$, на многообразии $\mathcal{M}$.

Дифференциал df функции f имеет локальные координаты $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, при этом $|df|_g = |\nabla_g f|_g$. Производная Ли функции $f \in C^1(\mathbb{H}^n)$ вдоль векторного поля $X \in \chi^0(\mathbb{H}^n)$ в локальной системе координат определяется формулой

$$\langle df, X \rangle = \langle \nabla_g f, X \rangle_g = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Дивергенция векторного поля X в локальной системе координат имеет вид

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{g}).$$

Пространство $\mathring{W}_p^{1,0}(Q_r^T)$ определяется как пополнение пространства $C_0^1(Q_r^T)$ по норме

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(Q_r^T)}^p = \|u\|_{p,Q_r^T}^p + \|\nabla_g u\|_{p,Q_r^T}^p = \int_0^T \int_{\mathfrak{B}_g} (|u|^p + |\nabla_g u|_g^p) dv dt.$$

Поскольку

$$1 - r^2 \leq 1 - |x|^2 \leq 1, \quad x \in B_r, \quad r \in (0, 1),$$

то $\mathring{W}_p^{1,0}(Q_r^T)$ совпадает с обычным соболевским пространством $\mathring{W}_p^{1,0}(D_r^T)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(D_r^T)} = \left(\int_0^T \int_{B_r} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx dt \right)^{1/p},$$

и соответствующие нормы эквивалентны в силу (6). Пространство $W_p^{1,0}(Q_r^T)$ определяется как пополнение пространства $C^1(\overline{Q_r^T})$.

Будем предполагать, что $A(u) \in C^1[0, \infty)$, $A(0) = 0$, и

$$A'(u) > 0, \quad u > 0. \quad (7)$$

Условия на ядро оператора $\mathcal{G}(v)$ имеют вид $X(y) \in \chi^1(P)$, $P = \mathbb{H}^n \setminus \{y\}$, $y \in B_1$,

$$|d_x X_x(y)|_g + |X_x(y)| \leq C(|x|)(1 + |x - y|^{-\lambda}), \quad \lambda \in (0, n), \quad x, y \in B_1, \quad (8)$$

где $C(r)$ — неубывающая функция. В следующем условии дивергенция вычисляется в естественной карте B_1 :

$$\operatorname{div}_x(\sqrt{g(x)} X_x(y)) \geq -D_X, \quad x, y \in B_1. \quad (9)$$

Условию (9) удовлетворяют, например, гладкие векторные поля $X_x(y)$, достаточно быстро убывающие при $|x| \rightarrow 1$.

Из условия $\lambda \in (0, n)$ следует, что найдется число $q \geq 2$ такое, что $\lambda < \frac{n}{q}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$.

Зафиксируем соответствующие числа $q, \bar{q}$.

Будем использовать следующее утверждение об оценках интегралов типа потенциалов ([6], гл. I, §6).

Лемма 1. Пусть $\lambda \in (0, n)$ и $\lambda < n/\bar{q}$, $2 \leq q < \infty$, $f(x) \in L_q(B_1)$. Тогда функция

$$v(x) = \int_{B_1} \frac{f(y) dy}{|x - y|^\lambda}$$

непрерывна в B_1 и удовлетворяет неравенству $|v(x)| \leq C\|f\|_{q,B_1}$, $x \in B_1$.

Выведем некоторые оценки для интегрального оператора $\mathcal{G}(v)$. Из леммы 1 и условия (8) следует, что для всякой измеримой функции $v(x)$ с носителем B_r , $|v(x)| \leq \rho$, выполнены неравенства

$$\mathcal{G}(v) \in \chi^1(\mathbb{H}^n), \quad |\mathcal{G}(v)(x)| \leq C_G(\rho), \quad |\nabla_g \mathcal{G}(v)(x)|_g \leq C_d(\rho), \quad x \in B_r, \quad (10)$$

с возрастающими функциями C_G, C_d , которые могут зависеть от r .

Определение 1. Функция $u : Q^T \rightarrow [0, \infty)$ называется слабым решением задачи Коши (4), (5), если $u \in L_\infty(Q^T)$, $A(u) \in W_p^{1,0}(Q_r^T)$ при любом $r \in (0, 1)$ и для всех пробных функций $\phi \in C_0^\infty(Q^T)$ выполнено равенство

$$\int_{Q^T} ((u_0 - u)\phi_t + \langle |\nabla_g A(u)|_g^{p-2} \nabla_g A(u), d\phi \rangle) d\nu dt = \int_{Q^T} \langle u \mathcal{G}(u), d\phi \rangle d\nu dt.$$

Теорема 1. Пусть $0 \leq u_0(x) \leq M_0$, $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$ и выполнены условия (7), (8). Тогда существует слабое решение задачи (4), (5) в цилиндре Q_r^T малой высоты T .

Если дополнительно выполнено условие (9), то существует слабое решение задачи в цилиндре Q^T любой высоты $T > 0$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Не ограничивая общности будем считать, что $A(r)$ — нечетная функция. Рассмотрим аппроксимационную задачу. Положим

$$A_\varepsilon(u) = A(u) + \varepsilon u, \quad a_\varepsilon(u) = |\nabla_g A_\varepsilon(u)|_g^{p-2} \nabla_g A_\varepsilon(u).$$

Шар $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$, $r \in (0, 1)$, является естественной картой для геодезического шара $\mathfrak{B}_\varrho \subset \mathbb{H}^n$ радиуса $\varrho = \frac{1+r}{1-r}$. В шаре $\mathfrak{B}_\varrho$ будем рассматривать уравнение

$$u_t = \operatorname{div}_g(a_\varepsilon(u) - u \mathcal{G}(u)), \quad x \in \mathfrak{B}_\varrho, \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x, 0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathfrak{B}_\varrho, \quad (12)$$

$$u|_{x \in \partial \mathfrak{B}_\varrho} = 0. \quad (13)$$

При вычислении интегрального оператора $\mathcal{G}(u)$ предполагается, что функция u продолжена нулем вне Q_r^T .

Чтобы установить разрешимость задачи (11)–(13), перепишем уравнение (11) в карте B_r . В силу (6) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g(a_\varepsilon(u)) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div} \left(\sqrt{g} \frac{(1-|x|^2)^p}{2^p} |\nabla A_\varepsilon(u)|^{p-2} \nabla A_\varepsilon(u) \right), \\ \operatorname{div}_g(u \mathcal{G}(u)) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div}(\sqrt{g} u \mathcal{G}(u)). \end{aligned}$$

Тогда задача (11)–(13) сводится к следующей задаче в шаре $B_r \subset \mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{g} u_t = \operatorname{div} \left(\sqrt{g} \frac{(1-|x|^2)^p}{2^p} |\nabla A_\varepsilon(u)|^{p-2} \nabla A_\varepsilon(u) - \sqrt{g} u \mathcal{G}(u) \right), \quad x \in B_r, \quad t \in (0, T), \quad (14)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in B_r, \quad (15)$$

$$u|_{x \in \partial B_r} = 0. \quad (16)$$

Существование слабого решения задачи (14)–(16) выведем из результата работы [7].

После обозначений $\hat{a}(x, u, \nabla u) = \sqrt{g} \frac{(1-|x|^2)^p}{2^p} |\nabla A_\varepsilon(u)|^{p-2} \nabla A_\varepsilon(u)$, $G(u) = \sqrt{g} \mathcal{G}(u)$, уравнение (14) перепишется в виде

$$\sqrt{g} u_t = \operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u) - uG(u)). \quad (17)$$

Очевидно, существует непрерывная функция $C(m, r)$, $m \geq 0$, $r \in (0, 1)$, такая, что

$$|\hat{a}(x, s, y)|^{\bar{p}} \leq C(m, r) |y|^p \quad (18)$$

при всех $s \in [-m, m]$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in B_r$. Отметим, что из (18) легко следует

$$|\hat{a}(x, u, \nabla v)| \in L_{\bar{p}}(D_r^T)$$

при всех $u \in L_\infty(D_r^T)$, $v \in W_p^{1,0}(D_r^T)$.

Определение 2. Функция $u : D_r^T \rightarrow [0, \infty)$ называется слабым решением задачи (17), (15), (16) в цилиндре D_r^T , если $u \in L_\infty(Q^T)$, $u \in \mathring{W}_p^{1,0}(D_r^T)$ и для всех пробных функций $\phi \in C_0^\infty(D_r^T)$ выполнено равенство

$$\int_{D_r^T} (\sqrt{g}(u_0 - u)\phi_t + (\hat{a}(x, u, \nabla u) - uG(u)) \cdot \nabla \phi) dx dt = 0. \quad (19)$$

Функция u является решением в $D_r^\infty = B_r \times [0, \infty)$, если она является решением в D_r^T при любом $T > 0$.

Теорема 2. Пусть $0 \leq u_0(x) \leq M_0$ и выполнены условия (7), (8). Тогда существует слабое решение задачи (17), (15), (16) в цилиндре D_r^T малой высоты T такое, что $0 \leq u(x, t) \leq \rho$.

Если, дополнительно, выполнено условие (9), то существует слабое решение задачи (17), (15), (16) в цилиндре D_r^∞ такое, что $0 \leq u(x, t) \leq M_0 \exp(ct)$, с не зависит от r .

Лемма 2. Пусть $\rho \geq 3M_0$. Тогда найдется число $T = T(C_d(\rho), C_G(\rho))$ такое, что существует решение задачи (17), (15), (16) в цилиндре D_r^T такое, что $0 \leq u(x, t) \leq \rho$.

Доказательство этой леммы фактически следует из результата работы [7] (см. также [8]), поэтому опускается. В этой работе рассматривалась задача с краевым условием «непротекания». В случае краевого условия (16) доказательство упрощается.

Лемма 3. Пусть $b(s)$ — функция, неубывающая по s , и измеримые функции $v : Q^T \rightarrow \mathbb{R}$, $v_0 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $b(v) \in L_1(Q_r^T)$, $b(v_0) \in L_1(B_r)$. Пусть $w \in \left(W_p^{1,0}(Q_r^T)\right)' + L_1(Q_r^T)$ и

$$\int_{Q^T} \varphi_t (b(v) - b(v_0)) dv dt + (w, \varphi)_{Q_r^T} = 0$$

при всех $\varphi \in C_0^1(Q_r^T)$.

Тогда

$$-(b(v)_t, \xi(v)\varphi)_{Q^T} = \int_{Q^T} \varphi_t \int_{v_0}^v \xi(r) db(r) dv dt$$

при всех ограниченных $\xi(s)$, монотонных и липшицевых таких, что $\xi(v) \in \mathring{W}_p^{1,0}(Q_r^T)$, и $\varphi \in C_0^1(Q^T)$.

Доказательство, проведенное в [9] (см. также [5]) для цилиндра D^T , без существенных изменений переносится на случай многообразий.

Докажем следующее утверждение. Если решение u задачи (17), (15), (16) существует в цилиндре $D_r^{T'}$, то существует решение v в цилиндре $D_r^{T'+\varepsilon(T')}$, совпадающее с u в цилиндре любой высоты $T < T'$.

Лемма 4. Пусть функция $u(x, t)$ — слабое решение задачи (17), (15), (16) в цилиндре $D_r^{T'}$. Тогда при всех $t \in [0, T']$

$$\int_{B_r} \sqrt{g} u(x, t) dx \leq \int_{B_r} \sqrt{g} u_0(x) dx.$$

Доказательство. Подставляя в (19) функцию $\phi = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi \in C_0^1[0, T']$, $\psi \in C_0^1(B_r)$, получаем

$$-\int_0^{T'} \varphi'(t) \int_{B_r} \sqrt{g} u(x, t) \psi dx dt = \int_{B_r} \sqrt{g} u_0(x) \varphi(0) \psi dx + \int_0^{T'} \varphi(t) \int_{B_r} (uG(u) - \hat{a}(x, u, \nabla u)) \cdot \nabla \psi dx dt.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность по t функции $\int_{B_r} \sqrt{g} u(x, t) \psi dx dt$, слабая непрерывность $\sqrt{g} u(x, t) \in C_w([0, T']; L_2(B_r))$ и равенство $u(0) = u_0$.

Пусть $H(r) = \min(1, \max(r, 0))$. Пользуясь леммой 3, подставим в (19) пробную функцию $\phi = H(\varepsilon^{-1}u)H(m(\tau - t))\psi$, где $\psi(x) = 1$ при $x \in B_r$, $\psi \in C_0^1(Q^T)$. Поскольку $\hat{a} \cdot \nabla H(\varepsilon^{-1}u) = \varepsilon^{-1}\chi(0 < u < \varepsilon)\hat{a} \cdot \nabla u \geq 0$, то после предельного перехода $m \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \sqrt{g} \int_{u_0}^{u(\tau)} H\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds dx &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \int_{B_r} uG(u) \cdot \nabla u \chi(0 < u < \varepsilon) dx dt \leq \\ &\leq \int_0^\tau \int_{B_r} \chi(0 < u < \varepsilon) |G(u) \cdot \nabla u| dx dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как мера множества $\{(x, t) \mid 0 < u(x, t) < \varepsilon\}$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, то интеграл в правой части исчезает после предельного перехода в (20). Поэтому

$$\int_{B_r} \sqrt{g} \int_{u_0}^{u(x, \tau)} \chi(s > 0) ds dx \leq 0.$$

□

Пользуясь условием (9) и леммой 4, находим

$$-\operatorname{div} G(u) = -\int_{B_r} \operatorname{div}(\sqrt{g(x)} X(y)) u(y, t) \sqrt{g(y)} dy \leq \int_{B_r} D_X \sqrt{g(y)} u(y, t) dy \leq \int_{B_r} \sqrt{g} u_0(y) dy \leq \mu, \quad (21)$$

где μ не зависит от r .

Лемма 5. Пусть u — решение задачи (17), (15), (16) в $D_r^{T'}$. Тогда функция $u(x, t)$ неотрицательна и

$$\|u(t)\|_{L_\infty(B_r)} \leq e^{\mu t} \|u_0\|_{L_\infty(B_r)}.$$

Доказательство. Сделав замену $u = ve^{\mu t}$ в тождестве (19), получим

$$\int_{D_r^{T'}} (\sqrt{g}(u_0 - ve^{\mu t})\phi_t + \nabla\phi \cdot (\hat{a}(u) - ve^{\mu t}G(u))) dxdt = 0.$$

После интегрирования по частям это соотношение примет вид

$$(\sqrt{g}v_t, e^{\mu t}\phi)_{D_r^{T'}} + \int_{D_r^{T'}} (\mu ve^{\mu t}\phi + \nabla\phi \cdot (\hat{a}(u) - ve^{\mu t}G(u))) dvdt = 0.$$

Подставим сюда $\phi = e^{-\mu t}v^{(k)}$, $v^{(k)} = \max(0, v - k)$. Учитывая, что

$$\nabla\phi \cdot \hat{a}(u) = e^{-\mu t}\nabla v^{(k)} \cdot \sqrt{g} \frac{(1 - |x|^2)^p}{2^p} |\nabla A_\varepsilon(u)|^{p-2} \nabla A_\varepsilon(u) \geq 0,$$

имеем

$$(v_t, v^{(k)})_{D_r^{T'}} + \int_{D_r^{T'}} (\mu v^{(k)}v - \nabla v^{(k)} \cdot vG(u)) dxdt \leq 0. \quad (22)$$

Заметим, что $v^{(k)}v_t = v^{(k)}(v^{(k)} + k)_t = v^{(k)}v_t^{(k)}$, $v\nabla v^{(k)} = (v^{(k)} + k)\nabla v^{(k)} = \nabla((v^{(k)})^2/2 + kv^{(k)})$. Поэтому в силу (21)

$$\int_{D_r^{T'}} \nabla v^{(k)} \cdot vG(u) dxdt = - \int_{D_r^{T'}} ((v^{(k)})^2/2 + kv^{(k)}) \operatorname{div} G(u) dxdt \leq \mu \int_{D_r^{T'}} ((v^{(k)})^2/2 + kv^{(k)}) dxdt.$$

Тогда из (22), выбрав $k = \|v(0)\|_{L_\infty(B_r)}$, $v^{(k)}(0) = 0$, получаем

$$\int_{B_r} \sqrt{g}(v^{(k)}(T'))^2/2 dx + \mu \int_{D_r^{T'}} (vv^{(k)} - (v^{(k)})^2/2 - kv^{(k)}) dxdt \leq 0.$$

Отсюда $v^{(k)} \equiv 0$ или $v \leq k$. □

Пусть решение задачи существует в цилиндре $D_r^{T'}$. Положим

$$\rho = 3 \exp(\mu T') M_0, \quad \widetilde{M}_0 = \rho/3.$$

По лемме 5 имеем неравенство $\|u\|_{\infty, D_r^{T'}} \leq \rho/3$. Пусть $T_1 = T(C_d(\rho), C_G(\rho)) = 2\varepsilon$ определяется как в лемме 2, и v — решение задачи (17), (15), (16) в цилиндре $(D_r)_{T''}^{T''+T_1}$, $T'' \in (0, T')$, с начальной функцией $v(x, T'') = u(x, T'')$. Существование этого решения следует из леммы 2. Запишем для v тождество (19) с пробной функцией $\phi \in C_0^1(D_r^{T''+T_1})$ в виде

$$\int_{B_r \times (T'', T''+T_1)} (-v\phi_t + \nabla\phi \cdot (\hat{a}(v) - vG(v))) dxdt = \int_{B_r} u(x, T'')\phi(x, T'') dx. \quad (23)$$

Пользуясь слабой непрерывностью функции u , из (19) для u нетрудно вывести равенство

$$\int_{D_r^{T''}} (-u\phi_t + \nabla\phi \cdot (\hat{a}(u) - uG(u))) dxdt = - \int_{B_r} u(x, T'')\phi(x, T'') dx + \int_{B_r} u_0(x)\phi(x, 0) dx. \quad (24)$$

Доопределим функцию v , полагая $v = u$ в $D_r^{T''}$. Складывая (23), (24) устанавливаем, что v является решением задачи в $D_r^{T''+T_1}$. Выбирая T'' так, чтобы $T''+T_1 > T' + \varepsilon$, устанавливаем справедливость сформулированного перед леммой 4 утверждения.

Пусть $\tilde{v}$ — решение задачи в цилиндре $D_r^{\tilde{T}}$, совпадающее с решением u при $t \leq T' - \delta$, $\delta > 0$. Пусть $T^* = \sup \tilde{T}$ по всем таким $\tilde{v}$. Покажем, что $T^* = \infty$. От противного, если T^* — конечное число, то существует $\tilde{T} > T^* - \varepsilon(T^*)$. По доказанному утверждению существует решение задачи $\bar{v}$ в цилиндре $D_r^{\tilde{T} + \varepsilon(T^*)}$, совпадающее с $\tilde{v}$ при $t \leq \tilde{T} - \delta$. Неравенство $\tilde{T} + \varepsilon(T^*) > T^*$ противоречит определению супремума. Легко видеть, что тогда существует решение задачи в D_r^∞ . Теорема 2 доказана.

Решение задачи (11)–(13) при $r = 1 - \varepsilon$, существование которого следует из теоремы 2, продолжим нулем вне $D_{1-\varepsilon}^T$ и обозначим через u_ε . Для него выполнено равенство

$$\int_{Q^T} ((-u_\varepsilon)\varphi_t + \langle a_\varepsilon(u_\varepsilon) - u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon), d\varphi \rangle) d\nu dt = \int_{\mathbb{H}^n} u_0 \varphi(x, 0) d\nu \quad (25)$$

при всех $\varphi \in C_0^1(D_r^T)$. Подставляя сюда $\varphi = \alpha(t)w(x)$, $\alpha \in C_0^1(0, T)$, $w \in C_0^1(B_{1-\varepsilon})$, устанавливаем, что функция $\int_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon(t)w d\nu$ абсолютно непрерывна.

Далее всюду будем предполагать, что $r < 1 - \varepsilon$.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство неотрицательных функций из $L_\infty(B_r)$, $r \in (0, 1)$, таких, что

$$\|A(f)\|_{W_p^1(B_r)} \leq M \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_\infty(B_r)} \leq M \quad \text{для любого} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Тогда существует неубывающая функция $\omega_M(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ такая, что если для функций $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ выполнено неравенство

$$\int_{B_r} (A(f_2) - A(f_1))(f_2 - f_1) dx \leq \delta,$$

$$\text{то} \quad \|A(f_2) - A(f_1)\|_{L_1(B_r)} \leq \omega_M(\delta).$$

Доказательство леммы имеется в [3].

Лемма 7. Пусть $u_\varepsilon \in L_\infty(Q^T)$ — слабое решение задачи (11)–(13). Тогда существует функция $C(r)$ такая, что при $r < 1 - \varepsilon$ справедлива оценка

$$\|\nabla A_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{p, D_r^T} \leq C(r).$$

Доказательство. Из (25) и леммы 3 при $b(r) = r$ получаем соотношение

$$\int_{Q^T} \left(\varphi_t \int_{u_0}^{u_\varepsilon} \xi(r) dr - \langle (|\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^{p-2} \nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon) - u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon)), d(\varphi \xi(u_\varepsilon)) \rangle \right) d\nu dt = 0. \quad (26)$$

По теореме 2 имеем $0 \leq u_\varepsilon \leq \rho$, $\rho = M_0 \exp(cT)$. Тогда $A_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq A(\rho) + \rho$, $\varepsilon \in (0, 1)$, и функцию $A_\varepsilon(s)$ временно можно считать ограниченной числом $A(\rho) + \rho$. Подставим в (26) $\xi(s) = A_\varepsilon(s)$, $\varphi \in C_0^1(D_{r'}^T)$, $r' = 1 - (1 - r)/2$. Вводя обозначение $S_\varepsilon(v) = \int_0^v A_\varepsilon(s) ds$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q^T} (\varphi_t (S_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - S_\varepsilon(u_0)) - \varphi |\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^p - \\ & - \langle a_\varepsilon(u_\varepsilon), A_\varepsilon(u_\varepsilon) d\varphi \rangle + \langle u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon), d(\varphi A_\varepsilon(u_\varepsilon)) \rangle) d\nu dt = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу (6), (10) имеем

$$|\langle u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon), d(\varphi A_\varepsilon(u_\varepsilon)) \rangle| \leq C(r', \rho) (|\varphi \nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g + |\nabla_g \varphi|_g).$$

Положим $\varphi = z^p$, $z \in C_0^1(D_r^T)$, $0 \leq z \leq 1$, $z_t \leq 0$. Используя неравенство Юнга, запишем соотношения

$$|\langle a_\varepsilon(u_\varepsilon), A_\varepsilon(u_\varepsilon) d\varphi \rangle| \leq C(\rho) |\langle a_\varepsilon(u_\varepsilon), z^{p-1} dz \rangle| \leq \frac{1}{2} \varphi |\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^p + C |\nabla_g z|_g^p.$$

Теперь из (27) нетрудно вывести неравенство

$$\int_{Q_r^T} \frac{1}{4} \varphi |\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^p d\nu dt \leq C(r, \rho) \left(1 + \int_{Q_r^T} |\nabla_g z|_g^p d\nu dt \right).$$

Выбирая функцию z так, чтобы $z = 1$ при $x \in B_r$, выводим $\|\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{p, Q_r^T} \leq C(r)$. Пользуясь (6), получим неравенство леммы. $\square$

Ниже используется обозначение $\varphi|_t^\tau = \varphi(\tau) - \varphi(t)$.

Лемма 8. Пусть $\eta(x) \in C_0^1(B_r)$ — неотрицательная функция. Справедливо неравенство

$$\int_0^{T-h} \int_{\mathfrak{B}_\varepsilon} \eta(x) u_\varepsilon|_t^{t+h} A(u_\varepsilon)|_t^{t+h} d\nu dt \leq C(r)h \quad (28)$$

для всех $\varepsilon > 0$ и $h \in [0, T/2]$.

Доказательство. Подставим в (25) $\varphi = (\alpha(t)w(x))_{-h}$, $\alpha \in C_0^1(0, T)$, $w(x) \in C_0^1(B_r)$. Пользуясь свойствами осреднения Стеклова имеем

$$\int_{Q^T} ((u_\varepsilon)_{ht} \alpha w + \alpha \langle (a_\varepsilon(u_\varepsilon))_h - (u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon))_h, dw \rangle) d\nu dt = 0.$$

После предельного перехода по последовательности $\alpha_k \rightarrow \delta(t - t_0)$ получим

$$h^{-1} \int_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon|_{t_0}^{t_0+h} w d\nu = \int_{\mathbb{H}^n} \langle -(a_\varepsilon(u_\varepsilon))_h(t_0) + (u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon))_h(t_0), dw \rangle d\nu.$$

Подставим в эту формулу $w(x) = \eta(x)A(u_\varepsilon)|_{t_0}^{t_0+h}$, $\eta(x) \in C_0^1(B_r)$. После интегрирования по $t_0 \in (0, T - h)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_0^{T-h}} \eta(x) u_\varepsilon|_t^{t+h} A(u_\varepsilon)|_t^{t+h} d\nu dt &= h \int_{\mathbb{H}^n} \left\langle -(|\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^{p-2} \nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon))_h + \right. \\ &\quad \left. + (u_\varepsilon \mathcal{G}(u_\varepsilon))_h, d \left(\eta(x) A(u_\varepsilon)|_t^{t+h} \right) \right\rangle d\nu dt \leq \\ &\leq Ch (\|\nabla_g A(u_\varepsilon)\|_{p, Q^T} + \|\nabla_g \eta\|_{p, Q^T}) (\|\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{p, Q^T} + C_G(r)). \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (28). $\square$

Лемма 9. Семейство $\{z_\varepsilon = A(u_\varepsilon)\}$ компактно в $L_1(D_r^T)$.

Доказательство леммы имеется в [3] и опирается на леммы 7, 8.

В силу леммы 9 и возрастания функции A можно выделить последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ такую, что $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ п.в. в B_r . В силу произвольности $r \in (0, 1)$ можно считать также, что $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ п.в. в B_1 . Это вместе с ограниченностью последовательности u_{ε_k} в $L_\infty(Q_r^T)$ влечет сходимость $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ $L_p(Q_r^T)$ при любых $p \geq 1$ и $r < 1$. Из леммы 7 следует ограниченность $\|a_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{\bar{p}, Q_r^T} \leq C$, поэтому можно считать, что $a_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \rightarrow v$ слабо в $L_{\bar{p}}(Q_r^T)$

при $k \rightarrow \infty$, $\nabla_g A_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \rightarrow \nabla_g A(u)$ слабо в $L_p(Q_r^T)$. Из леммы 1 также имеем равномерную сходимость

$$\mathcal{G}(u_{\varepsilon_k}) \rightrightarrows \mathcal{G}(u) \text{ в } B_r, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому $u_{\varepsilon_k} \mathcal{G}(u_{\varepsilon_k}) \rightarrow u \mathcal{G}(u)$ в $L_p(Q_r^T)$.

Предельный переход в (25) при $\varepsilon_k \rightarrow 0$ приводит к соотношению

$$\int_{Q^T} ((-u)\varphi_t + \langle v - u \mathcal{G}(u), d\varphi \rangle) d\nu dt = \int_{\mathbb{H}^n} u_0 \varphi(x, 0) d\nu \quad (29)$$

при всех $\varphi \in C_0^1(Q^T)$. Применяя лемму 3, из (29) получаем

$$\int_{Q^T} \left(\varphi_t \int_{u_0}^u \xi(r) dr - \langle v - u \mathcal{G}(u), d(\varphi \xi(u)) \rangle \right) d\nu dt = 0. \quad (30)$$

Выбирая в (30) $\varphi = \alpha(t)\eta(x)$, $\alpha \in C_0^1(0, T)$, $\xi(s) = A(s)$, имеем

$$\int_{Q^T} (\eta(x)\alpha_t S_0(u(t)) - \langle v - u \mathcal{G}(u), \alpha d(\eta(x)A(u)) \rangle) d\nu dt = 0, \quad (31)$$

где $S_0 = S_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$. Полагая в (27) $\varphi = \alpha\eta(x)$, и переходя к пределу по $\varepsilon_k \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{Q^T} (\eta(x)\alpha_t S_0(u(t)) + \langle u \mathcal{G}(u), d(\alpha\eta(x)A(u)) \rangle - \langle v, \alpha A(u) d\eta(x) \rangle) d\nu dt = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q^T} \alpha\eta(x) |\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^p d\nu dt. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее с (31), устанавливаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q^T} \alpha\eta(x) |\nabla_g A_\varepsilon(u_\varepsilon)|_g^p d\nu dt = \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle v, dA(u) \rangle d\nu dt. \quad (32)$$

В силу монотонности $a_\varepsilon(u_\varepsilon)$ для $w \in W_p^{1,0}(Q^T)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle (a_\varepsilon(u_\varepsilon) - |\nabla_g w|_g^{p-2} \nabla_g w), d(A_\varepsilon(u_\varepsilon) - w) \rangle d\nu dt = \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle a_\varepsilon(u_\varepsilon), dA_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle d\nu dt - \\ - \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle (a_\varepsilon(u_\varepsilon), dw) \rangle d\nu dt - \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle (|\nabla_g w|_g^{p-2} \nabla_g w, d(A_\varepsilon(u_\varepsilon) - w)) \rangle d\nu dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и используя (32), получим

$$0 \leq \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle (v - |\nabla_g w|_g^{p-2} \nabla_g w, d(A(u) - w)) \rangle d\nu dt.$$

Подставляя сюда $w = A(u) - \varepsilon z$, $z \in W_p^{1,0}(Q^T)$, деля на ε , и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, находим, что

$$0 \leq \int_{Q^T} \alpha\eta(x) \langle (v - |\nabla_g(A(u))|_g^{p-2} \nabla_g(A(u)), dz) \rangle d\nu dt$$

при любом z и любом $\eta \in C_0^1(B_r)$, $\alpha \in C_0^1(0, T)$, $\alpha \geq 0$. Это возможно лишь при

$$\langle (v - |\nabla_g(A(u))|_g^{p-2} \nabla_g(A(u)), dz) \rangle \equiv 0.$$

Тогда (29) означает, что u — слабое решение задачи (4), (5).

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Punzo F. *Well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations with variable density in the hyperbolic space*, Nonlinear Diff. Equat. and Appl. **19**, 485–501 (2012).
- [2] Bertozzi A., Slepcev D. *Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion*, Comm. Pur. Appl. Anal., **9** (6), 1617–1637 (2010).
- [3] Вильданова В.Ф. *Существование и единственность слабого решения нелокального уравнения агрегации с вырождающейся диффузией общего вида*, Матем. сб., **209** (2), 66–81 (2018).
- [4] Kamin Sh., Pozio M.A., Tesei A. *Admissible conditions for parabolic equations degenerating at infinity*, Алгебра и анализ, **19** (2), 105–121 (2007).
- [5] Carrillo J., Wittbold P. *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems*, J. Diff. Equat., **156**, 93–121 (1999).
- [6] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике* (Наука, М., 1988).
- [7] Вильданова В.Ф., Мукминов Ф.Х. *Существование слабого решения интегро-дифференциального уравнения агрегации*, Совр. пробл. матем. Фундамент. направления, **63** (4), 557–572 (2017).
- [8] Вильданова В.Ф. *Существование и единственность слабого решения интегро-дифференциального уравнения агрегации на римановом многообразии*, Матем. сб., **211** (2), 74–105 (2020).
- [9] Мукминов Ф.Х. *Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича*, Матем. сб., **208** (8), 1187–1206 (2017).

Венера Фидарисовна Вильданова

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, д.3а, г. Уфа, 450008, Россия,

e-mail: gilvenera@mail.ru

V.F. Vil'danova

Existence of a solution to the Cauchy problem for the aggregation equation in hyperbolic space

Abstract. In hyperbolic space, we consider the Cauchy problem for the aggregation equation. Non-negative initial function limited and summable. The existence of a weak solution is proved on small time interval. In the case where the kernel of the integral operator is smooth and rapidly decreases at infinity, the existence of a bounded solution on an arbitrary interval of time is proved.

Keywords: the aggregation equation, solution existence, hyperbolic space.

Venera Fidarosovna Vil'danova

Bashkir State Pedagogical University of M. Akmulla,
3a Oktyabrskoj Revoljucii str., Ufa, 450008 Russia,

e-mail: gilvenera@mail.ru