Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Н. Гарифьянов, Е. В. Стрежнева, Суммарно-разностное уравнение для аналитических функций, порожденное шестиугольником, и его приложения, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 56–62

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-56-62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:53:08

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

СУММАРНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННОЕ ШЕСТИУГОЛЬНИКОМ, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. Пусть D — шестиугольник, имеющий две равные и параллельные стороны и L — половина его границы. Рассматривается суммарно — разностное уравнение в классе функций, голоморфных вне L и исчезающих на бесконечности. Их граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте, не содержащем узлов. В узлах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Для регуляризации уравнения на границе шестиугольника вводится кусочно-линейный сдвиг Карлемана, у которого в вершинах точки разрыва первого рода. Решение ищется в виде интеграла типа Коши по L с неизвестной плотностью. Найдены условия, при которых данная регуляризация является равносильной. Рассмотрен частный случай, где удается показать, что полученное уравнение Фредгольма разрешимо. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). В частности, построена система ц.ф.э.т., биортогональная с кусочно-квазиполиномиальным весом системе степеней на трех лучах. Сопряженной индикаторной диаграммой таких ц.ф.э.т. является некоторый восьмиугольник. Возможны различные обобщения полученных результатов, поскольку в выборе множества L имеется значительный произвол.

Ключевые слова: равносильная регуляризация, задача Карлемана, моменты целых функций.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-56-62

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривались разностные уравнения, порожденные правильным шестиугольником (фундаментальным множеством некоторой двоякопериодической группы). При этом существенно использовалось известное ядро Т. Карлемана [2]. Обзор работ по данной тематике и подробная библиография приведены в [3]. Заметим, что предложенный в [1] метод регуляризации применим и к более общим разностным уравнениям, порожденным шестиугольником, имеющим три пары равных и параллельных сторон.

Возникает естественный вопрос: как обобщить результаты из [1] на случай шестиугольника, имеющего только две параллельные и равные стороны? Какие приложения при этом возникают? Сразу отметим, что использование аналога ядра Карлемана приводит уже не к разностным, как в [1], а к суммарно-разностным уравнениям. Похожая ситуация рассматривалась в [4] при переходе от параллелограмма к произвольному четырехугольнику. Следует отметить также работу [5], где предложен метод регуляризации суммарно-разностного уравнения, индуцированного пятиугольником, у которого две стороны параллельны и равны.

Поступила в редакцию 03.09.2019, после доработки 29.10.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

В разделе 1 дана постановка задачи и указан метод регуляризации суммарно-разностного уравнения. В разделе 2 рассмотрен один частный случай, когда уравнение удается исследовать полностью. В разделе 3 приведены приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.).

1. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Пусть D — выпуклый шестиугольник с вершинами t_j , $j = \overline{1, 6}$, и сторонами ℓ_j , взятыми в порядке положительно ориентированной границы $\Gamma = \partial D$ (ℓ_1 — отрезок с концами t_1 и t_2). При этом стороны ℓ_1 и ℓ_4 параллельны и равны. Введем преобразования

$$\sigma_j(z) = t_j + t_{j+1} - z, \quad j = 2, 3, 5, 6; \quad t_7 = t_1 \quad (1)$$

и $\sigma_1(z) = z + t_4 - t_2$, $\sigma_4 = \sigma_1^{-1}$. Каждая из областей $\sigma_j(D)$, $j = \overline{1, 6}$, имеет с областью D общую сторону, причем множество областей $\sigma_j(D)$ покрывает окрестность области D без пропусков и наложений. Поскольку преобразования $\sigma_j(t): \Gamma \rightarrow \Gamma$, $j = \overline{1, 6}$, с изменением ориентации, то кусочно-линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in \ell_j; j = \overline{1, 6}\}$ является на Γ обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах. Пусть L — «половина» Γ , удовлетворяющая двум условиям. Во-первых, $L \cup \alpha(L) = \Gamma$, во-вторых, $L \cap \alpha(L) = \emptyset$. Эти равенства понимаются с точностью до узлов L и вершин D (более подробно см. [3]).

Рассмотрим уравнение

$$(Vf)(z) \equiv f(z) + \sum_{j=1}^6 f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D, \quad (2)$$

при следующих предположениях.

1) Решение $f(z)$ ищется в классе функций, голоморфных вне L и исчезающих на бесконечности. В узлах L допускаются логарифмические особенности, причем граничные значения $f^\pm(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте $\bar{d} \in L$, не содержащем узлов. Такой класс обозначим через B .

2) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+(t) \in H(\Gamma)$.

Будем искать решение уравнения (2) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (3)$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau) \in H_0(L)$ ([6]).

Тогда из уравнения (2) получим

$$(E\varphi)(z) \equiv \int_L A(z, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \quad (4)$$

где $A(z, \tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_{j=1}^6 (\tau - \sigma_j(z))^{-1}$. Переходя в соотношении (4) к пределу по $z \rightarrow t \in L$, имеем

$$(E^+ \varphi)(t) \equiv 2^{-1} \varphi(t) + (E\varphi)(t) = g^+(t), \quad (5)$$

где особый интеграл $(E\varphi)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. Взяв в (4) предел по $z \rightarrow \alpha(t)$, получим

$$(E^+ \varphi)(\alpha(t)) \equiv -2^{-1} \varphi(t) + (E\varphi)(\alpha(t)) = g^+(\alpha(t)). \quad (6)$$

Вычитая из (5) равенство (6), имеем

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g^+(t) - g^+[\alpha(t)], \quad (7)$$

где $K(t, \tau) = A(t, \tau) - A(\alpha(t), \tau)$.

Теорема 1. Уравнение (7) является уравнением Фредгольма второго рода.

Доказательство сводится к проверке ограниченности ядра $K(t, \tau)$ путем перебора всех возможных вариантов расположения точки t на сторонах шестиугольника. Заметим, что ограниченность ядра сохраняется и в вершинах, однако в них возможен разрыв первого рода по каждой из переменных. $\square$

Теорема 2. Уравнение (2) в классе B имеет не более, чем конечное число условий разрешимости.

Доказательство. Пусть уравнение (7) разрешимо. Тогда

$$(E^+\varphi)(t) - g^+(t) = (E^+\varphi)(\alpha(t)) - g^+(\alpha(t)) \Rightarrow (E\varphi)(z) = g(z) + C, \quad z \in D.$$

При выполнении условия $(E\varphi)(z_0) = g(z_0)$, где $z_0 \in D$, функция $f(z)$ вида (3) будет искомым решением уравнения (2). $\square$

Замечание 1. Пусть уравнение (2) разрешимо. По функции $g(z) \neq \text{const}$ можно подобрать такую постоянную C_g , что уравнение $(Vf)(z) = g(z) + C_g$, $z \in D$ уже разрешимо.

Замечание 2. В уравнение (2) не входят преобразования, переводящие D в шестиугольники, имеющие с исходным общую вершину. Этим оно выгодно отличается от случая пятиугольника, рассмотренного в [5]. В уравнение (2) из [5] входят два слагаемых, соответствующих таким преобразованиям. При их исключении не удастся провести регуляризацию полученного уравнения.

Замечание 3. Нетривиальность уравнения (2) обусловлена несвязностью множества

$$C \setminus \bigcup_{j=1}^6 \sigma_j(D)$$

(см. также раздел 3).

2. Полное исследование одного частного случая

Полное исследование уравнения (2) удастся провести, например, в частном случае, когда D — шестиугольник с вершинами $t_1 = -1 - 2i$, $t_2 = 1 - 2i$, $t_3 = 2$, $t_4 = 1 + 2i$, $t_5 = 2i - 1$, $t_6 = -3$. Положим

$$L = \bigcup_{j=1}^6 d_j; \quad d_1 = \ell_1, \quad d_2 = \left(1 - 2i, \frac{3}{2} - i\right), \quad d_3 = \left(\frac{3}{2} + i, 1 + 2i\right), \quad d_4 = \emptyset,$$

$$d_5 = (2i - 1, i - 2), \quad d_6 = (-i - 2, -1 - 2i).$$

Преобразования $\sigma_j(z)$, $j = \overline{1, 6}$, имеют вид

$$\sigma_1(z) = z + 4i, \quad \sigma_2(z) = 3 - 2i - z, \quad \sigma_3(z) = 3 + 2i - z, \quad \sigma_4(z) = z - 4i, \quad \sigma_5(z) = 2i - 4 - z, \\ \sigma_6(z) = -2i - 4 - z.$$

Замечание 4. При выборе множества L имеется некоторый произвол. Но в любом случае его замыкание содержит середины сторон ℓ_j , $j = 2, 3, 5, 6$ (неподвижные точки сдвига) и не менее четырех вершин D .

Лемма. Однородное уравнение

$$T\varphi = 0 \quad (8)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим противное. Введем банахово пространство $\tilde{C}$ — множество функций $\varphi(t) \in C(\overline{d_j})$, $j = \overline{1, 6}$, с нормой $M = \max |\varphi(\tilde{t})|$, $\tilde{t} \in \overline{L}$.

Обозначим $b_j = |d_j| \max |K(\tilde{t}, \tau)|$, $\tau \in \overline{d_j}$, $j = \overline{1, 6}$. Для $M \neq 0$ имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^6 b_j \leq 2\pi. \quad (9)$$

Покажем, что (9) не выполняется. Для этого, учитывая, что $\tilde{t}$ может находиться на любом отрезке $\overline{d_j}$, $j = \overline{1, 6}$, необходимо оценить ядро $K(t, \tau)$, рассмотрев двадцать пять различных случаев расположения точек τ и t .

Напомним, что $d_4 = \emptyset$, $|d_2| = |d_3| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|d_1| = 2$, $|d_5| = |d_6| = \sqrt{2}$.

1) Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{t} \in \overline{d_1} \Rightarrow K(t, \tau) = (u + 4i)^{-1} + (v - 3 - 2i)^{-1} + (v + 4 - 2i)^{-1} - \\ - (u - 8i)^{-1} - (v + 6i - 3)^{-1} - (v + 4 + 6i)^{-1} \end{aligned}$$

(здесь и в дальнейшем $u = \tau - t$, $v = \tau + t$),

$$\text{a) } \tau \in d_1 \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq 0.34,$$

$$\text{b) } \tau \in d_2 \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq 0.34,$$

$$\text{c) } \tau \in d_3 \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq 0.34,$$

$$\text{d) } \tau \in d_5 \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq 0.3,$$

$$\text{e) } \tau \in d_6 \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq 0.3,$$

Итак, получили $\sum_{j=1}^6 b_j \leq 2.29 < 2\pi$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. Приведем лишь окончательные оценки.

$$\begin{aligned} \text{2) Пусть } \tilde{t} \in d_2 \Rightarrow K(t, \tau) = (u + 4i)^{-1} + (v + 4 - 2i)^{-1} + (v + 4 + 2i)^{-1} - \\ - (v - 3 + 6i)^{-1} - (u + 7 - 4i)^{-1} - (u + 7)^{-1}, \end{aligned}$$

тогда $\sum_{j=1}^6 b_j \leq 1.57$.

$$\begin{aligned} \text{3) Пусть } \tilde{t} \in d_3 \Rightarrow K(t, \tau) = (u - 4i)^{-1} + (v + 4 - 2i)^{-1} + (v + 4 + 2i)^{-1} - \\ - (v - 3 - 6i)^{-1} - (u + 7)^{-1} - (u + 7 + 4i)^{-1}, \end{aligned}$$

тогда $\sum_{j=1}^6 b_j \leq 1.33$.

$$4) \text{ Пусть } \tilde{t} \in d_5 \Rightarrow K(t, \tau) = (u - 4i)^{-1} + (v + 2i - 3)^{-1} + (v - 3 - 2i)^{-1} - \\ - (v + 4 - 6i)^{-1} - (u + 4i - 7)^{-1} - (u - 7)^{-1},$$

$$\text{тогда } \sum_{j=1}^6 b_j \leq 1.55.$$

$$5) \text{ Пусть } \tilde{t} \in d_6 \Rightarrow K(t, \tau) = (u + 4i)^{-1} + (v + 2i - 3)^{-1} + (v - 2i - 3)^{-1} - \\ - (v + 4 + 6i)^{-1} - (u - 7)^{-1} - (u - 7 - 4i)^{-1},$$

$$\text{тогда } \sum_{j=1}^6 b_j \leq 1.69.$$

Таким образом, оценка (9) не выполняется, откуда $\varphi(t) \equiv 0$. $\square$

Из леммы и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Однородное уравнение $(Vf)(z) = 0, z \in D$, имеет лишь тривиальное решение. Неоднородное уравнение $(Vf) = \text{const}, z \in D$, неразрешимо. При $g(z) \neq \text{const}$ неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда $(E\varphi)(0) = g(0)$. Здесь решение имеет вид (3), где $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t) - g^+(\alpha(t))]$.*

3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

В силу определения класса B решение $f(z)$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю с верхней функцией $F(z)$ — некоторой ц.ф.э.т. ([7], §1, 1.1). Ее сопряженной индикаторной диаграммой (наименьшим выпуклым множеством, содержащим все особенности нижней функции) будет, вообще говоря, восьмиугольник D_1 с вершинами $-1 - 2i, 1 - 2i, \frac{3}{2} \pm i, 2i + 1, 2i - 1, i - 2, -i - 2$, т. е. это выпуклая оболочка L .

Замечание 5. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является некоторое «меньшее» выпуклое множество $D_2 \subset D_1$, возможен, но не представляет большого интереса. Дело в том, что тогда уравнение (2) переопределено. Оно выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом свободный член $g(z)$ должен быть аналитически продолжим из D в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Если это выполнимо, то получим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами относительно четной функции $\theta_1(z) = f(z) + f(-z)$ и другое уравнение относительно нечетной функции $\theta_2(z) = f(z) - f(-z)$, т. е. найдем решение в явном виде, используя преобразование Бореля (более подробно см. [1] или замечание 1 в [8]).

Считаем теперь, что свободный член $g(z)$ удовлетворяет двум условиям. Во-первых, разрешимо уравнение (2). Во-вторых, сопряженной индикаторной диаграммой нижней функции $f(z)$ является именно D_1 (рассматриваем только содержательный случай). Множество $D \setminus D_1$ распадается на два треугольника. Возьмем треугольник Δ с вершинами $1, 5 - i, 2, 1, 5 + i$ и пусть $z \in \Delta$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Delta$ и рассмотрим систему функций

$$\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty} : (Vf_m)(z) = (m!)^{-1}(z - z_0)^m + C_m. \quad (10)$$

При надлежащем выборе постоянных C_m оба условия, наложенных на свободный член соблюдены. Перепишем уравнения, определяющие систему функций (10), в терминах ц.ф.э.т. Тогда при $z \in \Delta$ имеем

$$\begin{aligned} H(F, z) &\equiv \int_0^\infty F(x) [\exp(-zx) + \exp(-\sigma_1(z)x) + \exp(-\sigma_4(z)x)] dx + \\ &+ \int_0^\infty F(x) [\exp(-x\sigma_5(z)) + \exp(-x\sigma_6(z))] dx + \sum_{j=2}^3 \int_{\theta_j} F(\tau) \exp(-\sigma_j(z)\tau) d\tau = \\ &= (m!)^{-1} (z - z_0)^m + C_m, \end{aligned}$$

где θ_j — луч $\arg \tau = (-1)^j \arctg \frac{1}{2}$, $j = 2, 3$.

Приравнявая коэффициенты Тейлора в точке z_0 левой и правой части, получим

$$\left. \frac{d^k H(F, z)}{dz^k} \right|_{z=z_0} = \delta_{m,k}, \quad m, k = \overline{1, \infty}. \quad (11)$$

Теорема 4. Проблема моментов (11) на четырех лучах в классе ц.ф.э.т., ассоциированных по Борелю с нижними функциями $f(z) \in B$, безусловно разрешима и имеет единственное решение.

Обсудим, в каких направлениях можно обобщать эту задачу.

1) Положим

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} (z - z_0)^k + \beta_0.$$

Здесь радиус сходимости ряда $R > |z_0 + 3|$, что обеспечивает голоморфность свободного члена в $\bar{D}$, а постоянная β_0 подобрана так, чтобы задача (2) была разрешима.

2) Уже отмечалось, что в выборе L есть некоторый произвол (см. замечание 4). За счет этого можно решать похожие интерполяционные задачи в классе ц.ф.э.т., у которых другая сопряженная индикаторная диаграмма (более подробно см. [1]).

3) Если множество L выбрано так, что $D_1 = D$, то возникает неклассическая интерполяционная задача теории ц.ф.э.т. (см., например, [1] и [9]). Так, в последней работе возникла задача о восстановлении ц.ф.э.т. по линейным соотношениям, связывающим коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стильтьеса верхней относительно некоторого экспоненциального веса. При этом нижняя функция голоморфна на связной компоненте, содержащей точки 0 и ∞ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В. Интерполяционные задачи для целых функций, индуцированные правильным шестиугольником, Сиб. матем. журн., **59**, №1, 78–85 (2018).
- [2] Carleman T. Sur le théorie des équations intégrales et ses applications, Verh. Internat. Math. Kongr., 1, Zurich, 138–151 (1932).
- [3] Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А. Ядро Карлемана и его приложения, Сиб. матем. журн., **53**, №6, 1263–1273 (2012).
- [4] Гарифьянов Ф.Н. Полиэлементные уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами, Сиб. матем. журн., **57**, №2, 276–281 (2016).
- [5] Aksenteva E.P., Garifyanov F.N. Sum-difference equation for analytic functions generated by pentagon and its application, Lobachevskii J. Math., **37** (2), 101–104 (2016).
- [6] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения (Наука, М., 1968).

- [7] Биберах Л. *Аналитическое продолжение* Перевод с нем. М. А. Евграфова (Наука, М., 1967).
- [8] Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А. *О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложениях*, Сиб. матем. журн., **52** (2), 243–249 (2011).
- [9] Гарифьянов Ф.Н., Кац Д.Б. *Об одном уравнении с ядром Т. Карлемана и его приложениях к проблеме моментов*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. физ.-матем. науки, **154** (3), 112–120 (2012).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева

Казанский национальный исследовательский университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,
e-mail: strezh@yandex.ru

F.N. Garif'yanov and E.V. Strezhneva

Sum-difference equation for analytic functions, generated by a hexagon, and its applications

Abstract. For analytic functions, we study the polyelement functional linear equation generated by a hexagon having a pair of parallel and equal sides. Such equations are related to the problem of moments for entire functions of exponential type.

Keywords: equivalent regularization, Carleman's problem, moments of entire functions.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,
e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Elena Vasil'evna Strezhneva

Kazan National Research Technological University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marx str., Kazan, 420111 Russia,
e-mail: strezh@yandex.ru