Общероссийский математический портал

В. С. Денисенко, О технической устойчивости множеств траекторий дискретных систем, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 63–75

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-63-75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:25:08

В.С. ДЕНИСЕНКО

О ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. В работе рассматривается проблема технической (практической) устойчивости множества траекторий дискретных систем в метрическом пространстве непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. На основе известных результатов геометрии выпуклых тел и метода сравнения предложен способ построения вспомогательных функционалов Ляпунова для исследования технической устойчивости по двум мерам эволюционных уравнений с разностным оператором Хукухары. Задача об оценках решений уравнений сведена к исследованию конечномерных разностных уравнений сравнения. Приведены примеры исследования технической устойчивости, которые демонстрируют конструктивность предложенного подхода.

Ключевые слова: техническая устойчивость по двум мерам, метод сравнения, смешанный объем, функционал Ляпунова, множество дискретных систем, оператор Хукухары.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-63-75

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные и разностные уравнения относительно многозначных отображений тесно связаны с теорией управления динамическими системами и многозначным анализом. Впервые понятие дифференциального уравнения с производной Хукухары было введено в работе [1] как обобщение обычного дифференциального уравнения для многозначного случая. Систематические исследования вопросов теории дифференциальных уравнений с производной Хукухары в банаховых пространствах отражены в работе [2]. Вопросы качественного анализа, включая прямой метод Ляпунова и метод сравнения для уравнений с производной и разностью Хукухары изложены в монографии [3]. Результаты исследования таких дифференциальных уравнений нашли приложения при анализе свойств множества достижимости обычного дифференциального включения в банаховом пространстве [2], свойств решений нечеткого дифференциального уравнения [4], а также при исследовании динамики неточных систем. В работе [5] было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары как обобщение обычного дифференциального включения и дифференциального уравнения с производной Хукухары. Следует отметить, что использование классического определения устойчивости по Ляпунову для дифференциальных уравнений с производной Хукухары затруднительно вследствие того, что диаметр выпуклого множества (решение уравнения с дифференциальным или разностным оператором

Поступила в редакцию 17.04.2019, после доработки 09.12.2019. Принята к публикации 25.03.2020.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U004691).

Хукухары) является неубывающей функцией времени. Поэтому целесообразным является исследование технической (практической) устойчивости для этого класса уравнений. Понятие технической устойчивости восходит к классическим работам Н.Д. Моисеева [6], [7], Н.Г. Четаева [8]. Техническая устойчивость на конечном интервале времени означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий. Основные результаты, посвященные развитию метода Ляпунова и метода сравнения для задач технической устойчивости приведены в работах [9]–[11].

В работах [12], [13] предложен новый подход к качественному анализу динамических свойств решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары с использованием геометрии выпуклых тел и метода сравнения, на основе которого получены оценки объема решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

В настоящей работе развиваются основные идеи [14] для задач о технической устойчивости множеств разностных уравнений. При этом использование результатов геометрии выпуклых тел, полученных в классических работах Г. Минковского и А.Д. Александрова для исследования технической устойчивости по двум мерам эволюционных уравнений с разностным оператором Хукухары, позволяет свести задачу об оценках множества решений уравнений к исследованию конечномерных разностных уравнений сравнения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ метрическое пространство непустых выпуклых компактов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$d_H(u, v) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid u \subset v + \varepsilon K, \ v \subset u + \varepsilon K\}, \quad u, v \in \mathbb{R}^n,$$

где $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $\|\cdot\|$ – норма Евклида. В этом пространстве можно определить операции сложения двух множеств A, B и умножения на неотрицательный скаляр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ по формулам

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, \ y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

Если $A \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то $A + B \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda A \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $u \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, тогда если существует элемент $w \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $u = w + v$, то элемент w называется разностью Хукухары элементов u и v . При этом $w = u - v$. Разность двух элементов пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ существует не всегда. Понятие разности Хукухары позволяет определить понятие производной Хукухары для отображения $F : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Отображение $F : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если существует элемент $D_H F(t_0) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ такой, что пределы

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{F(t_0 + \varrho) - F(t_0)}{\varrho}, \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - \varrho)}{\varrho}$$

существуют и равны $D_H F(t_0)$. В этом случае $D_H F(t_0)$ называется производной Хукухары в точке t_0 .

Тогда можно рассматривать множество дифференциальных уравнений с производной Хукухары (Set Differential Equations)

$$D_H U = F(t, U), \quad U(t_0) = U_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n), \quad F : \mathbb{R}_+ \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n),$$

дискретизация которого может сгенерировать множество разностных уравнений вида

$$\Delta_H u_p = F_p(u_p), \quad (2.1)$$

где $u_p \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, Δ_H — разностный оператор Хукухары,

$$\Delta_H u_p = u_{p+1} - u_p,$$

$F_p \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \text{conv}(\mathbb{R}^n))$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Приведем необходимые для дальнейшего вспомогательные результаты, касающиеся теории смешанных объемов, следуя работам [15], [16].

Пусть $u_k \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = \overline{1, m}$, $u = \sum_{k=1}^m \lambda_k u_k \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Известно [16], что объем $V[u]$ выпуклого тела u будет однородным многочленом степени n относительно переменных λ_k

$$V[u] = \sum_{k_1, \dots, k_n} V_{k_1, \dots, k_n} \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_n},$$

где сумма берется по всем индексам $k_1, k_2, \dots, k_n$, пробегающим независимо все значения от 1 до m . Коэффициенты $V_{k_1, \dots, k_n}$ определяются при этом так, чтобы они не зависели от порядка индексов. Известно, что $V_{k_1, \dots, k_n}$ зависит только от тел $u_{k_1}, \dots, u_{k_n}$, поэтому естественно записывать его в виде $V[u_{k_1}, \dots, u_{k_n}]$. Коэффициенты $V[u_{k_1}, \dots, u_{k_n}]$ называются смешанными объемами.

Смешанный объем $V[u_1, \dots, u_n]$ является функционалом

1) линейным и положительно однородным по каждой переменной, т. е. для всех $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}_+$, $u_k \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $w_i \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$,

$$V[u_1, \dots, \lambda' w_1 + \lambda'' w_2, \dots, u_n] = \lambda' V[u_1, \dots, w_1, \dots, u_n] + \lambda'' V[u_1, \dots, w_2, \dots, u_n];$$

2) трансляционно-инвариантным и инвариантным относительно перестановки аргументов, а также непрерывным по совокупности переменных [16].

Из этих свойств выводится формула Штейнера

$$V[u_1 + \varrho u_2] = \sum_{k=0}^n C_n^k \varrho^k V_k[u_1, u_2], \quad \varrho \in \mathbb{R}_+,$$

где $V_k[u_1, u_2] = V[\underbrace{u_1, \dots, u_1}_n, \overbrace{u_2, \dots, u_2}^k]$ — k -й смешанный объем.

Из этой формулы следует, в частности, что

$$nV_1[u_1, u_2] = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V[u_1 + \varrho u_2] - V[u_1]}{\varrho}.$$

Из неравенства А.Д. Александрова [15]

$$V^2[u_1, \dots, u_{n-1}, u_n] \geq V[u_1, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_{n-1}]V[u_1, \dots, u_{n-2}, u_n, u_n]$$

следуют неравенства для функционалов $V_k[u_1, u_2]$

$$V_k^2[u_1, u_2] \geq V_{k-1}[u_1, u_2]V_{k+1}[u_1, u_2],$$

из которых выводятся оценки

$$V_k[u_1, u_2] \geq V^{(n-k)/n}[u_1]V^{k/n}[u_2].$$

Частным случаем последнего неравенства при $k = 1$ является изопериметрическое неравенство Брунна–Минковского.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ

Рассмотрим множество траекторий, которое описывается разностным уравнением (2.1).

Решением этого уравнения является множество достижимости u_p соответствующего разностного уравнения

$$x_{p+1} = G_p(x_p, y_p), \quad y_p \in Y_p(x_p).$$

Здесь $x_p \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $y_p \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, G_p — заданные функции на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $Y_p : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ — отображения, значения которых есть замкнутые множества в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Множества траекторий такой системы могут порождаться как параметрами, трактуемыми в качестве управлений, так и параметрами, трактуемыми как возмущения. Таким образом, управляемая система общего вида подвержена действию управляющих и неопределенных факторов. Для многих задач управляющие воздействия и ограничения на неконтролируемые возмущения могут носить только геометрический характер, т.е. в каждый момент времени их значения могут быть любыми из некоторых выпуклых компактных множеств пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

В этом случае актуальной задачей является построение и оценка множеств достижимости механических систем с управлением. Области достижимости приобретают смысл тех множеств, куда система может попасть под действием допустимых возмущений. Тем самым, области достижимости характеризуют отклонения траекторий под действием возмущений или точность, с которой можно предсказать движение возмущаемой системы. Фундаментальные результаты относительно построения и оценки множеств достижимости получены в монографии [17]. Отметим, что задача об оценках областей достижимости динамических систем связана также с теорией дифференциальных уравнений на метрических пространствах.

Рассмотрим вопрос о технической устойчивости уравнения (2.1). Поскольку фазовое пространство $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ разностного уравнения (2.1) бесконечномерно, то целесообразно рассматривать его устойчивость в терминах двух мер, которые выбираются исходя из геометрической природы элементов фазового пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$. В качестве мер естественно выбирать геометрические характеристики множеств траекторий: объем, площадь поверхности и другие. Приведем соответствующее определение.

Пусть $h_0 \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}_+)$, $h \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}_+)$ — меры начальных и текущих отклонений, удовлетворяющие условиям

$$\inf_{u \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)} h_0[u] = \inf_{u \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)} h[u] = 0.$$

Определение 3.1. Дискретное уравнение (2.1) при заданных оценках величин (λ, A, T) называется (h_0, h) -технически устойчивым, если для заданных $0 < \lambda < A$, $T \in \mathbb{Z}_+$ из условия $h_0[u_0] < \lambda$, $u_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, следует неравенство $h[u_p] < A$ при всех $p = \overline{0, T}$.

Целью настоящей работы являются исследования (h_0, h) -технической устойчивости $((\lambda, A, T)$ -устойчивости) множества дискретных уравнений (2.1).

Напомним понятие функции класса Хана, необходимое для дальнейшего изложения.

Определение 3.2. Функция $a(r)$ называется функцией класса Хана, если $a \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $a(r)$ возрастает, $a(0) = 0$, $a(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Для функционала $W \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R})$ определим разность вдоль решений системы уравнения (2.1)

$$\Delta W[u] = W[u + F_p(u)] - W[u].$$

Предположение 3.1. Предположим, что для разностного уравнения (2.1) существуют вспомогательные функционалы $W_i \in C(\text{conv}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}_+)$, $i = \overline{0, k}$, функции $f_p^i \in C(\mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}_+)$ и функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ класса Хана такие, что

1) при всех $u \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\Delta W_i[u + F_p(u)] \leq f_p^i(W_0[u], \dots, W_k[u]), \quad i = \overline{0, k};$$

2) правые части системы сравнения

$$\xi_{p+1}^i = \xi_p^i + f_p^i(\xi_p^0, \xi_p^1, \dots, \xi_p^k), \quad i = \overline{0, k}, \quad (3.1)$$

неубывают по переменным $\xi_p = (\xi_p^0, \dots, \xi_p^k)$;

3) выполняются неравенства

$$\max_{i=\overline{0, k}} W_i[u] \leq b(h_0[u]), \quad W_0[u] \geq a(h[u]).$$

Обозначим через $\xi_p(\xi_0)$ решение задачи Коши для системы сравнения (3.1).

Сформулируем общий результат относительно обобщения метода сравнения с векторной функцией Ляпунова для исследования технической устойчивости множества траекторий дискретных систем.

Теорема 3.1. *Предположим, что для разностного уравнения (2.1) выполняются условия предположения 3.1 и неравенство*

$$\max_{p=0, T} \xi_p^0(\lambda \mathbf{e}) < a(A),$$

где $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}_+^{k+1}$.

Тогда уравнение (2.1) является (h_0, h) -технически устойчивым.

Доказательство. Вследствие условия 2) предположения 3.1 решение задачи Коши для системы (3.1) неубывает по $\xi_0 \in \mathbb{R}_+^{k+1}$ относительно полуупорядоченности, введенной конусом $\mathbb{R}_+^{k+1}$. Используя метод математической индукции нетрудно показать, что

$$W_0[u_p] \leq \xi_p^0(\xi_0),$$

где $\xi_0 = (W_0[u], \dots, W_k[u_0])$. Пусть $u_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ выбрано так, чтобы $h[u_0] < \lambda$. Предположим, от противного, что для некоторого $p^* \in [0, T] \cap \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство $h[u_{p^*}] \geq A$, тогда вследствие предположения 3.1 и условий теоремы

$$\begin{aligned} a(A) &\leq a(h[u_{p^*}]) \leq W_0[u_{p^*}] \leq \xi_{p^*}(\xi_0) \leq \xi_{p^*}(\max_{i=\overline{0, k}} W_i[u_0] \mathbf{e}) \leq \xi_{p^*}^0(b(h_0[u_0]) \mathbf{e}) \leq \\ &\leq \xi_{p^*}(\lambda \mathbf{e}) \leq \max_{p=0, T} \xi_p^0(\lambda \mathbf{e}) < a(A). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К МНОЖЕСТВАМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим множество траекторий дискретных линейных систем

$$\Delta_H u_p = \mathbf{A} u_p + f, \quad (4.1)$$

где $u_p \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^2)$ — линейный ограниченный оператор в пространстве $\mathbb{R}^2$, $f \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$.

Рассмотрим вопрос о технической устойчивости разностного уравнения (4.1), приняв за меру текущих отклонений площадь множества $u \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$, т.е. $h[u] = S[u]$. В качестве мер начальных отклонений $h_0[u]$ будут выбраны некоторые функционалы, которые более

жестко ограничивают начальные условия (что является характерным для динамических систем в бесконечномерном пространстве), а также существенно учитывают асимметрию начальных условий.

Рассмотрим отдельно четыре случая.

Случай 1. Предположим, что $\text{tr } \mathbf{A} \geq 0$, $\det \mathbf{A} \leq 0$. В качестве вспомогательных функционалов выберем

$$W_0[u] = S[u], \quad W_1[u] = S[u, \mathbf{A}], \quad W_2[u] = S[u, f], \quad W_3[u] = S[\mathbf{A}u, f],$$

тогда, применяя формулу Штейнера, находим

$$W_0[u + \mathbf{A}u + f] = (1 + |\det \mathbf{A}|)W_0[u] + 2W_1[u] + 2W_2[u] + 2W_3[u] + S[f], \quad (4.2)$$

$$W_1[u + \mathbf{A}u + f] = |\det \mathbf{A}|W_0[u] + (1 + |\det \mathbf{A}|)W_1[u] + W_3[u] + W_4[u] + S[u, \mathbf{A}^2u] + S[\mathbf{A}^2u, f] + S[f, \mathbf{A}f]. \quad (4.3)$$

Для оценки функционалов $S[u, \mathbf{A}^2u]$ и $S[\mathbf{A}^2u, f]$ воспользуемся теоремой Гамильтона–Кели:

$$\mathbf{A}^2 - (\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{A} + (\det \mathbf{A})\mathbf{I} = 0.$$

Тогда вследствие монотонности функционала смешанной площади получим оценки

$$\begin{aligned} S[u, \mathbf{A}^2u] &\leq |\text{tr } \mathbf{A}|S[\mathbf{A}u, u] + |\det \mathbf{A}|S[u] = |\text{tr } \mathbf{A}|W_1[u] + |\det \mathbf{A}|W_0[u], \\ S[\mathbf{A}^2u, f] &\leq |\text{tr } \mathbf{A}|S[\mathbf{A}u, f] + |\det \mathbf{A}|S[u, f] = |\text{tr } \mathbf{A}|W_3[u] + |\det \mathbf{A}|W_2[u]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из этих оценок и равенства (4.3) следует

$$\begin{aligned} W_1[u + \mathbf{A}u + f] &\leq 2|\det \mathbf{A}|W_0[u] + (1 + |\det \mathbf{A}| + |\text{tr } \mathbf{A}|)W_1[u] + \\ &+ 2|\det \mathbf{A}|W_2[u] + (1 + |\text{tr } \mathbf{A}|)W_3[u] + W_4[u] + S[\mathbf{A}f, f]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично можно получить соотношения

$$W_2[u + \mathbf{A}u + f] = W_2[u] + W_3[u] + S[f], \quad (4.6)$$

$$W_3[u + \mathbf{A}u + f] = W_3[u] + S[\mathbf{A}^2u, f] + S[\mathbf{A}f, f]. \quad (4.7)$$

Вследствие (4.3)

$$W_3[u + \mathbf{A}u + f] \leq |\det \mathbf{A}|W_2[u] + (1 + |\text{tr } \mathbf{A}|)W_3[u] + S[\mathbf{A}f, f], \quad (4.8)$$

$$W_4[u + \mathbf{A}u + f] = |\det \mathbf{A}|W_2[u] + W_4[u] + S[\mathbf{A}f, f]. \quad (4.9)$$

Из (4.2), (4.5)–(4.9) следует, что в качестве меры начальных отклонений целесообразно выбрать функционал $h_0[u] = \max_{i=0,4} \{W_i[u]\}$, тогда система сравнения будет иметь вид

$$\xi_{p+1} = D\xi_p + d, \quad (4.10)$$

где $\xi_p \in \mathbb{R}^5$, $D \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, $d \in \mathbb{R}^5$, и ненулевые элементы матрицы D имеют вид

$$d_{11} = 1 + |\det \mathbf{A}|, \quad d_{12} = d_{13} = d_{14} = 2, \quad d_{21} = d_{23} = 2|\det \mathbf{A}|,$$

$$d_{22} = 1 + |\det \mathbf{A}| + |\text{tr } \mathbf{A}|, \quad d_{24} = d_{44} = 1 + |\text{tr } \mathbf{A}|,$$

$$d_{25} = d_{33} = d_{34} = d_{55} = 1, \quad d_{43} = d_{53} = |\det \mathbf{A}|.$$

$$d = (S[f], S[\mathbf{A}f, f], S[f], S[\mathbf{A}f, f], S[\mathbf{A}f, f])^T.$$

Случай 2. Предположим теперь, что $\text{tr } \mathbf{A} \leq 0$, $\det \mathbf{A} \leq 0$. В этом случае, кроме введенных выше функционалов $W_i[u]$, $i = \overline{0,4}$, возникает необходимость введения дополнительных функционалов

$$W_5[u] = S[u, -\mathbf{I}u], \quad W_6[u] = S[u, -\mathbf{A}u], \quad W_7[u] = S[u, -\mathbf{I}f],$$

$$W_8[u] = S[\mathbf{A}u, -\mathbf{I}f], \quad W_9[u] = S[u, -\mathbf{A}f].$$

Для $W_1[u]$ с учетом (4.3) и неравенств

$$\begin{aligned} S[u, \mathbf{A}^2 u] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[u, -\mathbf{A}u] + |\det \mathbf{A}| S[u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_0[u], \\ S[\mathbf{A}^2 u, f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A}u, -\mathbf{I}f] + |\det \mathbf{A}| S[u] = |\det \mathbf{A}| W_8[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] \end{aligned} \quad (4.11)$$

получим оценку

$$\begin{aligned} W_1[u + \mathbf{A}u + f] &\leq 2|\det \mathbf{A}| W_0[u] + (1 + |\det \mathbf{A}|) W_1[u] + 2|\det \mathbf{A}| W_2[u] + \\ &+ W_3[u] + W_4[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_6[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + S[\mathbf{A}f, f]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для $W_3[u]$ с учетом (4.11) имеем

$$W_3[u + \mathbf{A}u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_2[u] + W_3[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + S[\mathbf{A}f, f], \quad (4.13)$$

$$W_5[u + \mathbf{A}u + f] = (1 + |\det \mathbf{A}| W_5[u] + 2W_6[u] + 2W_7[u] + 2W_8[u] + S[f, -\mathbf{I}f]. \quad (4.14)$$

Для

$$\begin{aligned} W_6[u + \mathbf{A}u + f] &= |\det \mathbf{A}| W_5[u] + (1 + |\det \mathbf{A}|) W_6[u] + \\ &+ |\det \mathbf{A}| W_7[u] + W_8[u] + W_9[u] + S[u, -\mathbf{A}^2 u] + S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I}f] + S[f, -\mathbf{A}f] \end{aligned} \quad (4.15)$$

с учетом неравенств

$$\begin{aligned} S[-\mathbf{A}^2 u, u] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A}u, u] + |\det \mathbf{A}| S[u, -u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u], \\ S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I}f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A}u, -\mathbf{I}f] + |\det \mathbf{A}| S[u, f] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] \end{aligned} \quad (4.16)$$

получим

$$\begin{aligned} W_6[u + \mathbf{A}u + f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] + 2|\det \mathbf{A}| W_5[u] + \\ &+ (1 + |\det \mathbf{A}|) W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_8[u] + W_9[u] + S[f, -\mathbf{A}f], \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$W_7[u + \mathbf{A}u + f] = W_7[u] + W_8[u] + S[f, -\mathbf{I}f]. \quad (4.18)$$

С учетом неравенства (4.16) для $W_8[u]$ имеем

$$W_8[u + \mathbf{A}u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_2[u] + (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_8[u] + S[\mathbf{A}f, -\mathbf{I}f], \quad (4.19)$$

$$W_9[u + \mathbf{A}u + f] = W_9[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + S[f, -\mathbf{A}f]. \quad (4.20)$$

Для функционалов $W_0[u]$, $W_2[u]$, $W_4[u]$ остаются справедливыми соотношения (4.2), (4.6) и (4.9) соответственно.

Таким образом, система сравнения в этом случае будет иметь вид (4.10), но при этом $D \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, $d \in \mathbb{R}^{10}$ и ненулевые элементы матрицы D имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = d_{66} = d_{77} = 1 + |\det \mathbf{A}|, d_{21} = d_{23} = d_{76} = 2|\det \mathbf{A}|, \\ d_{43} &= d_{53} = d_{73} = d_{93} = d_{78} = d_{10,8} = |\det \mathbf{A}|, d_{72} = d_{27} = d_{29} = d_{49} = |\operatorname{tr} \mathbf{A}|, \\ d_{79} &= d_{99} = 1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|, d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{67} = d_{68} = d_{69} = 2, \\ d_{24} &= d_{25} = d_{33} = d_{34} = d_{7,10} = d_{88} = d_{89} = d_{10,10} = 1 \end{aligned}$$

Вектор $d \in \mathbb{R}^{10}$ имеет вид

$$\begin{aligned} d &= (S[f], S[f, \mathbf{A}f], S[f], S[f, \mathbf{A}f], S[f, \mathbf{A}f], S[f, -\mathbf{I}f], \\ &S[f, -\mathbf{A}f], S[f, -\mathbf{I}f], S[f, -\mathbf{A}f], S[f, -\mathbf{A}f])^T. \end{aligned}$$

Случай 3. Предположим, что $\operatorname{tr} \mathbf{A} \leq 0$, $\det \mathbf{A} \geq 0$. Тогда для введенных выше функционалов $W_0[u]$, $W_2[u]$, $W_4[u]$, $W_7[u]$, $W_9[u]$ сохраняются соотношения (4.2), (4.6), (4.9), (4.18) и (4.20) соответственно.

Для функционала $W_1[u]$ соотношение (4.3) с учетом неравенств

$$S[u, \mathbf{A}^2 u] \leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[u, -\mathbf{A}u] + |\det \mathbf{A}| S[u, -u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u],$$

$$S[\mathbf{A}^2 u, f] \leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, -\mathbf{I} f] + |\det \mathbf{A}| S[u, -\mathbf{I} f] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] \quad (4.21)$$

позволяет получить оценку

$$W_1[u + \mathbf{A} u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_0[u] + (1 + |\det \mathbf{A}|) W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] + W_3[u] + W_4[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + S[f, \mathbf{A} f]. \quad (4.22)$$

С учетом неравенства (4.21) из (4.7) для $W_3[u]$ следует

$$W_3[u + \mathbf{A} u + f] \leq W_3[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + S[f, \mathbf{A} f]. \quad (4.23)$$

Для $W_6[u]$ из (4.15) с учетом неравенств

$$\begin{aligned} S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I} u] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, u] + |\det \mathbf{A}| S[u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_0[u], \\ S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I} f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, f] + |\det \mathbf{A}| S[u, f] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_3[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] \end{aligned} \quad (4.24)$$

имеем

$$W_6[u + \mathbf{A} u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_0[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_3[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u] + (1 + |\det \mathbf{A}|) W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + W_8[u] + W_9[u] + S[f, -\mathbf{A} f]. \quad (4.25)$$

С учетом неравенства (4.24) для $W_8[u]$ получим

$$W_8[u + \mathbf{A} u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_2[u] + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_3[u] + W_8[u] + S[f, -\mathbf{A} f]. \quad (4.26)$$

Таким образом, с учетом (4.2), (4.6), (4.9), (4.18), (4.20), (4.22), (4.23), (4.25) и (4.26) приходим к выводу, что система сравнения в этом случае будет иметь вид (4.10), но при этом $D \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, $d \in \mathbb{R}^{10}$ и ненулевые элементы матрицы D имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = d_{66} = d_{77} = 1 + |\det \mathbf{A}|, \\ d_{21} &= d_{23} = d_{26} = d_{28} = d_{38} = d_{53} = d_{71} = d_{73} = d_{76} = d_{78} = d_{93} = d_{10,8} = |\det \mathbf{A}|, \\ d_{27} &= d_{29} = d_{49} = d_{72} = d_{74} = d_{94} = |\operatorname{tr} \mathbf{A}|, \quad d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{67} = d_{68} = d_{69} = 2, \\ d_{24} &= d_{25} = d_{33} = d_{34} = d_{44} = d_{55} = d_{79} = d_{7,10} = d_{88} = d_{89} = d_{99} = d_{10,10} = 1. \end{aligned}$$

Случай 4. Предположим, что $\operatorname{tr} \mathbf{A} \geq 0$, $\det \mathbf{A} \geq 0$. Тогда для введенных выше функционалов $W_0[u]$, $W_2[u]$, $W_4[u]$, $W_7[u]$, $W_9[u]$ сохраняются соотношения (4.2), (4.6), (4.9), (4.18) и (4.20) соответственно.

Для функционала $W_1[u]$ соотношение (4.3) с учетом неравенств

$$\begin{aligned} S[\mathbf{A}^2 u, u] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, u] + |\det \mathbf{A}| S[u, -\mathbf{I} u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u], \\ S[\mathbf{A}^2 u, f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, f] + |\det \mathbf{A}| S[u, -\mathbf{I} f] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_3[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] \end{aligned} \quad (4.27)$$

позволяет получить оценку

$$W_1[u + \mathbf{A} u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_0[u] + (1 + |\det \mathbf{A}| + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_1[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] + (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_3[u] + W_4[u] + |\det \mathbf{A}| W_5[u] + S[f, \mathbf{A} f]. \quad (4.28)$$

На основе (4.27) для $W_3[u]$ получим

$$W_3[u + \mathbf{A} u + f] \leq (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_3[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + S[f, \mathbf{A} f]. \quad (4.29)$$

Для $W_6[u]$ из (4.15) с учетом неравенств

$$\begin{aligned} S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I} u] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, -\mathbf{I} u] + |\det \mathbf{A}| S[u] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_0[u], \\ S[\mathbf{A}^2 u, -\mathbf{I} f] &\leq |\operatorname{tr} \mathbf{A}| S[\mathbf{A} u, -\mathbf{I} f] + |\det \mathbf{A}| S[u, f] = |\operatorname{tr} \mathbf{A}| W_8[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] \end{aligned} \quad (4.30)$$

имеем

$$W_6[u + \mathbf{A} u + f] \leq |\det \mathbf{A}| W_0[u] + |\det \mathbf{A}| W_2[u] + (1 + |\det \mathbf{A}| + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_6[u] + |\det \mathbf{A}| W_7[u] + (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|) W_8[u] + W_9[u] + S[f, -\mathbf{A} f]. \quad (4.31)$$

На основе (4.30) для $W_8[u]$ получим

$$W_8[u + \mathbf{A}u + f] \leq |\det \mathbf{A}|W_2[u] + (1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|)W_8[u] + S[\mathbf{A}f, -\mathbf{I}f]. \quad (4.32)$$

Таким образом, с учетом оценок (4.2), (4.6), (4.9), (4.18), (4.20), (4.28), (4.29), (4.31), (4.32) приходим к выводу, что система сравнения в этом случае будет иметь вид (4.10), но при этом $D \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, $d \in \mathbb{R}^{10}$ и ненулевые элементы матрицы D имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{66} = 1 + |\det \mathbf{A}|, \quad d_{24} = d_{44} = d_{79} = d_{99} = 1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}|, \\ d_{21} = d_{23} = d_{26} = d_{48} = d_{53} = d_{71} = d_{73} = d_{78} = d_{93} = d_{10,8} = |\det \mathbf{A}|, \\ d_{22} = d_{77} = 1 + |\operatorname{tr} \mathbf{A}| + |\det \mathbf{A}|, \quad d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{67} = d_{68} = d_{69} = 2, \\ d_{33} = d_{34} = d_{55} = d_{7,10} = d_{88} = d_{89} = d_{10,10} = 1. \end{aligned}$$

Полученная система сравнения (4.10) может быть решена в явном виде

$$\xi_p = D^p \xi_0 + \sum_{k=0}^{p-1} D^k d.$$

Тогда согласно утверждению теоремы 3.1 условия $(h_0[u], S[u])$ -технической устойчивости, где $h_0[u] = \max_{i=0,4} W_i[u]$ в случае 1 и $h_0[u] = \max_{i=0,9} W_i[u]$ для случаев 2, 3 и 4, имеют вид неравенства

$$\left[\lambda D^T \mathbf{e} + \sum_{k=0}^{T-1} D^k d \right]_1 \leq A.$$

Здесь $[\cdot]_1$ — первая компонента соответствующего вектора.

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим сначала пример, иллюстрирующий возможность использования технической устойчивости в терминах двух мер для оценки площади области достижимости управляемой системы.

Пример 5.1. Рассмотрим управляемую механическую систему с непрерывным временем

$$\dot{x} = Bx + u, \quad (5.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $u \in U \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $x_0 \in X_0$. Множества траекторий такой системы могут порождаться параметрами $u \in U$, которые можно рассматривать в качестве управлений, либо как возмущения. Таким образом, возникает необходимость оценки площади области достижимости уравнения (5.1). для которого нетрудно получить дискретно-разностную аппроксимацию

$$x((m+1)h) = (I + hB)x(mh) + hu_m, \quad (5.2)$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $u_m \in U \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $h > 0$.

Множество достижимости X_m является решением уравнения

$$X_{m+1} = (I + hB)X_m + Uh, \quad (5.3)$$

где $X_m, U, X_0 \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Таким образом, уравнение (5.3) задает аппроксимацию области достижимости уравнения (5.1).

Выберем меры начальных и текущих отклонений $h_0[X] = \|X\|$, $h[X] = S[X]$ и исследуем (h_0, h) -техническую устойчивость уравнения (5.3).

Из формулы Штейнера получаем равенство

$$\begin{aligned} S[X_{m+1}] &= S[(I + hB)X_m + Uh] = S[(I + hB)X_m] + 2hS[(I + hB)X_m, U] + h^2S[U] = \\ &= |\det(I + hB)|S[X_m] + h^2S[U] + 2hS[(I + hB)X_m, U]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем обозначения $|\det(I + hB)| = \beta$, $\|(I + hB)\| = \alpha$, и будем полагать, что $\alpha < 1$, $\beta \in (0, 1)$.

Для (5.3) справедлива оценка по норме

$$\|X_{m+1}\| \leq \alpha\|X_m\| + h\|U\|,$$

откуда, учитывая принцип сравнения, следует неравенство

$$\|X_m\| \leq \alpha^m\|X_0\| + \frac{h\|U\|}{1 - \alpha}. \quad (5.5)$$

Из очевидных включений

$$(I + hB)X_m \subseteq \|(I + hB)X_m\|K \subseteq \|(I + hB)\| \|X_m\|K = \alpha\|X_m\|K$$

следует

$$S[(I + hB)X_m, U] \leq S[\alpha\|X_m\|K, U] = \alpha\|X_m\|S[K, U]. \quad (5.6)$$

Тогда, учитывая (5.5) и (5.6), для (5.4) получаем

$$\begin{aligned} S[X_{m+1}] &\leq \beta S[X_m] + h^2S[U] + 2h\alpha\|X_m\|S[K, U] \leq \\ &\leq \beta S[X_m] + h^2S[U] + 2h\alpha\left(\alpha^m\|X_0\| + \frac{h\|U\|}{1 - \alpha}\right)S[K, U] \leq \\ &\leq \beta S[X_m] + h^2S[U] + 2h\alpha\|X_0\|S[K, U] + \frac{2h^2\alpha\|U\|}{1 - \alpha}S[K, U]. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая принцип сравнения и определение технической устойчивости, следуют неравенства

$$\begin{aligned} S[X_m] &\leq \beta^m S[X_0] + \frac{h^2S[U] + 2h\alpha\|X_0\|S[K, U] + \frac{2h^2\alpha\|U\|}{1 - \alpha}S[K, U]}{1 - \beta} \leq \\ &\leq \pi\beta^m\|X_0\| + \frac{h^2S[U] + 2h\alpha\|X_0\|S[K, U] + \frac{2h^2\alpha\|U\|}{1 - \alpha}S[K, U]}{1 - \beta} \leq \\ &\leq \pi\beta\lambda + \frac{h^2S[U] + 2h\alpha\|X_0\|S[K, U] + \frac{2h^2\alpha\|U\|}{1 - \alpha}S[K, U]}{1 - \beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (h_0, h) -технической устойчивости уравнения (5.3) имеют вид

$$\pi\beta\lambda + \frac{h^2S[U] + 2h\alpha\|X_0\|S[K, U] + \frac{2h^2\alpha\|U\|}{1 - \alpha}S[K, U]}{1 - \beta} < A.$$

Далее рассмотрим некоторые примеры применения, предложенного в этой работе способа построения вспомогательных функционалов Ляпунова для исследования технической устойчивости множеств траекторий дискретных систем.

Пример 5.2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta_H u_p = \psi(S[u_p])\mathbf{A}u_p, \quad (5.7)$$

где $u_p \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^2)$ — линейный нильпотентный оператор, т.е. $\mathbf{A}^2 = 0$, $\psi \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ — неубывающая функция.

Введем вспомогательные функционалы Ляпунова

$$W_0[u] = S[u], \quad W_1[u] = S[u, \mathbf{A}u].$$

Тогда

$$W_0[u + \psi(S[u])\mathbf{A}u] = W_0[u] + 2\psi(W_0[u])W_1[u], \quad W_1[u + \psi(S[u])\mathbf{A}u] = W_1[u].$$

Соответствующая система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{p+1}^0 &= \xi_p^0 + 2\psi(\xi_p^0)\xi_p^1, \\ \xi_{p+1}^1 &= \xi_p^1 \end{aligned}$$

и, таким образом, сводится к одному разностному уравнению

$$\xi_{p+1}^0 = \xi_p^0 + 2\psi(\xi_p^0)S[u_0, \mathbf{A}u_0].$$

Покажем, что выполнение неравенства

$$\int_{\lambda}^A \frac{ds}{\psi(s)} \geq 2T\lambda \quad (5.8)$$

гарантирует $(h_0[u], S[u])$ -техническую устойчивость, $h_0[u] = \max\{S[u], S[u, \mathbf{A}u]\}$, уравнения (5.7).

Действительно, предположим от противного, что $h[u_0] < \lambda$ для некоторого $u_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$ и $h[u_{p^*}] \geq A$ при некотором $p^* \in [0, T] \cap \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^A \frac{ds}{\psi(s)} &< \int_{h[u_0]}^{h[u_{p^*}]} \frac{ds}{\psi(s)} \leq \int_{S[u_0]}^{S[u_{p^*}]} \frac{ds}{\psi(s)} = \int_{\xi_0^0}^{\xi_{p^*}^0} \frac{ds}{\psi(s)} = \sum_{k=0}^{p^*-1} \int_{\xi_k^0}^{\xi_{k+1}^0} \frac{ds}{\psi(s)} \leq \sum_{k=0}^{p^*-1} \int_{\xi_k^0}^{\xi_{k+1}^0} \frac{ds}{\psi(\xi_k^0)} = \\ &= \sum_{k=0}^{p^*-1} \frac{\xi_{k+1}^0 - \xi_k^0}{\psi(\xi_k^0)} = \sum_{k=0}^{p^*-1} 2S[u_0, \mathbf{A}u_0] \leq 2p^*\lambda \leq 2T\lambda \leq \int_{\lambda}^A \frac{ds}{\psi(s)}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает достаточное условие (5.8) $(h_0[u], S[u])$ -технической устойчивости уравнения (5.7).

Пример 5.3. Рассмотрим пример, когда предложенный метод качественного исследования дискретных уравнений позволяет также найти и точные значения площади решения разностного уравнения вида

$$\Delta_H u_p = \mathbf{A}u_p,$$

где $u_p \in \text{conv}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{A}^k = \mathbf{I}$.

Определим функционалы Ляпунова $W_i[u] = S[\mathbf{A}^i u, u]$, $i = \overline{0, k-1}$. Тогда справедливы равенства

$$W_i[u + \mathbf{A}u] = S[u + \mathbf{A}u, \mathbf{A}^i + \mathbf{A}^{i+1}u] = 2W_i[u] + W_{i-1}[u] + W_{i+1}[u].$$

Система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{p+1}^0 &= 2\xi_p^0 + \xi_p^{k-1} + \xi_p^1, \\ \xi_{p+1}^i &= 2\xi_p^i + \xi_p^{i-1} + \xi_p^{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ \xi_{p+1}^{k-1} &= 2\xi_p^{k-1} + \xi_p^{k-2} + \xi_p^0. \end{aligned}$$

Определим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы сравнения имеет вид

$$\xi_p = D^p \xi_0, \quad \xi_0 = (W_0[u_0], \dots, W_{k-1}[u_0])^T,$$

при этом площадь решения $S[u_p] = \xi_p^0$.

Условия $(h_0[u], S[u])$ -технической устойчивости, $h_0[u] = \max_{i=0, k-1} W_i[u]$, имеют вид неравенства $\lambda[D^p \mathbf{e}]_1 < A$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к исследованию технической устойчивости эволюционных уравнений с разностным оператором Хукухары позволяет свести задачу об оценках множества решений уравнений к исследованию конечномерных разностных уравнений сравнения. Также приведены примеры исследования технической устойчивости, которые демонстрируют конструктивность этого подхода. Представляет интерес для дальнейшего исследования рассмотрение случая пространств $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$, а также развитие новых подходов к оценкам функционалов смешанного объема.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Blasi F.S., Iervolino F. *Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso*, Bull. Unione mat. Ital. **4**(2), 491–501 (1969).
- [2] Толстоногов А.А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве* (Новосибирск: Наука, 1986).
- [3] Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J. *Theory of set differential equations in metric spaces* (Cambridge Sci. Publ., London, 2006).
- [4] Park J.Y., Han H.K. *Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations*, Int. J. Math. and Math. Sci. **22**(2), 271–279 (1999).
- [5] Плотников А.В. *Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления* (Одесса, Деп. в ВИНТИ, № 2036-82.12, 1982).
- [6] Моисеев Н.Д. *О некоторых методах теории технической устойчивости*// Тр. Воен.-возд. академия им. Жуковского, **135** (1945).
- [7] Моисеев Н.Д. *Очерки развития теории устойчивости* (М.-Л.: Гостехиздат, 1949).
- [8] Четаев Н.Г. *О выборе параметров устойчивой механической системы*, ПММ, **15**, 371–372 (1951).
- [9] Карачаров К.А., Пилютик А.Г. *Введение в техническую теорию устойчивости движения* (М.: Физматгиз, 1962).
- [10] Мартынюк А.А. *Практическая устойчивость движения* (Киев: Наук. думка, 1983).
- [11] Lakshmikantham V., Leela S., Martyniuk A.A. *Practical stability of nonlinear systems* (Singapore: World Scientific, 1990).
- [12] Очеретнюк Е.В., Слынько В.И. *Оценки объема решений некоторых дифференциальных уравнений с производной Хукухары*, Матем. заметки, **97**(3), 440–447 (2015).
- [13] Очеретнюк Е.В., Слынько В.И. *Качественный анализ решений нелинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\text{conv}(\mathbb{R}^2)$* , Дифференц. уравнения, **51**(8), 1004–1018 (2015).
- [14] Slyn'ko V.I. *Stability in terms of two measures for set difference equations in space $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$* , Appl. Anal. **96**(2), 278–292 (2017).

- [15] Александров А.Д. *Избранные работы. Ч. 1: Геометрия и приложения* (Новосибирск: Наука, 2006).
- [16] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества* (М., Наука, 1985).
- [17] Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем* (М., Наука, 1988).

Виктор Сергеевич Денисенко

*Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого,
б-р Шевченка, д. 81, г. Черкассы, 18031, Украина,*

e-mail: den_vik@ukr.net

V.S. Denysenko

On technical stability for sets of trajectories of discrete systems

Abstract. The technical (practical) stability problem for a set of trajectories of discrete systems on a metric space of nonempty convex compact sets in $\mathbb{R}^n$ is considered. On the basis of known results of convex geometry and comparison method, an approach of constructing the auxiliary Lyapunov functionals for the study of technical stability in terms of two measures of evolutionary equations with Hukuhara difference operator is proposed. The problem of estimating the solutions of equations is reduced to the study of finite-dimensional difference equations of comparison. Examples of technical stability study are given to illustrate the constructiveness of this approach.

Keywords: technical stability in terms of two measures, comparison method, mixed volume, Lyapunov functional, set of discrete systems, Hukuhara operator.

Viktor Sergeevich Denysenko

*Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy,
81 blvd Shevchenko, Cherkasy, 18031 Ukraine,*

e-mail: den_vik@ukr.net