Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Дубровин, О суммировании числовых рядов по Эйлеру, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 76–82

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-76-82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:57:48

Н.И. ДУБРОВИН

О СУММИРОВАНИИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ ПО ЭЙЛЕРУ

Аннотация. Доказывается комбинаторное тождество, в которое входят разности k -го порядка последовательностей, а также биномиальные коэффициенты. Суммирование по Эйлеру связано с вычислением разностей всех порядков членов исходного ряда. Регулярность суммирующей функции означает совпадение с "обычной" суммой ряда, если такова существует. Как следствие доказанного тождества приводится короткое доказательство регулярности суммирования по Эйлеру числовых рядов.

Ключевые слова: суммирование ряда, суммирование по Эйлеру, регулярность суммирующих функций.

УДК: 512.14

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-76-82

1. ВВЕДЕНИЕ

Для определения суммы ряда $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ следует указывать правило суммирования. Стандартное и самое распространенное определение суммы $s_0(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} u_k$. Но это не единственный значимый способ сопоставления ряду γ суммы $s(\gamma)$. Такие способы называются *суммирующими функциями*. Для того, чтобы суммирующая функция s имела смысл необходимо, по крайней мере, чтобы она подчинялась правилам регулярности и линейности.

Определение 1 ([1], гл. 15, §2). *Суммирующей функцией* называется отображение s , сопоставляющее некоторым числовым рядам $\gamma = \sum_n u_n$ число $s(\gamma)$, причем должны выполняться следующие правила.

Регулярность: если ряд γ сходится в обычном смысле, и $s_0(\gamma)$ — его сумма, то значение $s(\gamma)$ существует и совпадает с $s_0(\gamma)$. В частности, если γ — конечная сумма, то $s(\gamma)$ совпадает с обычной арифметической суммой ненулевых членов ряда γ .

Линейность: если ряды γ, β s -суммируемы, то для любых чисел a, b ряд $a\gamma + b\beta$ также s -суммируем, и $s(a\gamma + b\beta) = as(\gamma) + bs(\beta)$.

Стандартное суммирование регулярно по определению, а также линейно. Одна из значимых процедур суммирования числовых рядов принадлежит Л. Эйлеру (см., например, [1], гл. 14, §5). Сначала определим *последовательность первых разностей* для последовательности $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$. Это новая последовательность $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots$, где $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. *Последовательностью k -ых разностей* для $u_0, u_1, u_2, \dots$ называется последовательность первых разностей от последовательности $(k-1)$ -х разностей:

$$\Delta^k u_0, \Delta^k u_1, \Delta^k u_2, \dots,$$

где $\Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n) = \Delta^{k-1} u_n - \Delta^{k-1} u_{n+1}$.

Члены последовательностей k -х разностей для разных k удобно располагать в треугольную таблицу

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 \\
 & \Delta u_0 & & \Delta u_1 & & \Delta u_2 & & \Delta u_3 & \dots \\
 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^2 u_1 & & \Delta^2 u_2 & \dots & \dots \\
 & & & \Delta^3 u_0 & & \Delta^3 u_1 & & \dots & \dots
 \end{array}$$

Например, для последовательности степеней двойки этот треугольник выглядит так:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \\
 & -1 & -2 & -4 & -8 & \dots \\
 & & 1 & 2 & 4 & \dots \\
 & & & -1 & -2 & \dots
 \end{array} \quad (1)$$

Индукцией по k с использованием основного рекуррентного соотношения между биномиальными коэффициентами можно доказать формулу

$$\Delta^k u_n = u_n - C_k^1 u_{n+1} + C_k^2 u_{n+2} - \dots + (-1)^k u_{n+k}; \quad (2)$$

здесь $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ — биномиальные коэффициенты. Достаточно проверить эту формулу для $n = 0$. Доказываем методом математической индукции. Для $k = 1$ эта формула верна, ибо правая часть превращается в $u_0 - C_1^1 u_1 = u_0 - u_1$, что совпадает с $\Delta^1 u_0$. Предполагаем теперь, что (2) верна для $n = 0$ и для k . Тогда

$$\begin{aligned}
 \Delta^{k+1} u_0 &= \Delta^k u_0 - \Delta^k u_1 = \\
 &= (u_0 - C_k^1 u_1 + C_k^2 u_2 - \dots + (-1)^k u_k) - (u_1 - C_k^1 u_2 + C_k^2 u_3 - \dots + (-1)^{k+1} u_{1+k}) = \\
 &= u_0 - (C_k^1 + 1)u_1 + (C_k^2 + C_k^1)u_2 - \dots + ((-1)^k + (-1)^k C_k^k)u_k + (-1)^{k+1} u_{1+k} = \\
 &= u_0 - C_{k+1}^1 u_1 + C_{k+1}^2 u_2 - \dots + (-1)^k C_{k+1}^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Определение 2 ([1], гл. 14, §5). Преобразованием Эйлера ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ называется переход от этого ряда к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n u_0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 + \dots \quad (3)$$

Для $n = 0$ считаем по определению $\Delta^n u_m = u_m$. Ряд $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ суммируем по Эйлеру, если существует предел

$$s_E(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}, \quad (4)$$

который и называется суммой по Эйлеру ряда γ .

Линейность суммирования по Эйлеру вытекает, помимо линейности предельного перехода, из линейности операции образования последовательности первой и, более общо, любой разности. Регулярность суммирования по Эйлеру составляет содержание следующей теоремы

Теорема. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится, то его преобразование по Эйлеру также сходится, и суммы этих двух рядов совпадают.

Здесь не предполагается, что $u_n \geq 0$; знак $(-1)^n$ поставлен исключительно по техническим причинам. Доказательство этой теоремы изложено в ([1], гл. 14, §5) на трех страницах и опирается существенно на теорему Маркова о двойных рядах. В разделе 3 приводится короткое доказательство регулярности суммирования по Эйлеру, опирающееся на комбинаторное тождество (11), доказываемое далее и составляющее оригинальную часть данной работы.

Покажем, что в случае конечной суммы $u_0 - u_1 + \dots + (-1)^N u_N$ теорема верна (это рассуждение не обязательно по отношению к короткому доказательству теоремы и тождеству (11)). Обозначим $w_n = (-1)^n u_n$. По формуле (2)

$$\Delta^n u_0 = w_0 + C_n^1 w_1 + C_n^2 + \dots + C_n^m w_n.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n u_0}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_0 + C_n^1 w_1 + \dots + C_n^m w_n}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^N w_k \sum_{n \geq k} \frac{C_n^k}{2^{n+1}},$$

то остается доказать равенство

$$\sum_{n \geq k} \frac{C_n^k}{2^{n+1}} = 1$$

для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, \dots$. Доказывать будем индукцией по k . База индукции, случай $k = 0$, вытекает из формулы суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{C_n^0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Обозначим $X_k := \sum_{n \geq k} \frac{C_n^k}{2^{n+1}}$. Снова пользуясь основным соотношением для биномиальных коэффициентов ($C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$), имеем

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{n \geq k+1} \frac{C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n-1 \geq k} \frac{C_{n-1}^k}{2^{(n-1)+1}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n-1 \geq k} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^{(n-1)+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} \left(X_{k-1} - \frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_{k-1}, \end{aligned}$$

откуда получаем равенство $X_k = X_{k-1}$. Следовательно, все X_k равны единице.

Суммирование по Эйлеру весьма сильное: ряд $1 - 2 + 4 - 8 + \dots$ суммируем по Эйлеру, и его сумма по Эйлеру, как это видно из (1), равна стандартной сумме

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}.$$

Однако ряд, составленный из степеней двойки, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ не суммируем по Эйлеру, ибо для него $u_n = (-1)^n 2^n$, $n \geq 0$ и

$$\Delta^n u_0 = 1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 4 + \dots + C_n^m \cdot 2^n = (1 + 2)^n = 3^n.$$

Получается расходящаяся геометрическая прогрессия $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{2^{n+1}}$. Отметим, что в 3-адической топологии рациональных чисел эта геометрическая прогрессия сходится к числу -1 , что удивительным образом совпадает с суммой $\sum_{n \geq 0} 2^n = \frac{1}{1-2} = -1$ в 2-адической топологии.

2. КОМБИНАТОРНОЕ ТОЖДЕСТВО

Для последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ обозначим частичные суммы

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

и разности альтернированной последовательности $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$

$$\Delta_0 = a_0, \quad \Delta_k = a_0 + C_k^1 a_1 + C_k^2 a_2 + \dots + C_k^{k-1} a_{k-1} + a_k = \sum_{j=0}^k C_k^j a_j. \quad (5)$$

Найдем коэффициенты $x_0^k, x_1^k, x_2^k, \dots, x_k^k$ такие, что

$$\frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{4}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\Delta_k = x_0^k s_0 + x_1^k s_1 + \dots + x_k^k s_k \quad (6)$$

верно для любых a_j .

Во-первых, подставим в (6) $a_0 = 1$ и $a_j = 0$ для всех $j > 0$. Вычисляем $s_j = 1 = \Delta_j$, что верно для любого j , откуда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} = x_0^k + x_1^k + \dots + x_k^k.$$

Следовательно,

$$x_0^k + x_1^k + \dots + x_k^k = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (7)$$

Во-вторых, подставим в (6) $a_j = \lambda^j$ для $j = 0, 1, \dots, k$. Тогда $\Delta_t = (1 + \lambda)^t$ по формуле бинома Ньютона. Приготовим левую часть доказываемого тождества (6), пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 + \lambda) + \frac{1}{8}(1 + \lambda)^2 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}(1 + \lambda)^k = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2^{k+1}}(1 + \lambda)^{k+1} - 1}{1/2(1 + \lambda) - 1} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}(1 + \lambda)^{k+1} - 1}{\lambda - 1}.$$

Преобразуем теперь правую часть

$$\begin{aligned} & x_0^k + x_1^k(1 + \lambda) + x_2^k(1 + \lambda + \lambda^2) + \dots + x_k^k(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^k) = \\ & = x_0^k \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} + x_1^k \frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda} + x_2^k \frac{1 - \lambda^3}{1 - \lambda} + \dots + x_k^k \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} = \\ & = \frac{1}{1 - \lambda} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right) - \frac{\lambda}{1 - \lambda} (x_0^k + x_1^k \lambda + x_2^k \lambda^2 + \dots + x_k^k \lambda^k) \end{aligned}$$

в силу формулы (7). Приравнявая левую и правую части, одновременно умножая на $\lambda - 1$ и сокращая -1 , получим

$$\frac{1}{2^{k+1}}(1 + \lambda)^{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}} + \lambda (x_0^k + x_1^k \lambda + x_2^k \lambda^2 + \dots + x_k^k \lambda^k).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2^{k+1}} \frac{(1 + \lambda)^{k+1} - 1}{\lambda} = x_0^k + x_1^k \lambda + x_2^k \lambda^2 + \dots + x_k^k \lambda^k. \quad (8)$$

Для вычисления x_t^k -х воспользуемся правилом Крамара, подставив в (8) вместо λ по очереди попарно различные ненулевые $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Как результат получим линейную систему $k + 1$ уравнения с $k + 1$ неизвестным и определителем Вандермонда

$$W = (\lambda_1 - \lambda_0) \dots (\lambda_k - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \neq 0.$$

Найдем теперь определитель D_t , который получается, если t -й столбец в определителе W заменить на столбец

$$S := \left(\frac{1}{2^{k+1}} \frac{(1 + \lambda_0)^{k+1} - 1}{\lambda_0}, \dots, \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(1 + \lambda_k)^{k+1} - 1}{\lambda_k} \right)^\top,$$

т. е. на столбец свободных членов в линейной системе, оговоренной выше. Разложим

$$\frac{1}{2^{k+1}} \frac{(1 + \lambda)^{k+1} - 1}{\lambda} = \frac{1}{2^{k+1}} ((k+1) + C_{k+1}^2 \lambda + \dots + C_{k+1}^{t+1} \lambda^t + \dots + \lambda^k). \quad (9)$$

Когда подставим столбец S в определитель W на t -е место и разложим его в сумму k определителей в соответствии с разложением (9), то все слагаемые, кроме того, где стоит столбец

$$\frac{C_{k+1}^{t+1}}{2^{k+1}} (\lambda_0^t, \lambda_1^t, \dots, \lambda_k^t)^\top,$$

занулятся, поскольку в каждом из них будет содержаться два пропорциональных столбца (например, для слагаемого, содержащего в определителе столбец $(k+1)/2^{k+1}(1, 1, 1, \dots, 1)^\top$ на t -м месте, получаем пропорциональность с первым столбцом, для столбца $C_{k+1}^2/2^{k+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top$ — пропорциональность со вторым столбцом и т. д.). А единственное ненулевое слагаемое с выше указанным столбцом даст $D_t = \frac{C_{k+1}^{t+1}}{2^{k+1}} W$. Следовательно, применяя формулу Крамера $x_t^k = D_t/W$, выводим

$$x_t^k = \frac{C_{k+1}^{t+1}}{2^{k+1}} = \frac{(k+1)k \dots (k-t+1)}{2^{k+1}(t+1)!}. \quad (10)$$

Доказано, что коэффициенты (10) подходят при $a_t = \lambda^t$ и превращают (6) в равенство. Теперь заметим, что строки $(1, \lambda_j, \lambda_j^2, \dots, \lambda_j^k)$ для попарно различных $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ образуют базис в пространстве строк длины $k+1$, так как определитель, составленный из них, т. е. W , не равен нулю. Операция суммирования s_t , а также операции Δ_t линейны. Следовательно, если числа (10) подходят для какого-либо базиса, то они же подходят и для любой строки $(a_0, a_1, \dots, a_k)$.

В заключении проверяем напрямую, что имеет место равенство (7):

$$\begin{aligned} x_0^k + x_1^k + \dots + x_k^k &= \sum_{t=0}^k \frac{C_{k+1}^{t+1}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{t=-1}^k C_{k+1}^{t+1} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m - 1 \right) = \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 1) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Итак, получаем основной результат работы — комбинаторное тождество

$$\frac{1}{2} \Delta_0 + \frac{1}{4} \Delta_1 + \frac{1}{8} \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \Delta_k = \frac{1}{2^{k+1}} [C_{k+1}^1 s_0 + C_{k+1}^2 s_1 + \dots + C_{k+1}^{k+1} s_k] \quad (11)$$

или

$$\Delta_0 + \frac{1}{2} \Delta_1 + \frac{1}{2^2} \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2^k} \Delta_k = \frac{1}{2^k} [C_{k+1}^1 s_0 + C_{k+1}^2 s_1 + \dots + C_{k+1}^{k+1} s_k].$$

Заметим, что слева от знака равенства в (11) стоит k -я частичная сумма ряда, определяющего сумму ряда $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ по Эйлеру. Отметим

Следствие. Все числа x_t^k ($t = 0, 1, 2, \dots, k$) положительны, и их сумма по $t \in [0; k]_{\mathbb{N}}$ меньше единицы на величину $1/2^{k+1}$ (см. (7)).

Приравняем коэффициенты в (11) при a_t , получим

$$\frac{1}{2^{t+1}} + \frac{C_{t+1}^1}{2^{t+2}} + \cdots + \frac{C_k^t}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \left[C_{k+1}^{t+1} + C_{k+1}^{t+2} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} \right]$$

или, если умножить на 2^{k+1} ,

$$2^{k-t} C_t^0 + 2^{k-t-1} C_{t+1}^1 + \cdots + 2^0 C_k^t = C_{k+1}^{t+1} + C_{k+1}^{t+2} + \cdots + C_{k+1}^{k+1}. \quad (12)$$

В ([2], с. 193, (5.20)) имеется тождество

$$\sum_{j=t} C_{t+j}^j 2^{-j} = 2^t,$$

которое является частным случаем тождества (12), если в нем подставить $k = 2t$. Это следует из равенства

$$C_{2t+1}^{t+1} + C_{2t+1}^{t+2} + \cdots + C_{2t+1}^{2t+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2t+1} C_{2t+1}^j = 2^{2t},$$

где учтено соотношение $C_n^t = C_n^{n-t}$ между биномиальными коэффициентами.

3. РЕГУЛЯРНОСТЬ СУММИРОВАНИЯ ПО ЭЙЛЕРУ

Пусть дан ряд

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots. \quad (13)$$

Обозначим $a_k = (-1)^k u_k$, $\Delta_k := \Delta^k u_0$ — разность k -го порядка. Тогда величина Δ_k задается формулой (5).

Доказательство теоремы. Если ряд (13) сходится к числу s , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}$ также сходится к числу s .

Из условия теоремы и обозначения $a_k = (-1)^k u_k$ следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится к числу s , а следует доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_k}{2^{k+1}}$ сходится к тому же числу s . Как и выше, $s_k = a_0 + \cdots + a_k$ — частичные суммы.

Зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем натуральное N такое, что $|s_n - s| < \varepsilon$ для любого $n \geq N$. Оценим

$$\left| \frac{1}{2} \Delta_0 + \frac{1}{4} \Delta_1 + \frac{1}{8} \Delta_2 + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \Delta_k - s \right| = \left| \frac{1}{2^{k+1}} \left[C_{k+1}^1 s_0 + C_{k+1}^2 s_1 + \cdots + C_{k+1}^{k+1} s_k \right] - s \right| \leq$$

$$\left| \frac{C_{k+1}^1}{2^{k+1}} s_0 + \frac{C_{k+1}^2}{2^{k+1}} s_1 + \cdots + \frac{C_{k+1}^N}{2^{k+1}} s_{N-1} \right| + \left| \sum_{j=N}^{j=k} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} s_j - s \right|.$$

Частичные суммы s_j ограничены, пусть $|s_j| \leq C$ для любого $j = 0, 1, 2, \dots$. Тогда и $|s| \leq C$.

Найдется номер $K > N$ такой, что $\frac{C_{k+1}^j}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{N}$ для любого $k \geq K$ и любого $0 \leq j \leq N$. Это можно сделать, ибо 2^k растет быстрее, чем любой многочлен от переменной k . Более точно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(k)}{2^k} = 0$ каков бы ни был многочлен $P(k)$ (проверяется при помощи правила Лопиталя для непрерывной переменной вместо дискретной переменной k). Тогда

$$\left| \frac{C_{k+1}^1}{2^{k+1}} s_0 + \frac{C_{k+1}^2}{2^{k+1}} s_1 + \cdots + \frac{C_{k+1}^N}{2^{k+1}} s_{N-1} \right| \leq \sum_{t=0}^{N-1} |s_t| < C\varepsilon.$$

Далее

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=N}^{j=k} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} s_j - s \right| &= \left| \sum_{j=N}^{j=k} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} (s_j - s) - \sum_{j=-1}^{N-1} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} s \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{j=N}^{j=k} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} (s_j - s) \right| + \left| \sum_{j=-1}^{N-1} \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} s \right| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{N} (N+1)C \leq \varepsilon + 2C\varepsilon \end{aligned}$$

в силу того, что $\sum_{j=-1}^k \frac{C_{k+1}^{j+1}}{2^{k+1}} = 1$. Итак,

$$\left| \frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{4}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2 + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\Delta_k - s \right| \leq C\varepsilon + \varepsilon + 2C\varepsilon = (3C+1)\varepsilon.$$

Так как эта величина может быть сколь угодно малой в силу выбора $\varepsilon > 0$, то доказано, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{4}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2 + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\Delta_k \right] = s.$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Воробьев Н.Н. *Теория рядов* (Наука, М., 1979).
- [2] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика* (БИНОМ, Мир, 2006).

Николай Иванович Дубровин

*Владимирский государственный университет,
ул. Горького, д. 87, г. Владимир, 600000, Россия,*

e-mail: ndubrovin81@gmail.com; dubrovin@vlsu.ru

N.I. Dubrovin

The Euler summation of numerical series

Abstract. A combinatorial equality was proved, which involves k-order differences and binomial coefficients as well. The Euler's summing of a sequence connects with calculation of all differences. Regularity of summing function means the coincidence with "ordinary" sum, if the last exists. As a consequence of proving combinatorial equality the simple proof of regularity Euler's summing was given.

Keywords: summing of serieses, Euler's summing, regularity of summing functions.

Nikolay Ivanovich Dubrovin

*Vladimir State University,
87 Gorki str., Vladimir, 600000 Russia,*

e-mail: ndubrovin81@gmail.com; dubrovin@vlsu.ru