Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Р. Шриватса Кумар, Shruthi, Д. Ранганатха, Некоторые новые сравнения по модулю 5 для обобщенного числа разбиений, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 7, 83–88

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-7-83-88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:49:03

Б.Р. ШРИВАТСА КУМАР, ШРУТИ, Д. РАНГАНАТХА

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 5 ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ЧИСЛА РАЗБИЕНИЙ

Аннотация. В представленной работе описываем некоторые новые сравнения по модулю 5 для $p_r(n)$ — обобщенного числа разбиений, в ограничении r на некоторую последовательность отрицательных целых чисел. Основной упор в статье сделан на иллюстрации использования q -тождеств для получения сравнений для $p_r(n)$.

Ключевые слова: q -тождество, сравнение для числа разбиений, обобщенное число разбиений Рамануджана.

УДК: 511.218

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-7-83-88

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении всей статьи используем следующий сдвинутый q -факториал (q -символ Похгаммера):

$$(x; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - xq^k), \quad |q| < 1.$$

Для $|xy| < 1$ обобщенная тета-функция Рамануджана $f(x, y)$ задается формулой

$$f(x, y) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}} y^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Ввиду тождества тройного произведения Якоби ([1], с. 35) имеем

$$f(x, y) = (-x; xy)_\infty (-y; xy)_\infty (xy; xy)_\infty.$$

Одним из специальных видов $f(x, y)$, рассмотренных С. Рамануджаном ([1], с. 36), является

$$f(-q) := f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = (q; q)_\infty.$$

Поступила в редакцию 07.08.2019, после доработки 07.08.2019. Принята к публикации 25.12.2019.

Благодарности. Первый автор благодарит SERB, DST (Индия) за одобрение проекта [EMR/2016/001601]. Исследования третьего автора частично поддержаны UGC Start-Up Research grant no. F.30-489/2019(BSR).

Для удобства будем писать $f_n = f(-q^n)$. Согласно Эйлеру $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{f_1}$, где $p(n)$ — число разбиений числа n . Обобщенное число разбиений $p_r(n)$ определяется как

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)q^n = \frac{1}{f_1^r}, \quad (1)$$

где r — ненулевое целое число. Для числа разбиений $p(n)$ так называемое «красивейшее тождество» Рамануджана имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)q^n = 5f_5^5/f_1^6$, откуда сразу следует $p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$. Обобщение сравнений по модулю степеней 5 и 7 для всех $p_r(n)$ было осуществлено К.Г. Раманатаном [2]. Позже А.О.Л. Эткин [3] обнаружил, что доказательство Раманатана неверно. М. Ньюман [4]–[6] исследовал функцию $p_r(n)$ и получил некоторые связанные с ней интересные сравнения и тождества. Функции $p_r(n)$ изучались многими математиками. Примеры замечательных работ по этой теме содержатся в [3], [7]–[18]. Для случая $r = -2$ Р. Хаммонд и Р. Льюис [19] доказали, что

$$p_{-2}(5n + \ell) \equiv 0 \pmod{5},$$

где $\ell \in \{2, 3, 4\}$. Также в работе [20] У.И.С. Чен и др., используя модулярные формы, показали, что

$$p_{-2}(25n + 23) \equiv 0 \pmod{25}.$$

Сравнительно недавно Д. Танг [21] доказал некоторые новые сравнения для $p_r(n)$ при $r \in \{-2, -6, -7\}$. Например,

$$\begin{aligned} p_{-2}\left(5^{2\delta-1}n + \frac{7 \times 5^{2\delta-1} + 1}{12}\right) &\equiv 0 \pmod{5^\delta}, \\ p_{-6}\left(5^{2\delta}n + \frac{3 \times 5^\delta + 1}{4}\right) &\equiv 0 \pmod{5^\delta}, \\ p_{-7}\left(5^{2\delta-1}n + \frac{13 \times 5^{2\delta-1} + 7}{24}\right) &\equiv 0 \pmod{5^\delta}. \end{aligned}$$

Вдохновившись приведенными выше примерами, в настоящей работе показываем, что функция $p_r(n)$ удовлетворяет некоторым новым сравнениям по модулю 5 при $r \in \{-(5\lambda+1), -(5\lambda+2), -(5\lambda+3), -(5\lambda+6), -(5\lambda+9), -(25\lambda+1), -(25\lambda+2) \mid \lambda \text{ — любое неотрицательное число}\}$. А именно, справедливы следующие сравнения.

Теорема 1. Для $r = -(5\lambda + 1)$

$$p_r(5n + 3) \equiv p_r(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 2. Для $r = -(5\lambda + 3)$

$$p_r(5n + 2) \equiv p_r(5n + 3) \equiv p_r(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 3. Для $r = -(5\lambda + 6)$

$$p_r(5n + 3) \equiv p_r(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 4. Для $r = -(25\lambda + 1)$

$$p_r(25n + 6) \equiv p_r(25n + 11) \equiv p_r(25n + 16) \equiv p_r(25n + 21) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 5. Для $r = -(25\lambda + 2)$

$$p_r(25n + 7) \equiv p_r(25n + 12) \equiv p_r(25n + 17) \equiv p_r(25n + 22) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 6. Для $r = -(5\lambda + 2)$

$$p_r(25n + 7) \equiv p_r(25n + 12) \equiv p_r(25n + 17) \equiv p_r(25n + 22) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Теорема 7. Для $r = -(5\lambda + 9)$ имеем $p_r(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1–7

Доказательство теоремы 1. Используя ([1], с. 262, п. 10(iii)), имеем

$$f_1 = f_{25}\{\alpha - q - q^2\beta\}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \alpha(q) := \frac{(q^{10}; q^{25})_\infty (q^{15}; q^{25})_\infty}{(q^5; q^{25})_\infty (q^{20}; q^{25})_\infty}, \quad \beta = \beta(q) := \frac{(q^5; q^{25})_\infty (q^{20}; q^{25})_\infty}{(q^{10}; q^{25})_\infty (q^{15}; q^{25})_\infty}.$$

Также заметим, что $\alpha\beta = 1$. Из формулы бинома Ньютона следует

$$f_1^5 \equiv f_5 \pmod{5}. \quad (3)$$

Положив $r = -(5\lambda + 1)$ в (1), получаем $\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+1)}(n)q^n = f_1^{5\lambda+1} = f_1^{5\lambda} f_1$. Подставляя сюда (2), (3), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+1)}(n)q^n \equiv f_5^\lambda f_{25}\{\alpha - q - q^2\beta\} \pmod{5}.$$

Выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+3} и q^{5n+4} , получаем требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя ([1], с. 39, п. 24(ii)), имеем

$$f_1^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - 11q^{15} + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+1) q^{p(p+1)/2},$$

что можно упростить до

$$f_1^3 = I_0(q^5) - 3qI_1(q^5) + 5q^3I_2(q^5) \quad (4)$$

или, эквивалентно,

$$f_1^3 \equiv I_0(q^5) - 3qI_1(q^5) \pmod{5}, \quad (5)$$

где I_0, I_1, I_2 — степенные ряды по степеням q^5 . Положив $r = -(5\lambda + 3)$ в (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+3)}(n)q^n = f_1^{5\lambda+3}.$$

Подставляя сюда (3) и (5), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+3)}(n)q^n \equiv f_5^\lambda \{I_0(q^5) - 3qI_1(q^5)\} \pmod{5}.$$

Выбирая с обеих сторон члены, содержащие $q^{5n+2}, q^{5n+3}, q^{5n+4}$, получаем требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 3. Возводя (4) в квадрат, имеем

$$f_1^6 = I_0^2(q^5) - 6qI_0(q^5)I_1(q^5) + 9q^2I_1^2(q^5) + 10q^3I_0(q^5)I_2(q^5) - 30q^4I_1(q^5)I_2(q^5) + 25q^6I_2^2(q^5),$$

откуда

$$f_1^6 \equiv I_0^2(q^5) + 4qI_0(q^5)I_1(q^5) + 4q^2I_1^2(q^5) \pmod{5}. \quad (6)$$

Положив $r = -(5\lambda + 6)$ в (1), имеем $\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+6)}(n)q^n = f_1^{5\lambda+6}$. Подставляя сюда (3), (6), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+6)}(n)q^n \equiv f_5^\lambda \{I_0^2(q^5) + 4qI_0(q^5)I_1(q^5) + 4q^2I_1(q^5)\} \pmod{5}. \quad (7)$$

Выбирая в (7) с обеих сторон степени q^{5n+3} и q^{5n+4} , выводим требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 4. Положив $r = -(25\lambda + 1)$ в (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+1)}(n)q^n = f_1^{25\lambda+1}.$$

Подставляя сюда (2) и (3), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+1)}(n)q^n \equiv f_{25}^{\lambda+1} \{\alpha - q - q^2\beta\} \pmod{5}. \quad (8)$$

Выбирая в (8) с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+1} , разделив на q и заменив q на $q^{1/5}$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+1)}(5n+1)q^n \equiv 4f_5^{\lambda+1} \pmod{5}.$$

Теперь, выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+k} при $1 \leq k \leq 4$, получаем требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 5. Возводя (2) в квадрат, получаем

$$f_1^2 = f_{25}^2 \{\alpha^2 - 2q\alpha - q^2 + 2q^3\beta + q^4\beta^2\}. \quad (9)$$

Положив $r = -(25\lambda + 2)$ в (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+2)}(n)q^n = f_1^{25\lambda+2}.$$

Подставляя сюда (3) и (9), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+2)}(n)q^n \equiv f_{25}^{\lambda+2} \{\alpha^2 - 2q\alpha - q^2 + 2q^3\beta + q^4\beta^2\} \pmod{5}.$$

Выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие $q^{5\lambda+2}$, разделив на q^2 и заменив q на $q^{1/5}$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(25\lambda+2)}(5n+2)q^n \equiv 4f_5^{\lambda+2} \pmod{5}.$$

Теперь, выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+k} при $1 \leq k \leq 4$, получаем требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 6. Полагая $r = -(5\lambda + 2)$ в (1), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+2)}(n)q^n = f_1^{5\lambda+2}.$$

Подставляя сюда (3), (9), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+2)}(n)q^n \equiv f_5^{\lambda+10} \{\alpha^2 - 2q\alpha - q^2 + 2q^3\beta + q^4\beta^2\} \pmod{5}.$$

Выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие $q^{5\lambda+2}$, разделив на q^2 и заменив q на $q^{1/5}$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+2)}(5n+2)q^n \equiv 4f_1^{\lambda+10} \pmod{5}.$$

Выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+k} при $1 \leq k \leq 4$, получаем требуемые сравнения. $\square$

Доказательство теоремы 7. Учитывая (5), имеем

$$f_1^9 \equiv I_0^3(q^5) + 4qI_0^2(q^5)I_1(q^5) + 2q^2I_0(q^5)I_1^2(q^5) + 3q^3I_1^3(q^5) \pmod{5}. \quad (10)$$

Положив $r = -(5\lambda + 9)$ в (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+9)}q^n = f_1^{5\lambda+9}.$$

Подставляя сюда (3), (10), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-(5\lambda+9)}(n)q^n \equiv f_5^{\lambda} \{I_0^3(q^5) + 4qI_0^2(q^5)I_1(q^5) + 2q^2I_0(q^5)I_1^2(q^5) + 3q^3I_1^3(q^5)\} \pmod{5}.$$

Выбирая здесь с обеих сторон члены, содержащие q^{5n+4} , получаем требуемое сравнение. $\square$

Авторы благодарят профессора А. Bayad из Université d'Évry Val d'Essonne (Франция) за его ценные советы в процессе подготовки этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berndt B. C. *Ramanujan's Notebooks*, III (Springer, New York, 1991).
- [2] Ramanathan K.G. *Identities and congruences of the Ramanujan type*, Canad. J. Math., **2**, 168–178 (1950).
- [3] Atkin A.O.L. *Ramanujan congruences for $p_k(n)$* , Canad. J. Math., **20**, 67–78 (1968).
- [4] Newmann M. *An identity for the coefficients of certain modular forms*, J. Lond. Math. Soc., **30**, 488–493 (1955).
- [5] Newmann M. *Congruence for the coefficients of modular forms and some new congruences for the partition function*, Canad. J. Math., **9**, 549–552 (1957).
- [6] Newmann M. *Some theorems about $p_k(n)$* , Canad. J. Math., **9**, 68–70 (1957).
- [7] Andrews G.E. in: G.-C. Rota(Ed.), *The Theory of Partitions*, in: Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 2, Addison-Wesley, Reading, 1976 (Reprinted: Cambridge Univ. Press, London and New York, 1984).
- [8] Baruah N.D. and Ojah K.K. *Some congruences deducible from Ramanujan's cubic continued fraction*, Int. J. Number Theory, **7**, 1331–134 (2011).
- [9] Baruah N.D. and Sarmah B.K. *Identities and congruences for the general partition and Ramanujan τ functions*, Indian J. of pure and Appl. Math., **44** (5), 643–671 (2013).
- [10] Boylan M. *Exceptional congruences for powers of the partition functions*, Acta Arith., **111**, 187–203 (2004).
- [11] Farkas H.M. and Kra I. *Ramanujan Partition identities*, Contemporary Math., **240**, 111–130 (1999).
- [12] Gandhi J.M. *Congruences for $p_k(n)$ and Ramanujan's τ function*, Amer. Math. Mon., **70**, 265–274 (1963).
- [13] Gordon B. *Ramanujan congruences for $p_k \pmod{11^r}$* , Glasgow Math. J., **24**, 107–123 (1983).
- [14] Kiming I. and Olsson J.B. *Congruences like Ramanujan's for powers of the partition function*, Arch. Math. (Basel), **59**(4), 348–360 (1992).
- [15] Ramanujan, S. *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n* , Proc. Cambridge Philos. Soc., **19**, 207–210 (1919).
- [16] Ramanujan S. *Congruence properties of partitions*, Proc. Lond. Math. Soc., **18** Records of 13 March 1919.

- [17] Ramanujan S. *Congruence properties of partitions*, Math. Z., 147–153 (1921).
- [18] Saikia N. and Chetry J. *Infinite families of congruences modulo 7 for Ramanujan's general partition function*, Ann. Math. Quebec., **42**(1), 127–132 (2018).
- [19] Hammond P. and Lewis R. *Congruences in ordered pairs of partitions*, Int. J. Math. Math. Sci., **45**, 2509–2512 (2004).
- [20] Chen W.Y.C., Du D.K., Hou Q.H. and Sun L.H. *Congruences of multi-partition functions modulo powers of primes*, Ramanujan J., **35**, 1–19 (2014).
- [21] Tang D. *Congruences modulo powers of 5 for k -colored partitions*, J. Number Theory, **187**, 198–214, (2018).

Белакавади Радхакришна Шриватса Кумар

Манипальский технологический институт, Манипальская Академия высшего образования,
Манипал, 576104, Индия,

e-mail: shruthikarranth@gmail.com

Шрути

Манипальский технологический институт, Манипальская Академия высшего образования,
Манипал, 576104, Индия,

e-mail: shruthikarranth@gmail.com

Д. Ранганатха

Центральный университет штата Карнатака,
Калабураги, 585367, Индия,

e-mail: ddranganatha@gmail.com.

B.R. Srivatsa Kumar, Shruthi, and D. Ranganatha

Some new congruences modulo 5 for the general partition function

Abstract. In the present work, we discover some new congruences modulo 5 for $p_r(n)$, the general partition function by restricting r to some sequence of negative integers. Our emphasis throughout this paper is to exhibit the use of q -identities to generate the congruences for $p_r(n)$.

Keywords: q -identity, Partition congruence, Ramanujan's general partition function.

Srivatsa Kumar Belakavadi Radhakrishna

Manipal Institute of Technology, Manipal Academy of Higher Education, India,
Manipal, 576104 India,

e-mail: sri_vatsabr@yahoo.com

Shruthi

Manipal Institute of Technology, Manipal Academy of Higher Education, India,
Manipal, 576104 India,

e-mail: shruthikarranth@gmail.com

D. Ranganatha

Central University of Karnataka,
Kalaburagi, 585367 India,

e-mail: ddranganatha@gmail.com.