Общероссийский математический портал

Л. Р. Борисова, С. В. Пчелинцев, О структуре альтернативных бимодулей над полупростыми артиновыми алгебрами, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-3-10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:20:51

Л.Р. БОРИСОВА, С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ

О СТРУКТУРЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ БИМОДУЛЕЙ НАД ПОЛУПРОСТЫМИ АРТИНОВЫМИ АЛГЕБРАМИ

Аннотация. Изучаются альтернативные бимодули над полупростыми артиновыми алгебрами. Бимодуль назовем *почти приводимым*, если он является прямой суммой ассоциативного и вполне приводимого подбимодулей. Доказано, что если полупростую алгебру нельзя гомоморфно отобразить на ассоциативную алгебру с делением, то альтернативный бимодуль над ней почти приводим. Приведен пример альтернативного бимодуля над полем рациональных функций от двух переменных, который не является почти приводимым.

Ключевые слова: альтернативная алгебра, неприводимый бимодуль, почти приводимый бимодуль.

УДК: 512.554

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-3-10

ВВЕДЕНИЕ

Понятия бимодуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом [1]. Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр.

Так для альтернативных алгебр основные результаты получили Р.Д. Шафер [2] и Н. Джекобсон [3], для йордановых алгебр — Н. Свартхольм [4] и Н. Джекобсон [3], для алгебр Мальцева — Р. Карлссон [5] и Е.Н. Кузьмин [6]. Для указанных классов алгебр справедливы теоремы о полной приводимости бимодулей над полупростыми конечномерными алгебрами и описана структура неприводимости бимодулей.

И.П. Шестаков [7] доказал полную приводимость альтернативных бимодулей над алгеброй обобщенных кватернионов без ограничений на размерность и характеристику.

Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй Φ_2 матриц 2-го порядка изучали Л.И. Мураками и И.П. Шестаков [8]. Было доказано, что над алгеброй Φ_2 существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и что не всякий правоальтернативный бимодуль над алгеброй Φ_2 вполне приводим.

В [9] изучались неприводимые бинарно $(-1, 1)$ -бимодули над простыми конечномерными алгебрами. В частности, было доказано, что всякий неприводимый бинарно $(-1, 1)$ -бимодуль над алгеброй A альтернативен в каждом из случаев: A — композиционная алгебра; A — конечномерная простая альтернативная алгебра характеристики 0.

В [10] изучались неприводимые альтернативные бимодули над простыми альтернативными алгебрами произвольной размерности.

Бимодуль над алгеброй A назовем *почти приводимым* (almost reducible), если он является прямой суммой ассоциативного A -подбимодуля и вполне приводимого A -подбимодуля.

Целью данной статьи является изучение альтернативных бимодулей над полупростыми артиновыми алгебрами. Она состоит из введения и трех разделов. Раздел 1 содержит известные результаты. В разделе 2 доказана

Теорема. Пусть A — простая альтернативная артинова алгебра, не являющаяся ассоциативной алгеброй с делением. Тогда альтернативный A -бимодуль является почти приводимым.

Следствие. Пусть A — полупростая альтернативная артинова алгебра, всякий ненулевой гомоморфный образ которой не является ассоциативной алгеброй с делением. Тогда альтернативный A -бимодуль почти приводим.

Наконец, в разделе 3 приведен пример альтернативного бимодуля над полем, который не является почти приводимым.

1. ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. *Альтернативные алгебры.* Всюду в работе, если не оговорено противное, термин «алгебра» означает линейную алгебру над произвольным полем Φ . Алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполнены тождества

$$x(xy) = x^2y, \quad (xy)y = xy^2.$$

Согласно теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда любые два ее элемента порождают в ней ассоциативную подалгебру (см. [11], с. 51).

Алгебра A называется *простой*, если $A^2 \neq 0$ и A не содержит собственных идеалов. Алгебра называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Всюду ниже используются обозначения:

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc) \quad \text{— ассоциатор элементов } a, b, c,$$

$$[a, b] = ab - ba \quad \text{— коммутатор,}$$

$$a \circ b = ab + ba \quad \text{— симметризованное произведение.}$$

Алгебра с единицей называется *унитальной*. Множество

$$Z(A) = \{z \in A \mid [z, A] = (z, A, A) = (A, z, A) = (A, A, z) = 0\}$$

называется *центром алгебры* A . Известно, что центр простой унитарной алгебры является полем.

Кроме того, по теореме Клейнфелда всякая простая альтернативная неассоциативная алгебра имеет структуру алгебры *Кэли–Диксона*, т. е. является 8-мерной алгеброй Кэли над своим центром (см. [11], с. 181).

Алгебра называется *артиновой* (справа), если она удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов. По теореме Жевлакова всякая полупростая альтернативная артинова алгебра является прямой суммой идеалов, каждый из которых изоморфен либо матричной алгебре Δ_n над телом Δ , либо алгебре Кэли–Диксона (см. [11], с. 292).

1.2. *Тождества.* В альтернативной алгебре справедливы тождества (см. [11], с. 69):

$$[(x, y, z), t] = (xy, z, t) + (yz, x, t) + (zx, y, t), \quad (1)$$

кроме того, ассоциатор является кососимметрической функцией своих аргументов и выполнены тождества Муфанг (см. [11], с. 50)

$$(x^2, y, z) = (x, y, z) \circ x = (x, y, x \circ z), \quad (2)$$

$$(x, y, yz) = (x, y, z)y, \quad (x, y, zx) = x(x, y, z);$$

тождество Клейнфелда [12]

$$(xy, z, t) + (x, y, [z, t]) = x(y, z, t) + (x, z, t)y. \quad (3)$$

Далее, справедливо *коммутаторное тождество*

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + 3(x, y, z), \quad (4)$$

а также тождество (см. [13])

$$2(a, xy, s) = 2(a, x, s)y + 2(a, y, s)x + (a, [x, y], s) + (a, x, [s, y]) + (a, y, [s, x]). \quad (5)$$

1.3. *Альтернативные бимодули.* Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Общее понятие бимодуля M над алгеброй A в многообразии $\mathfrak{M}$ принадлежит С. Эйленбергу [1]. Допустим, что для каждого $a \in A$ заданы отображения

$$M \rightarrow M, \quad m \mapsto am, \quad M \rightarrow M, \quad m \mapsto ma.$$

Предполагается, что композиции am , ma билинейны. Рассмотрим расщепляемое нулевое расширение $E = M \oplus A$, т. е. пространство $M \oplus A$ относительно умножения

$$(m_1 + a_1)(m_2 + a_2) = (m_1 a_2 + a_1 m_2) + a_1 a_2.$$

Если $E \in \mathfrak{M}$, то говорят, что M является $\mathfrak{M}$ -*бимодулем над алгеброй A* .

Например, алгебра $E = M \oplus A$ ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра A ассоциативна и $(a_1, a_2, m) = (a_1, m, a_2) = (m, a_1, a_2) = 0$ для всех $a_1, a_2 \in A, m \in M$.

Алгебра $E = M \oplus A$ альтернативна тогда и только тогда, когда алгебра A альтернативна и для всех $a_1, a_2 \in A, m \in M$ выполнены равенства

$$(m, a_1, a_2) = -(a_1, m, a_2) = (a_1, a_2, m), \quad (m, a_1, a_1) = 0.$$

Пусть $Z = Z(A)$ — центр алгебры A . Бимодуль M над A называется *центральным*, если выполнены равенства

$$[M, Z] = (M, Z, A) = (Z, A, M) = (A, M, Z) = 0.$$

В этом случае пространство M можно рассматривать как бимодуль над Z -алгеброй A .

1.4. *Вполне приводимые модули и бимодули.* Бимодуль M над алгеброй A называется *неприводимым*, если $MA + AM \neq 0$ и M не содержит собственных A -подбимодулей. Бимодуль называется *вполне приводимым*, если он является суммой неприводимых подбимодулей. Известно [14], что всякий правый унитарный ассоциативный модуль над полупростой ассоциативной артиновой алгеброй вполне приводим. Однако структура ассоциативных бимодулей над полупростой ассоциативной артиновой алгеброй до конца не изучена.

Правые представления альтернативных и правоальтернативных алгебр изучали А.М. Слинько и И.П. Шестаков [15].

Теорема о полной приводимости альтернативных бимодулей над конечномерными полупростыми альтернативными алгебрами была доказана Н. Джекобсоном [3]. Он же описал неприводимые альтернативные бимодули над простыми конечномерными альтернативными алгебрами. Их структура будет приведена при доказательстве теоремы.

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ БИМОДУЛИ НАД ПРОСТЫМИ АРТИНОВЫМИ АЛГЕБРАМИ

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения:

H — алгебра обобщенных кватернионов над основным полем Φ ;

C — алгебра Кэли над основным полем Φ ;

Δ_n — алгебра $n \times n$ матриц над телом Δ ; e_{ij} — матричные единицы;

A — простая унитарная альтернативная артинова алгебра;

M — унитарный альтернативный A -бимодуль.

Напомним определение алгебры обобщенных кватернионов $H = H(\lambda, \mu)$, где $\lambda, \mu \in \Phi^\times$ (множество ненулевых скаляров из Φ).

Элементы $1, i, j, k$ образуют базис для H , а таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} i^2 &= \lambda, & j^2 &= \mu, & k^2 &= -\lambda\mu, & ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = -\mu i, & ki &= -ik = -\lambda j, \end{aligned}$$

вместе с условием $1a = a = a1$; скаляры $\alpha \in \Phi$ отождествляются с элементами $\alpha 1$.

Пусть A — алгебра над полем Φ . Линейный оператор φ , действующий на векторном пространстве A , называется *инволюцией* алгебры A , если

$$(x^\varphi)^\varphi = x \text{ и } (xy)^\varphi = (y^\varphi)(x^\varphi) \text{ для любых } x, y \in A.$$

Алгебра H имеет инволюцию $a \rightarrow \bar{a}$ такую, что

$$\bar{a} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k, \text{ если } a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k.$$

Эта инволюция называется *стандартной* (см. [16], с. 16).

Заметим, что алгебра матриц 2-го порядка Φ_2 является алгеброй обобщенных кватернионов $H(1, 1)$. Действительно, полагая

$$i = e_{12} + e_{21}, \quad j = e_{11} - e_{22}, \quad k = e_{21} - e_{12},$$

получаем $\lambda = i^2 = 1, \mu = j^2 = 1, i \circ j = 0$. Отметим также, что стандартная инволюция на $H(1, 1)$ совпадает с симплектической инволюцией на Φ_2 .

2.1. Альтернативные унитарные бимодули над алгебрами Δ_2 . Докажем, что всякий альтернативный бимодуль M над алгеброй матриц $A = \Delta_2$, где Δ — ассоциативная алгебра с делением, почти приводимым. Положим $S = \Phi_2$ и $A = S \cdot \Delta$, причем подалгебры S и Δ коммутируют.

Лемма 1. *Для S -бимодуля M справедливы равенства*

$$(M, S, \Delta) = 0, \tag{6}$$

$$[(M, \Delta, \Delta), S] = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что если e — идемпотент в A , т.е. $e^2 = e$, то в силу (2) и (3) для любых $m \in M, \delta \in \Delta$ имеем

$$(m, e, \delta) = (m, e^2, \delta) = (m, e, e \circ \delta) = 2(m, e, e\delta) = 2(m, e, \delta)e.$$

Отсюда вытекает $(m, e, \delta) = 0$, в частности, для $i = 1, 2$ верно

$$(m, e_{ii}, \delta) = 0. \tag{8}$$

Используя тождество (5), для любых $m \in M, r, s \in S, \delta \in \Delta$ имеем

$$2(x, rs, \delta) = 2(x, r, \delta)s + 2(x, s, \delta)r + (x, [r, s], \delta),$$

отсюда на основании равенства (8) для индексов $i \neq j$ верно

$$2(m, e_{ii}e_{ij}, \delta) = 2(m, e_{ij}, \delta)e_{ii} + (m, [e_{ii}, e_{ij}], \delta),$$

значит, $(m, e_{ij}, \delta) = 2(m, e_{ij}, \delta)e_{ii}$, откуда $(m, e_{ij}, \delta) = 0$. Из последнего равенства в силу (8) получаем (6). Из равенств (6) и (1) вытекает равенство (7). $\square$

Напомним, что бимодуль M над алгеброй S называется *бимодулем Кэли*, если для любых $a \in S, m \in M$ верно равенство

$$\bar{a}m = ma,$$

где $a \mapsto \bar{a}$ — симплектическая инволюция в S . Заметим, что M является бимодулем Кэли тогда и только тогда, когда

$$m \circ a = 0$$

для любых $m \in M, a \in S$ таких, что $\bar{a} = -a$. Далее, векторное пространство M с базисом m_1, m_2 называется *стандартным S -бимодулем Кэли*, если

$$\bar{e}_{ij}m_k = m_k e_{ij} = \delta_{kj}m_i,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. В этом случае для любых $m \in M, a, b \in S$

$$(ma)b = m(ba).$$

Согласно [3], [7] всякий альтернативный S -бимодуль имеет разложение $M = M_a \oplus M_c$, где M_a — ассоциативный S -бимодуль, M_c — бимодуль Кэли. Кроме того, всякий альтернативный неприводимый унитарный S -бимодуль является либо регулярным S -бимодулем, либо стандартным бимодулем Кэли.

Допустим, как и прежде, что S -бимодуль M унитарен.

Лемма 2. *Пространства M_a и M_c являются A -подбимодулями в M .*

Доказательство. Покажем, что M_a является бимодулем над Δ . Пусть $m_a \in M_a, \delta \in \Delta$. Тогда найдутся $m'_a \in M_a, m_c \in M_c$ такие, что

$$m_a \delta = m'_a + m_c.$$

Поскольку в силу тождества Клейнфелда (3) и равенства (6) для любых $r, s \in S$ верно

$$(M_a \delta, r, s) = 0,$$

отсюда $0 = (m_c, r, s) = -m_c[r, s]$, значит, $m_c = 0$ и $m_a \delta = m'_a \in M_a$. Аналогично проверяется, что $\delta m_a \in M_a$. Тогда в силу (6) получаем, что M_a является A -подбимодулем в M .

Покажем, что M_c является A -подбимодулем в M . Если $m_c \delta = m_a + m'_c$, то

$$\begin{aligned} (m_c \delta, r, s) &= (m'_c, r, s), & (m_c, r, s) \delta &= (m'_c, r, s), \\ m_c[r, s] \delta &= m'_c[r, s], & m_c \delta &= m'_c. \end{aligned}$$

Значит, $M_c \Delta \subseteq M_c$. Аналогично, $\Delta M_c \subseteq M_c$. Наконец, ввиду (6) имеем

$$\begin{aligned} M_c A &= M_c(S \Delta) = (M_c S) \Delta \subseteq M_c \Delta \subseteq M_c, \\ A M_c &= (S \Delta) M_c = S(\Delta M_c) \subseteq S M_c \subseteq M_c. \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3. *Если $M_c \neq 0$, то тело Δ коммутативно и M_c централен над полем Δ .*

Доказательство. Поскольку $(m, a, b) = -m[a, b]$ для любых $m \in M_c, a, b \in S$, то в силу (7), включения $[S, S] \subseteq S$ и тождества (4) имеем

$$[M_c[S, S], \Delta] = 0 \quad \text{и} \quad [M_c, \Delta] = 0.$$

Отсюда в силу леммы 2 и тождества (4) получаем $M_c[\Delta, \Delta] = 0$. Если $M_c \neq 0$, то $[\Delta, \Delta] = 0$. Кроме того, бимодуль M_c централен над полем Δ . $\square$

2.2. Доказательство теоремы и следствия. Известна координационная теорема для алгебр Кэли–Диксона, доказанная Капланским и Джекобсоном:

Если унитарная альтернативная алгебра A содержит алгебру Кэли–Диксона C с той же единицей, то A изоморфна тензорному произведению $A = B \otimes_{\Phi} C$ для некоторой ассоциативно-коммутативной алгебры B .

В работах Капланского и Джекобсона эта теорема была доказана с ограничением на характеристику (не 2), но теорема верна и без этого ограничения (см. [17]). Пусть V — унитарный бимодуль над C , тогда, применяя эту теорему для расщепляемого нулевого расширения $E = C \oplus V$, мы получим $E = B \otimes_{\Phi} C$, где B содержится в центре E . Если $\{b_i\}$ — базис алгебры B , то C -бимодуль E является суммой неприводимых бимодулей $b_i C$, изоморфных регулярному бимодулю $\text{Reg } C$. Следовательно, бимодуль E вполне приводим, и его подбимодуль V также вполне приводим.

Как отмечено в [3], с помощью методов Цорна можно доказать, что если алгебра B альтернативна и имеет единицу 1, а A является ассоциативной центральной простой подалгеброй, содержащей 1 и имеющей размерность больше чем 4, то B обязательно ассоциативна.

Если A — алгебра матриц Δ_2 , то $M = M_a \oplus M_c$, где M_a является ассоциативным A -бимодулем, M_c является суммой стандартных бимодулей Кэли, которые присутствуют только в случае, когда Δ является полем. Тем самым, доказательство теоремы завершено в предположении, что A -бимодуль M унитарен. Допустим, что M — неунитарный бимодуль над алгеброй A . Рассмотрим его пирсово разложение относительно единицы 1:

$$M = M_{11} \oplus M_{10} \oplus M_{01} \oplus M_{00},$$

где $M_{ij} = \{x_{ij} | 1 \cdot x_{ij} = ix_{ij}, x_{ij} \cdot 1 = jx_{ij}\}$ и $i, j = 0, 1$. Учитывая равенство $(M, 1, A) = 0$ (вытекающее из (2)), получаем $AM_{01} = 0$ и $(A, A, M_{01}) = 0$. Значит, M_{01} является ассоциативным A -подбимодулем в M . Точно также и остальные компоненты M_{10} и M_{00} являются ассоциативными A -подбимодулями в M .

Перейдем к доказательству следствия. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — унитарные альтернативные алгебры; e_i — единица алгебры A_i . Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ — прямая сумма этих алгебр. Единицей 1 алгебры A является элемент $e_1 + \dots + e_k$. Система $e_1, \dots, e_k$ состоит из центральных ортогональных идемпотентов алгебры A . Пусть M — альтернативный бимодуль над алгеброй A . Сначала разложим M в прямую сумму пирсовых компонент относительно 1:

$$M = M_{11} \oplus M_{10} \oplus M_{01} \oplus M_{00}.$$

Как отмечалось ранее, пространство $M_{10} \oplus M_{01} \oplus M_{00}$ является ассоциативным A -бимодулем. Учитывая равенства $(M, e_i, A) = 0$ и $(M, A_i, A_j) = 0$ при $i \neq j$, пространство M_{11} разложим в прямую сумму пирсовых компонент относительно набора идемпотентов $e_1, \dots, e_k$:

$$M_{11} = \oplus_{i,j} P_{ij}, \text{ где } P_{ij} = e_i M_{11} e_j.$$

Отметим, что P_{ij} является A -бимодулем, причем на P_{ij} все слагаемые, кроме A_i , действуют слева нулевым образом, а A_i действует слева унитарно; аналогично, на P_{ij} справа унитарно действует A_j , а все остальные слагаемые действуют нулевым образом. Если $P_{ij} \neq 0$, то алгебра $A_i + A_j$ должна быть ассоциативна и данный бимодуль также ассоциативен. Наконец, осталось заметить, что P_{ii} является унитарным A_i -бимодулем; все остальные алгебры A_j действуют на нем нулевым образом. Из сказанного немедленно вытекает следствие.

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ БИМОДУЛИ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $A = \Phi(s, t)$ — поле рациональных функций от двух переменных и $[A]$ — линейная копия пространства A над Φ . На алгебре A определим билинейное отображение:

$$\{u, v\} = u'_s v'_t - u'_t v'_s,$$

где u'_s — частная производная u по переменной s . Эта скобка является скобкой Пуассона, т. е. она кососимметрична и удовлетворяет равенству

$$\{uv, w\} = u\{v, w\} + \{u, w\}v.$$

Рассмотрим векторное пространство $M = A \otimes_{\Phi} A \oplus [A]$ над полем Φ . Пусть $u, v, a \in A$. Определим бимодульные действия A на M :

$$\begin{aligned} (u \otimes v) \cdot a &= u \otimes (va) + [u\{v, a\}], \\ a \cdot (u \otimes v) &= (au) \otimes v + [u\{a, v\} - \{a, u\}v], \\ a \cdot [u] &= [u] \cdot a = [au]. \end{aligned}$$

Докажем, что построенный A -бимодуль альтернативен. Для этого вычислим необходимые ассоциаторы, считая $u, v, f, g \in A$,

$$\begin{aligned} (u \otimes v, f, g) &= ((u \otimes v) \cdot f) \cdot g - (u \otimes v) \cdot (fg) = (u \otimes (vf)) \cdot g + [u\{v, f\}g] - u \otimes (vfg) - \\ &\quad - [u\{v, fg\}] = u \otimes (vfg) + [u\{vf, g\}] + [u\{v, f\}g] - u \otimes (vfg) - [u\{v, fg\}] = \\ &= [u\{vf, g\}] + [u\{v, f\}g] - [u\{v, fg\}] = u[v\{f, g\}] + \{v, g\}f + \{v, f\}g - \{v, fg\} = [u\{f, g\}v], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f, u \otimes v, g) &= (f \cdot (u \otimes v)) \cdot g - f \cdot ((u \otimes v) \cdot g) = ((fu) \otimes v + [u\{f, v\} - \{f, u\}v]) \cdot g - f \cdot (u \otimes (vg) + \\ &\quad + [u\{v, g\}]) = (fu) \otimes (vg) + [fu\{v, g\}] + [u\{f, v\}g - \{f, u\}vg] - (fu) \otimes (vg) - [u\{f, vg\}] + \\ &\quad + [\{f, u\}vg] - [fu\{v, g\}] = [fu\{v, g\}] + u\{f, v\}g - \{f, u\}vg - u\{f, vg\} + \{f, u\}vg - fu\{v, g\} = \\ &= [fu\{v, g\}] + u\{f, v\}g - \{f, u\}vg - u\{f, v\}g - u\{f, g\}v + \{f, u\}vg - fu\{v, g\} = -[u\{f, g\}v], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f, g, u \otimes v) &= (fg) \cdot (u \otimes v) - f \cdot (g \cdot (u \otimes v)) = (fgu) \otimes v + [u\{fg, v\} - \{fg, u\}v] - \\ &\quad - f \cdot ((gu) \otimes v + [u\{g, v\} - \{g, u\}v]) = (fgu) \otimes v + [u\{fg, v\} - \{fg, u\}v] - \\ &\quad - (fgu) \otimes v + [-gu\{f, v\} + \{f, gu\}v] - [fu\{g, v\}] + [\{g, u\}fv] = \\ &= [u\{fg, v\} - \{fg, u\}v - gu\{f, v\} + \{f, gu\}v - fu\{g, v\} + f\{g, u\}v] = [uf\{g, v\} + ug\{f, v\} - \\ &\quad - \{f, u\}gv - \{g, u\}fv - \{f, v\}gu + \{f, g\}uv + \{f, u\}gv - fu\{g, v\} + f\{g, u\}v] = [\{f, g\}uv]. \end{aligned}$$

Всякий неприводимый альтернативный бимодуль над ассоциативной и коммутативной алгеброй ассоциативен. Значит, бимодуль M над полем не является почти приводимым. Легко понять, что всякий альтернативный бимодуль над полем $\Phi(t)$ ассоциативен, значит, вполне приводим.

Остается открытым вопрос: верно ли, что всякий альтернативный бимодуль над некоммутативной ассоциативной алгеброй с делением почти приводим?

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за ряд полезных замечаний, позволивших сократить доказательство теоремы и снять ограничения на характеристику (в первоначальном варианте она предполагалась отличной от 2 и 3).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eilenberg S. *Extensions of general algebras*, Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 125–134 (1948).
- [2] Schafer R. D. *Representations of alternative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 1–17 (1952).
- [3] Jacobson N. *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka J. Math. **6**, 1–71 (1954).
- [4] Svartholm N. *On the algebras of relativistic quantum mechanics*, Proc. Royal Physiographical Soc. Lond. **12**, 94–108 (1942).

- [5] Carlsson R. *Malcev-Moduln*, J. Reine Angeq. Math. **281**, 199–210 (1976).
- [6] Кузьмин Е.Н. *Алгебры Мальцева и их представления*, Алгебра и логика **7**, 48–69 (1968).
- [7] Шестаков И.П. *Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики*, Алгебра и логика **36** (6), 675–716 (1997).
- [8] Murakami L.I. and Shestakov I.P. *Irreducible unital right alternative bimodules*, J. Algebra **246**, 897–914 (2001).
- [9] Пчелинцев С.В. *Неприводимые бинарно $(-1, 1)$ -бимодули над простыми конечномерными алгебрами*, Сиб. матем. журн. **47** (5), 1139–1146 (2006).
- [10] Shestakov I. and Trushina M. *Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (7), 4657–4684 (2016).
- [11] Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным* (Наука, М., 1978).
- [12] Kleinfeld E. *Right alternative rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 939–944 (1953).
- [13] Пчелинцев С.В. *О центральных идеалах конечно порожденных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр*, Матем. сб. **193** (4), 113–134 (2002).
- [14] Джекобсон Н. *Строение колец* (Изд-во Инлит, М., 1961).
- [15] Слинко А.М., Шестаков И.П. *Правые представления алгебр*, Алгебра и логика **13** (5), 544–587 (1974).
- [16] Jacobson N. *Structure and representations of Jordan algebras* (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 39, Amer. Math. Soc., 1968).
- [17] Solis V.H.L. *Kronecker factorization theorems for alternative superalgebras*, J. Algebra **528**, 311–338. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.03.01>

Борисова Людмила Робертовна

Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., д. 49, г. Москва, 125993, Россия,
e-mail: borisovalr@mail.ru

Пчелинцев Сергей Валентинович

Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., д. 49, г. Москва, 125993, Россия,
e-mail: pchelintsev@mail.ru

L.R. Borisova and S.V. Pchelintsev

On the structure of alternative bimodules over semisimple artinian algebras

Abstract. The alternative bimodules over semisimple artinian algebras are studied. A bimodule is called *almost reducible* if it is a direct sum of an associative subbimodule and a completely reducible subbimodule. It is proved that if a semisimple algebra cannot be homomorphically mapped onto a associative division algebra, then an alternative bimodule above it is almost reducible. An example of an alternative bimodule over a field of rational functions of two variables, which is not almost reducible, is given.

Keywords: alternative algebra, irreducible bimodule, almost reducible bimodule.

Ludmila Robertovna Borisova

Finance University under the Government,
49 Leningradsky Ave., Moscow, 125993 Russia,
e-mail: borisovalr@mail.ru

Sergey Valentinovich Pchelintsev

Finance University under the Government,
49 Leningradsky Ave., Moscow, 125993 Russia,
e-mail: pchelintsev@mail.ru