Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, О принципе максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 11–17

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-11-17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 02:27:55

А.Б. ЗАЙЦЕВ

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В работе исследуются условия, достаточные для того, чтобы для функции, являющейся решением эллиптического уравнения с частными производными второго порядка в единичном круге на плоскости, выполнялся принцип максимума. Доказано, что если коэффициент квазиконформности такой функции удовлетворяет определенным граничным условиям, то для данной функции выполняется принцип максимума. При доказательстве основного результата используются интегральные представления решений данного уравнения, а также известные свойства интеграла типа Коши и функций классов Харди и Смирнова.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, принцип максимума, коэффициент квазиконформности.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-11-17

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$L = \bar{\partial}\partial_{\beta}, \quad (1)$$

где $\bar{\partial}$ — оператор Коши–Римана, $\partial_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta i \frac{\partial}{\partial y}$, $-1 < \beta < 0$. В данной работе исследуются условия, при которых для решения u уравнения

$$Lu = 0 \quad (2)$$

в единичном круге B выполняется принцип максимума. Более конкретно, пусть $u(z)$ непрерывна в замкнутом единичном круге $\bar{B}$ и удовлетворяет уравнению (2) в B . Требуется найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы выполнялось неравенство $|u(z)| < \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |u(e^{it})|$ при всех $z \in B$.

Для гармонических функций (при $\beta = -1$) данный принцип максимума выполняется в любой области Каратеодори.

Необходимо отметить ([1], теорема 7.3), что для всякой функции $u(z)$, непрерывной на $\bar{B}$ и удовлетворяющей уравнению (2) ($-1 < \beta < 0$) в B , выполняется слабый принцип максимума, т.е. при всех $z \in B$ $|u(z)| < C \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |u(e^{it})|$, где константа $C > 1$ зависит только от параметра β .

В работе автора ([2], теорема 1) найдены достаточные условия, при которых функция $u(z)$, непрерывная на $\overline{B}$ и удовлетворяющая уравнению (2) в B , взаимно однозначно отображает круг B на некоторую область. Соответственно при этих условиях для функции $u(z)$ выполняется принцип максимума в B .

Пусть функция $u(z)$ непрерывно дифференцируема в B и непрерывна на $\overline{B}$. Обозначим $k_u(z) = \frac{\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial u(z)}{\partial z}}$ — коэффициент квазиконформности функции u . Если $|k_u(z)| < 1$ при всех $z \in B$, то функция $u(z)$ локально обратима в B , следовательно, для нее выполняется принцип сохранения области: образ круга B при отображении функцией u является областью. Таким образом, для функции u в B выполняется принцип максимума. Указанный момент является ключевым при доказательстве основного результата данной работы.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Введем следующие обозначения. Пусть $z_\beta = x + \frac{i}{\beta}y = \frac{\beta+1}{2\beta}z + \frac{\beta-1}{2\beta}\bar{z}$. Определим линейное отображение T_β плоскости $\mathbb{C}$ по формуле $T_\beta(z) = z_\beta$.

Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2) в области D . Тогда

$$u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta), \quad (3)$$

где функции f и f_β голоморфны в областях D и $T_\beta(D)$ соответственно.

Пусть функция $u(z)$ непрерывна на замкнутом круге $\overline{B}$, а в B удовлетворяет уравнению (2). Тогда при всех $z \in B$ данная функция представляется в виде $u(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_\beta(t, z) dt$, где ([3], теорема 1)

$$P_\beta(t, z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{e^{it} - z} - \frac{1}{1 - \frac{\beta+1}{\beta-1}e^{it}z} - \frac{(\beta+1)e^{it} - (\beta-1)e^{-it}}{(\beta+1)(e^{it} - z) - (\beta-1)(e^{-it} - \bar{z})} \right). \quad (4)$$

Лемма. Пусть $-1 < \beta \leq -\frac{7}{10}$. Тогда $\Re P_\beta(t, z) > 0$ при всех $t \in [0; 2\pi]$ и $z \in B$.

Доказательство. Приведя выражение (4) к общему знаменателю, получаем

$$\Re P_\beta(t, z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(1 - |z|^2)Q(t, z)}{|e^{it} - z|^2 |1 - \frac{\beta+1}{\beta-1}e^{it}z|^2 |(\beta+1)e^{it} - (\beta-1)e^{-it}|^2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} Q(t, z) = & \left| 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}e^{it}z \right|^2 \left(|e^{it} - z|^2 + \frac{\beta+1}{\beta-1}\Re(e^{it} - z)^2 \right) - \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 |e^{it} - z|^4 + \\ & + \frac{1+\beta}{1-\beta} |e^{it} - z|^2 \Re \left((e^{it} - z) \left(e^{it} - \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 z \right) \right). \end{aligned}$$

При всех $t \in [0; 2\pi]$ и $z \in B$ имеет место неравенство

$$Q(t, z) \geq |e^{it} - z|^2 \left(-\frac{8\beta^3}{(1-\beta)^3} - 2\frac{(1+\beta)(1+\beta^2)}{(1-\beta)^3} |e^{it} - z| - \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 |e^{it} - z|^2 \right).$$

Так как $0 \leq |e^{it} - z| \leq 2$ при $t \in [0; 2\pi]$ и $z \in B$, то достаточно доказать, что

$$-\frac{8\beta^3}{(1-\beta)^3} - 2\frac{(1+\beta)(1+\beta^2)}{(1-\beta)^3}\lambda - \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2\lambda^2 > 0 \quad (5)$$

при $-1 \leq \beta \leq -\frac{7}{10}$ и $0 \leq \lambda \leq 2$.

Левая часть неравенства (5) — многочлен второй степени относительно λ , который имеет корни $\frac{-(1+\beta^2) \pm \sqrt{(1+\beta^2)^2 - 8\beta^3(1-\beta)}}{1-\beta^2}$.

Для того чтобы неравенство (5) выполнялось при $-1 \leq \beta \leq -\frac{7}{10}$ и $0 \leq \lambda \leq 2$, необходимо и достаточно, чтобы при $-1 < \beta \leq -\frac{7}{10}$ имело место неравенство

$$\frac{-(1+\beta^2) + \sqrt{(1+\beta^2)^2 - 8\beta^3(1-\beta)}}{1-\beta^2} > 2. \quad (6)$$

При $-1 < \beta < 0$ неравенство (6) эквивалентно неравенству $\beta^3 + \beta + 1 < 0$. Левая часть последнего неравенства монотонно возрастает на промежутке $(-1; 0)$. При $\beta = -\frac{7}{10}$ имеем $\beta^3 + \beta + 1 = -0.043 < 0$. Поэтому при $-1 < \beta \leq -\frac{7}{10}$ $\beta^3 + \beta + 1 < 0$, а значит, выполняется (6). Следовательно, при $-1 \leq \beta \leq -\frac{7}{10}$ и $0 \leq \lambda \leq 2$ имеет место неравенство (5). Поэтому при всех $t \in [0; 2\pi]$ и $z \in B$ имеет место $Q(t, z) > 0$, а значит, $\Re P_\beta(t, z) > 0$. $\square$

Заметим, что при значениях β , достаточно близких к нулю, лемма перестает быть верной. Действительно, полагая $\beta = 0$, имеем $Q(t, re^{is}) = |1 + re^{i(s+t)}|^2(|e^{it} - re^{is}|^2 - \Re(e^{it} - re^{is})^2) - |e^{it} - re^{is}|^4 + |e^{it} - z|^2 \Re((e^{it} - re^{is})^2) = (|1 + re^{i(s+t)}|^2 - |e^{it} - re^{is}|^2)(|e^{it} - re^{is}|^2 - \Re(e^{it} - re^{is})^2) = 4r \cos s \cos t (|e^{it} - re^{is}|^2 - \Re(e^{it} - re^{is})^2)$. Выбрав s, t и r так, чтобы $\cos s \cos t < 0$, $\Im((e^{it} - re^{is})^2) \neq 0$, получим $Q(t, re^{is}) < 0$. Следовательно, при данных s, t и r и при всех $\beta < 0$, достаточно близких к нулю, $\Re P_\beta(t, z) < 0$.

Пусть $\Phi(e^{it}) = 1$ при всех $t \in [0; 2\pi]$. Тогда $u(z) = 1$ при всех $z \in B$. Поэтому $\int_0^{2\pi} \Re P_\beta(t, z) dt = 1$ при всех $z \in B$.

Следствие. Пусть $\Phi(e^{it})$ — непрерывная на ∂B непостоянная вещественнозначная функция, $-1 < \beta \leq -\frac{7}{10}$, $u(z)$ — решение задачи Дирихле в круге B для уравнения (2) с граничной функцией $\Phi(e^{it})$. Тогда при всех $z \in B$ имеет место неравенство $\min_{\partial B} \Phi(e^{it}) < \Re u(z) < \max_{\partial B} \Phi(e^{it})$.

Доказательство. Так как $\Phi(e^{it})$ — вещественнозначная функция, то при всех $z \in B$ имеет место равенство $\Re u(z) = \int_0^{2\pi} \Phi(e^{it}) \Re P_\beta(t, z) dt$. Так как функция $\Phi(e^{it})$ непрерывна и непостоянна на ∂B , то $\min_{\partial B} \Phi(e^{it}) < \Phi(e^{it}) < \max_{\partial B} \Phi(e^{it})$ при всех значениях t , принадлежащих некоторому подмножеству отрезка $[0; 2\pi]$, имеющего положительную линейную меру. Отсюда и из леммы следует $\int_0^{2\pi} \min_{\partial B} \Phi(e^{it}) \Re P_\beta(t, z) dt < \int_0^{2\pi} \Phi(e^{it}) \Re P_\beta(t, z) dt < \int_0^{2\pi} \max_{\partial B} \Phi(e^{it}) \Re P_\beta(t, z) dt$. Таким образом, $\min_{\partial B} \Phi(e^{it}) < \Re u(z) < \max_{\partial B} \Phi(e^{it})$. $\square$

Обозначим через $C(\overline{B})$ класс функций, непрерывных на $\overline{B}$.
Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $-1 < \beta \leq -\frac{7}{10}$, функция $u(z) \in C(\overline{B})$ нелинейная и удовлетворяет уравнению (2) в круге B , производная $\frac{du(e^{it})}{dt}$ существует почти всюду на $[0; 2\pi]$ и принадлежит классу $L_p([0; 2\pi])$ при некотором $p > 1$. Предположим, что функция $k_u(z)$ имеет почти всюду на ∂B некасательные пределы, равные вещественнозначной функции $\phi(e^{it})$, обладающей следующими свойствами:

- 1) $0 < \phi(e^{it}) \leq 1$ при почти всех $t \in [0; 2\pi]$;
- 2) $\ln \phi(e^{it}) \in L_q([0; 2\pi])$, при некотором $q > 1$.

Тогда при всех $z \in B$ имеет место неравенство $|u(z)| < \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |u(e^{it})|$.

Доказательство. При всех $z \in B$ имеет место равенство $u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta)$, где функции f и f_β голоморфны в B и $T_\beta(B)$ соответственно. Так как функция $k_u(z)$ имеет почти всюду на ∂B некасательные пределы, равные функции $\phi(e^{it})$, то функция $\frac{2\beta k_u(z)}{\beta - 1 - (\beta + 1)k_u(z)} = \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}$ имеет почти всюду на ∂B некасательные пределы, равные функции $\phi_\beta(e^{it}) = \frac{2\beta \phi(e^{it})}{\beta - 1 - (\beta + 1)\phi(e^{it})}$, вещественнозначной и удовлетворяющей условию $0 \leq \phi_\beta(e^{it}) \leq -\beta$ при почти всех $t \in [0; 2\pi]$. Кроме того, так как функция $\ln \phi(e^{it}) \in L_q([0; 2\pi])$, то функция $\ln \phi_\beta(e^{it}) \in L_q([0; 2\pi])$.

Докажем, что $\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = e^{\int_0^{2\pi} \ln \phi_\beta(e^{it}) P_\beta(t, z) dt}$. При $z \in B$ обозначим

$$g(z) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{e^{it}}{e^{it} - z} + \frac{1}{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} e^{it} z} \right) \ln \phi_\beta(e^{it}) dt},$$

$$g_\beta(z_\beta) = e^{-\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\ln \phi_\beta(e^{it}) dT_\beta(e^{it})}{T_\beta(e^{it}) - z_\beta}}.$$

Таким образом, $\frac{g_\beta(z_\beta)}{g(z)} = e^{\int_0^{2\pi} \ln \phi_\beta(e^{it}) P_\beta(t, z) dt}$ при всех $z \in B$.

Так как функция $\ln \phi_\beta(e^{it})$ ограничена сверху, то функция $\Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln \phi_\beta(e^{it}) e^{it} dt}{e^{it} - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln \phi_\beta(e^{it}) (1 - \Re(e^{-it} z)) dt}{|e^{it} - z|^2}$ равномерно ограничена сверху в круге B .

Далее, так как $\ln \phi_\beta(e^{it}) \in L_q([0; 2\pi])$, $\frac{1}{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} e^{it} z} \in C(\overline{B})$, то функция $-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln \phi_\beta(e^{it}) dt}{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} e^{it} z}$ равномерно ограничена в B . Поэтому функция $\frac{1}{g(z)}$ равномерно ограничена в B и, следовательно, имеет некасательные пределы почти всюду на ∂B ([4], гл. IX, §3, с. 381).

Так как $\ln \phi_\beta(e^{it}) \in L_q([0; 2\pi])$, а $q > 1$, то $\ln g_\beta(z_\beta) \in E_q(T_\beta(B))$ ([5], гл. IV, §16, лемма 16.2). Пусть ω — конформное отображение круга B на область $T_\beta(B)$. Так как производная $\omega'(w)$ непрерывна и отлична от нуля на $\overline{B}$, то функция $\ln g_\beta(\omega(w)) \in H_q$. Следовательно,

$$g_\beta(\omega(w)) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g_\beta(\omega(e^{is}))| \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds}$$

при всех $w \in B$.

Так как $u(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_\beta(t, z) dt$, то имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{e^{it} - z} - \frac{1}{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} e^{it} z} \right) u(e^{it}) dt, \quad (7)$$

$$f_\beta(z_\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) dT_\beta(e^{it})}{T_\beta(e^{it}) - z_\beta} \quad (8)$$

при всех $z \in B$.

Дифференцируя интегралы в (7) и (8) соответственно по z и z_β и затем применяя интегрирование по частям, получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{e^{it} - z} + \frac{e^{it}}{z \left(1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} e^{it} z\right)} \right) \frac{du(e^{it})}{dt} dt, \quad (9)$$

$$f'_\beta(z_\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{du(e^{it})}{dt} T_\beta(e^{it}) dt}{T_\beta(e^{it}) - z_\beta} \quad (10)$$

при всех $z \in B$.

Так как $\frac{du(e^{it})}{dt} \in L_p([0; 2\pi])$, а $p > 1$, то из (9) и (10) следует $f'(z) \in H_p$, $f'_\beta(z_\beta) \in E_p(T_\beta(B))$.

Так как $\lim_{z \rightarrow e^{it}} \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = \lim_{z \rightarrow e^{it}} \frac{g_\beta(z_\beta)}{g(z)} = \phi_\beta(e^{it})$ для почти всех $t \in [0; 2\pi]$, то некасательные пределы функций $\frac{f'(z)}{g(z)}$ и $\frac{f'_\beta(z_\beta)}{g_\beta(z_\beta)}$ совпадают почти всюду на ∂B . Обозначим эти пределы через $\psi(e^{it})$.

Так как $f' \in H_p$, а $\frac{1}{g(z)}$ равномерно ограничена в B , то функция $\frac{f'(z)}{g(z)} \in H_p$. Следовательно, $\psi(e^{it}) \in L_p([0; 2\pi])$.

Так как $f'_\beta \in E_p(T_\beta(B))$, то $f'_\beta(\omega(w)) \in H_p$. Поэтому

$$f'_\beta(\omega(w)) = b(w)S(w)e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f'_\beta(\omega(e^{is}))| \frac{e^{is}+w}{e^{is}-w} ds},$$

где $b(w)$ — произведение Бляшке, $S(w) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}+w}{e^{is}-w} d\mu(s)}$, мера $d\mu(s)$ порождается некоторой невозрастающей на $[0; 2\pi]$ функцией $\mu(s)$, производная которой почти всюду на $[0; 2\pi]$ равна нулю ([5], гл. III, §13, с. 103).

Таким образом,

$$\frac{f'_\beta(\omega(w))}{g_\beta(\omega(w))} = b(w)S(w)e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\psi(T^{-1}(\omega(e^{is})))| \frac{e^{is}+w}{e^{is}-w} ds}.$$

Так как $\psi(e^{it}) \in L_p([0; 2\pi])$, то $\psi(T^{-1}(\omega(e^{is}))) \in L_p([0; 2\pi])$. Поэтому функция $e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\psi(T^{-1}(\omega(e^{is})))| \frac{e^{is}+w}{e^{is}-w} ds} \in H_p$ ([5], гл. III, §11, с. 93). Так как $|b(w)S(w)| \leq 1$ при всех $w \in B$, то функция $\frac{f'_\beta(\omega(w))}{g_\beta(\omega(w))} \in H_p$, а значит, функция $\frac{f'_\beta}{g_\beta} \in E_p(T_\beta(B))$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{it}) e^{int} dt = 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{it}) (T_\beta(e^{it}))^n dT_\beta(e^{it}) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует $\int_0^{2\pi} \psi(e^{it})e^{int} dt = 0$ при $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, а значит, функция $\psi(e^{it})$ является константой.

Таким образом,

$$\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = \frac{g_\beta(z_\beta)}{g(z)} = e^{\int_0^{2\pi} \ln \phi_\beta(e^{it}) P_\beta(t, z) dt} \quad \text{при } z \in B. \quad (13)$$

Предположим, что $\ln \phi_\beta(e^{it}) = \ln(-\beta)$ почти всюду на $[0; 2\pi]$. Тогда из (13) вытекает $\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} = -\beta$, а значит, $f'_\beta(z_\beta) + \beta f'(z) = 0$ при $z \in B$. Это возможно тогда и только тогда, когда функции $f'_\beta(z_\beta)$ и $f'(z)$ являются константами. Таким образом, функция $u(z)$ является линейной, что противоречит условию теоремы. Отсюда с учетом того, что $\ln \phi_\beta(e^{it}) \leq \ln(-\beta)$ почти всюду на $[0; 2\pi]$, получаем $\ln \phi_\beta(e^{it}) < \ln(-\beta)$ при всех значениях t , принадлежащих некоторому подмножеству отрезка $[0; 2\pi]$, имеющего положительную линейную меру. Отсюда, из леммы и (13) имеем $\left| \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} \right| < -\beta$ при $z \in B$. Но тогда

$$\left| \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} + \frac{1 + \beta}{2} \right| < \frac{1 - \beta}{2},$$

следовательно, $|k_u(z)| < 1$ при $z \in B$ ([6], с. 720). Поэтому для функции $u(z)$ в круге B выполняется принцип сохранения области, значит, функция $|u(z)|$ не может достигать максимума внутри B . Таким образом, $|u(z)| < \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |u(e^{it})|$ при всех $z \in B$. $\square$

Автор выражает искреннюю благодарность П.В. Парамонову и К.Ю. Федоровскому за внимание к работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Verchota G.C., Vogel A.L. *Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (11), 4501–4535 (1997).
- [2] Зайцев А.Б. *О взаимной однозначности решений эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге на плоскости*, Зап. научн. сем. ПОМИ **434**, 91–100 (2015).
- [3] Багапш А.О. *Интеграл Пуассона и функция Грина для одной эллиптической системы уравнений в круге и эллипсе*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **56** (12), 2065–2072 (2016).
- [4] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
- [5] Данилюк И.И. *Нерегулярные граничные задачи на плоскости* (Наука, М., 1975).
- [6] Зайцев А.Б. *Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка*, Матем. заметки **95** (5), 718–733 (2014).

Александр Борисович Зайцев

Российский технологический университет МИРЭА,

пр. Вернадского, д. 78, г. Москва, 119454, Россия,

e-mail: abzai75@mail.ru

A.B. Zaitsev

On the maximum principle for solutions of second order elliptic equations

Abstract. In this paper the sufficient conditions, under which the maximum principle for the solution of second order partial differential elliptic equation in the unit circle meets maximum principle are researched. It is proved that if a quasiconformality coefficient of such function satisfies certain boundary conditions then this function meets maximum principle. Proving the main result we use integral representations of solutions of this equation and properties of Cauchy type integral and functions of Hardy and Smirnov classes.

Keywords: elliptic equation, maximum principle, quasiconformality coefficient.

Alexander Borisovich Zaitsev

*Russian Technological University MIREA,
78 Vernadsky Ave., Moscow, 119454, Russia,*

e-mail: abzai75@mail.ru