Общероссийский математический портал

Р. И. Кадиев, А. В. Поносов, Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 18–35

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-18-35>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:04:58

Р.И. КАДИЕВ, А.В. ПОНОСОВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ МАТРИЦ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Аннотация. На основе теории положительно обратимых матриц исследуются вопросы экспоненциальной $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями и импульсными воздействиями на часть компонент решений. Применяются идеи и методы, разработанные Н.В. Азбелевым и его учениками для изучения устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений. Для упомянутых выше систем уравнений приводятся достаточные условия экспоненциальной $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных систем уравнений.

Ключевые слова: уравнения Ито, устойчивость решений, импульсные воздействия, положительная обратимость матрицы, ограниченные запаздывания.

УДК: 517.929: 519.21

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-18-35

ВВЕДЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные, практически важные задачи современной физики, биологии, экономики, инженерных и других прикладных наук. В частности, импульсные дифференциальные уравнения Ито с последствием являются хорошей математической моделью для финансовых процессов. Среди различных проблем, возникающих при решении таких задач, одной из важнейших является анализ устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Фундаментальные исследования в этой области быстро находят приложения, которые в свою очередь постоянно порождают новые теоретические проблемы.

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами приобрели широкий размах после появления в 1960 г. работы И.Я. Каца и Н.Н. Красовского, в которой даны основополагающие определения стохастической устойчивости и где к этим уравнениям впервые применен второй (прямой) метод Ляпунова, основанный на построении соответствующих

Поступила в редакцию 30.07.2019, после доработки 30.07.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Норвежского Совета по Науке (Norwegian Research Council), грант 239070.

функций. В дальнейшем, эта идея была распространена на уравнения Ито с последствием (метод функционалов Ляпунова—Красовского—Разумихина), которым в настоящее время также посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1]–[4]. Однако применение прямого метода Ляпунова и его стохастических аналогов во многих случаях встречает серьезные трудности. В частности, эффективные признаки устойчивости обычно удается доказывать этими методами лишь для сравнительно простых классов стохастических функционально-дифференциальных уравнений.

С другой стороны, при исследовании устойчивости в детерминированном случае высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений — «W-метод» Н.В. Азбелева [5], [6]. Этот метод был в дальнейшем применен авторами данной статьи, и в первую очередь первым из них, к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям в работах [7]–[14]. W-метод является, в принципе, универсальным, как в детерминированном, так и в стохастическом случае. Это не означает, конечно, что он всегда дает наилучшие результаты. Однако этот метод может помочь во многих «нетривиальных» ситуациях, где трудно использовать функции Ляпунова. В частности, W-метод позволяет обойти некоторые трудности традиционных схем, возникающие при изучении вопросов устойчивости для уравнений с неограниченными запаздываниями, со случайными коэффициентами и запаздываниями, а также с импульсными воздействиями.

Устойчивость решений по Ляпунову относительно начальной функции для детерминированных импульсных дифференциальных уравнений исследовалась в работах [15]–[18]. Для импульсных дифференциальных уравнений Ито с последствием вопросы устойчивости решений по начальной функции изучались для специальных классов уравнений с помощью метода Ляпунова [19]. Вопросам устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием и с импульсными воздействиями по всем компонентам решений посвящены работы [10], [12], [13], [20]. В этих работах исследование проведено по аналогии с работой [18], т. е. методом вспомогательных или «модельных» уравнений, который подробно изложен в монографиях [5], [6] для детерминированного случая и в публикациях [7], [9], [11] для стохастического случая.

В настоящей работе изучается проблема экспоненциальной $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями и с импульсными воздействиями на часть компонент решений. При этом применяются принципы метода вспомогательных уравнений и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического метода вспомогательных уравнений состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход, в сочетании с теорией положительно обратимых матриц, позволяет получить новые результаты, в том числе и в детерминированном случае, а также эффективно исследовать вопросы устойчивости для уравнений с импульсными воздействиями на часть компонент решений.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ — стохастический базис; k^n — линейное пространство n -мерных $\mathcal{F}_0$ -измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p ([21], с.65) и используемое в оценке (2); E — символ математического ожидания; $|\cdot|$ — норма в R^n ; $\|\cdot\|$ — норма $n \times n$ -матрицы, согласованная с нормой в R^n ; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X ; μ — мера Лебега на $[0, +\infty)$; l — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq l \leq n$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ — $m \times m$ -матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, m$, и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, m$.

Определение 1 ([22]). Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называется $\mathcal{M}$ -матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, и выполнено одно из следующих условий:

- для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1} ;
- главные диагональные миноры матрицы B положительны.

Согласно ([22], с.338) матрица B является $\mathcal{M}$ -матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, и если существуют положительные числа ξ_i , $i = 1, \dots, m$, такие, что выполнено одно из следующих условий:

$$\xi_i b_{ii} > \sum_{j=1, i \neq j}^m \xi_j |b_{ij}|, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{или} \quad \xi_j b_{jj} > \sum_{i=1, i \neq j}^m \xi_i |b_{ij}|, \quad j = 1, \dots, m.$$

В частности, если в первом из этих неравенств $\xi_i = 1$, $i = 1, \dots, m$, то класс $\mathcal{M}$ -матриц содержит класс матриц со строгим диагональным преобладанием ([22], с.418), внедиагональные элементы которых неположительны.

В данной работе исследуются вопросы устойчивости для системы линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями и импульсными воздействиями на часть компонент решений, записанной в виде

$$\begin{aligned} dx(t) &= - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \\ x(\mu_j) &= B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{почти наверно (п. н.)} \end{aligned} \quad (1)$$

относительно начальных данных

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \quad (1a)$$

$$x(0) = b, \quad (1b)$$

где

1. $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестный n -мерный случайный процесс;
2. $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^n$ — $n \times n$ -матрицы при всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, причем элементами матриц A_{1j} , $j = 1, \dots, m_1$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы с квадратом;
3. h_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — измеримые по Лебегу функции, заданные на $[0, \infty)$ такие, что $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$ ($t \in [0, \infty)$) μ -почти всюду для некоторых положительных чисел τ_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$;
4. μ_j , $j = 1, 2, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$;
5. B_j — вещественная диагональная $n \times n$ -матрица, причем все диагональные элементы отличны от нуля и $b_{ii}^j = 1$, $i = 1, \dots, l$, при $j = 1, 2, \dots$;
6. $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримый n -мерный случайный процесс, заданный на $[-\hat{\sigma}, 0)$, где $\hat{\sigma} = \max\{\tau_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i\}$;
7. $b = \text{col}(b_1, \dots, b_n)$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая n -мерная случайная величина, т. е. $b \in k^n$.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [8]. Обозначим это решение через $x(t, b, \varphi)$, т. е. $x(t, b, \varphi) = \varphi$ при $t < 0$ и $x(0, b, \varphi) = b$.

Введем специальное обозначение для линейного нормированного подпространства пространства k^n , определяемого как

$$k_q^n = \left\{ \alpha : \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k_q^n} = (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Определение 2. Будем говорить, что система (1) экспоненциально q -устойчива ($1 \leq q < \infty$) относительно начальных данных, если существуют положительные числа K, λ такие, что для решений $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} \leq K \exp\{-\lambda t\} \left(\|b\|_{k_q^n} + \operatorname{vrai} \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^q)^{1/q} \right) \quad (t \geq 0).$$

Лемма 1. Пусть $f(s)$ — скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(s)$ на отрезке $[0, t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) d\mathcal{B}(s) \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^p \right)^{1/(2p)}, \quad (2)$$

где c_p — некоторое число, зависящее от $p \geq 1$.

Справедливость неравенства (2) следует из неравенства (4) работы ([21], с.65), где приведено конкретное выражение для c_p .

Лемма 2. Пусть $g(s)$ — скалярная функция на $[0, \infty)$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ — скалярный случайный процесс такой, что $\sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/(2p)} < \infty$. Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(s) f(s) ds \right|^{2p} \right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(s)|^2 ds \right)^{1/2} \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/(2p)}, \quad (3)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (g(s))^2 (f(s))^2 ds \right|^p \right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t (g(s))^2 ds \right)^{1/2} \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/(2p)}. \quad (4)$$

Справедливость леммы доказана в работе [14].

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Как было отмечено во введении, устойчивость тривиального решения системы (1) будет в данной статье изучаться методом преобразования этой системы — с помощью более простого вспомогательного (модельного) уравнения — в интегральное уравнение, для которого условия, обеспечивающие устойчивость тривиального решения (1), можно проверить непосредственно.

Поэтому наряду с (1) рассмотрим вспомогательную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями на часть компонент решений вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= [B(t)x(t) + f(t)]dt \quad (t \geq 0), \\ x(\mu_j) &= B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где $B(t)$ — $n \times n$ -матрица, элементы которой измеримы по Лебегу функции, $f(t)$ — n -мерная измеримая по Лебегу функция, а $B_j, \mu_j, j = 1, 2, \dots$, — те же самые величины, что и в системе (1).

Для системы (5) построим соответствующую линейную однородную систему

$$\begin{aligned} dx(t) &= B(t)x(t)dt \quad (t \geq 0), \\ x(\mu_j) &= B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Определение 3. $n \times n$ -матрицу $X(t)$ ($t \geq 0$), столбцы которой являются решениями системы (6), причем $X(0) = \bar{E}$, назовем фундаментальной матрицей системы (5).

В силу того, что через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное решение системы (6), имеем $\det X(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Справедлива

Лемма 3. Для решения системы (5), проходящего через $x_0 \in k^n$, имеет место представление

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X(s)^{-1}f(s)ds \quad (t \geq 0). \quad (7)$$

Используя систему (5) и лемму 3, задачу (1), (1a), (1b) можно записать в эквивалентном виде

$$x(t) = X(t)b + (\Theta x)(t) + (C\varphi)(t) \quad (t \geq 0), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} (\Theta x)(t) &= \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \left[B(s) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\bar{x}(h_{1j}(s)) \right] ds + \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\bar{x}(h_{ij}(s)) d\mathcal{B}_i(s), \\ (C\varphi)(t) &= \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \left[-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\bar{\varphi}(h_{1j}(s)) \right] ds + \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\bar{\varphi}(h_{ij}(s)) d\mathcal{B}_i(s). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{x}(t)$ — неизвестный n -мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$, а $\bar{\varphi}(t)$ — известный n -мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-\hat{\sigma}, 0)$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -\hat{\sigma}) \cup [0, +\infty)$.

Сформулируем одну полезную теорему, которая следует из более общих результатов работы [12]. Справедлива

Теорема 1. Пусть $1 \leq q < \infty$ и для некоторого положительного числа λ и произвольных φ, b таких, что $\text{vrai} \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^q)^{1/q} < \infty$, $b \in k_q^n$, для системы (6) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\}X(t)b|^q)^{1/q} &\leq c_1 \|b\|_{k_q^n}, \\ \sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\}(\Theta x)(t)|^q)^{1/q} &\leq c_2 \sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\}x(t)|^q)^{1/q}, \\ \sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\}(C\varphi)(t)|^q)^{1/q} &\leq c_3 \text{vrai} \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^q)^{1/q}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные числа и $c_2 < 1$. Тогда система (1) экспоненциально q -устойчива относительно начальных данных.

На основе этой теоремы в работе [12] получены достаточные условия экспоненциальной q -устойчивости систем вида (1) в терминах параметров этих систем.

Обозначим $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ ($t \geq 0$), $\bar{x}_i^\lambda = \sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\}x_i(t)|^q)^{1/q}$, $i = 1, \dots, n$, $\bar{x}^\lambda = \text{col}(\bar{x}_1^\lambda, \dots, \bar{x}_n^\lambda)$.

Пусть $1 \leq q < \infty$ и для некоторого положительного λ нам удалось с помощью покомпонентного оценивания решений системы (8) получить матричное неравенство вида

$$\bar{E}\bar{x}^\lambda \leq C\bar{x}^\lambda + \bar{c}\|b\|_{k_q^n}\hat{E} + \hat{c}\text{vrai sup}_{t < 0}(E|\varphi(t)|^q)^{1/q}\hat{E}, \quad (9)$$

где C — некоторая $n \times n$ -матрица, $\bar{c}, \hat{c}$ — некоторые положительные числа, $\hat{E}$ — n -мерный вектор, все элементы которого равны единице. Справедлива

Теорема 2. *Если матрица $\bar{E} - C$ является M -матрицей, то система (1) экспоненциально q -устойчива относительно начальных данных.*

Доказательство. В предположениях теоремы матрица $\bar{E} - C$ положительно обратима. Следовательно, неравенство (9) можно переписать в виде

$$\bar{E}\bar{x}^\lambda \leq (\bar{E} - C)^{-1}(\bar{c}\|b\|_{k_q^n}\hat{E} + \hat{c}\text{vrai sup}_{t < 0}(E|\varphi(t)|^q)^{1/q}\hat{E}).$$

Из этого неравенства получаем

$$|\bar{x}^\lambda| \leq K(\|b\|_{k_q^n} + \text{vrai sup}_{t < 0}(E|\varphi(t)|^q)^{1/q}), \quad (10)$$

где $K = \|(\bar{E} - C)^{-1}\|\|\hat{E}\| \max\{\bar{c}, \hat{c}\}$. Поскольку $x(t, b, \varphi) = x(t)$ и $\sup_{t \geq 0}(E|\exp\{\lambda t\}x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} \leq |\bar{x}^\lambda|$, то из неравенства (10) следует, что для любых φ, b таких, что $\text{vrai sup}_{t < 0}(E|\varphi(t)|^q)^{1/q} < \infty$, $b \in k_q^n$, выполняется оценка $\sup_{t \geq 0}(E|\exp\{\lambda t\}x(t, b, \varphi)|^q)^{1/q} \leq c(\|b\|_{k_q^n} + \text{vrai sup}_{t < 0}(E|\varphi(t)|^q)^{1/q})$, где c — некоторое положительное число. Следовательно, система (1) экспоненциально q -устойчива относительно начальных данных. $\square$

В следующем разделе на основе теоремы 2 и в предположении $q = 2p$, $1 \leq p < \infty$, будут получены достаточные условия экспоненциальной q -устойчивости системы (1) в терминах положительной обратимости матрицы, вычисленной по параметрам этой системы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом разделе мы предполагаем, что существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \dots, m_1\}$, $s = 1, \dots, n$, и положительные числа $\rho, \sigma, \bar{b}_s$, $s = l + 1, \dots, n$, $\bar{a}_s, \bar{a}_{sk}^{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, $s, k = 1, \dots, n$, такие, что для системы (1) выполняются следующие оценки:

$$|b_{ss}^j| \leq \bar{b}_s, \quad s = l + 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$|a_{sk}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{sk}^{ij}, \quad t \in [0, +\infty), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad s, k = 1, \dots, n,$$

$P \times \mu$ -почти всюду,

$$\sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \geq \bar{a}_s, \quad t \in [0, +\infty), \quad s = 1, \dots, n,$$

$P \times \mu$ -почти всюду, а также существуют положительные числа $\hat{c}_s, s = l+1, \dots, n$, такие, что

$$\exp\{-\bar{a}_s t\}_{0 < \mu_j \leq t}^\square |b_{ss}^j| < \hat{c}_s \text{ при } t \in [0, +\infty), \quad s = l+1, \dots, n.$$

Пусть C — $n \times n$ -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \right] - \\ &- c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{ss}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \right], \quad s = 1, \dots, l, \\ c_{sj} &= -\frac{1}{\bar{a}_s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \right] - \\ &- c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \right], \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \right] - \\ &- c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{ss}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \right] - \\ &- c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \right], \\ &\quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \end{aligned}$$

Теорема 3. Если матрица C является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (1) экспоненциально 2ρ -устойчива относительно начальных данных.

Доказательство. Систему (1) с условием (1а) запишем в виде

$$\begin{aligned} d\bar{x}_s(t) &= - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{1j}(t) [\bar{x}_k(h_{1j}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] dt + \\ &+ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{ij}(t) [\bar{x}_k(h_{ij}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \dots, n, \\ \bar{x}_s(\mu_j) &= b_{ss}^j \bar{x}_s(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \text{ п. н. }, \quad s = l+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\bar{x}_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}_s(t) = 0$ при $t < 0$, а $\bar{\varphi}_s(t)$ — известный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}_s(t) = \varphi_s(t)$ при $t \in [-\hat{\sigma}, 0)$ и $\bar{\varphi}_s(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -\hat{\sigma}) \cup [0, +\infty)$ для $s = 1, \dots, n$. Через $\bar{x}(t, b, \bar{\varphi})$ обозначим решение системы (11), удовлетворяющее условию (1b). Очевидно, что решение задачи (11), (1b) при $t \geq 0$ совпадает с решением задачи (1), (1а), (1b), т. е. $x(t, b, \varphi) = \bar{x}(t, b, \bar{\varphi}), t \geq 0$.

Если в системе (11) сделать замену $\bar{x}_s(t) = \exp\{-\lambda t\} y_s(t)$, где $y_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $y_s(t) = 0$ при $t < 0$ и всех $s = 1, \dots, n$,

причем $0 < \lambda < \min\{\bar{a}_s, s = 1, \dots, n\}$, то получим систему

$$\begin{aligned} dy_s(t) = & \left[\lambda y_s(t) - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] \right] dt + \\ & \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \dots, n, \\ & y_s(\mu_j) = b_{ss}^j y_s(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \text{ п. н. }, \quad s = l + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Полагая $\eta_s(t) = \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} - \lambda$ при $s = 1, \dots, n$ и учитывая, что

$$\int_{h_{1k}(t)}^t dy_s(\tau) = y_s(t) - y_s(h_{1k}(t)), \quad k \in I_s, \text{ перепишем систему (12) в следующем виде:}$$

$$\begin{aligned} dy_s(t) = & \left[-\eta_s(t) y_s(t) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} \int_{h_{1k}(t)}^t dy_s(\tau) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1k}(t)) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^n a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] \right] dt + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \dots, n, \\ & y_s(\mu_j) = b_{ss}^j y_s(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \text{ п. н. }, \quad s = l + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя выражение для $dy_s(t)$ в правой части s -го ($s = 1, \dots, n$) уравнения системы (12) в s -е уравнение системы (13), получим равенства

$$\begin{aligned} dy_s(t) = & \left[-\eta_s(t) y_s(t) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} \right. \\ & \int_{h_{1k}(t)}^t \left\{ \left[\lambda y_s(\tau) - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu}^{1j}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{1j}(\tau))\} y_\nu(h_{1j}(\tau)) + \exp\{\lambda \tau\} \bar{\varphi}_\nu(h_{1j}(\tau))] \right] d\tau + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{ij}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{ij}(\tau))\} y_k(h_{ij}(\tau)) + \exp\{\lambda \tau\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(\tau))] d\mathcal{B}_i(\tau) \right\} + \\ & \left. + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1k}(t)) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^n a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] \right] dt + \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \dots, n, \\ & y_s(\mu_j) = b_{ss}^j y_s(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \text{ п. н. }, \quad s = l + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $m_s(t, \varsigma) = \exp \left\{ - \int_{\varsigma}^t \eta_s(\zeta) d\zeta \right\}$, $s = 1, \dots, l$, и $m_s(t, \varsigma) = \exp \left\{ - \int_{\varsigma}^t \eta_s(\zeta) d\zeta \right\} \prod_{\varsigma < \mu_j \leq t} b_{ss}^j$, $s = l + 1, \dots, n$. Пользуясь формулой представления решений линейных скалярных дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями [12], из системы (14) с учетом

условия (1b), получаем систему

$$\begin{aligned}
y_s(t) = & m_s(t, 0)b_s + \sum_{k \in I_s} \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} \lambda y_s(\tau) d\tau d\varsigma - \\
& - \sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^n \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \times \\
& \times \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{1j}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{1j}(\tau))\} y_\nu(h_{1j}(\tau)) + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_\nu(h_{1j}(\tau))] d\tau d\varsigma + \\
& + \sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^n \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \times \\
& \times \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{ij}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{ij}(\tau))\} y_\nu(h_{ij}(\tau)) + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_\nu(h_{ij}(\tau))] d\mathcal{B}_i(\tau) d\varsigma + \\
& + \sum_{k \in I_s} \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_k(h_{1k}(\varsigma)) d\varsigma + \\
& + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^n \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{sk}^{1j}(\varsigma) [\exp\{\lambda(\varsigma - h_{1j}(\varsigma))\} y_k(h_{1j}(\varsigma)) + \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(\varsigma))] d\varsigma + \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{sk}^{ij}(\varsigma) [\exp\{\lambda(\varsigma - h_{ij}(\varsigma))\} y_k(h_{ij}(\varsigma)) + \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(\varsigma))] d\mathcal{B}_i(\varsigma) \\
& (t \geq 0), \quad s = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для упрощения обозначений положим $\hat{y}_s = \sup_{t \geq 0} (E|y_s(t)|^{2p})^{1/(2p)}$, $\hat{\varphi}_s = \sup_{t < 0} (E|\varphi_s(t)|^{2p})^{1/(2p)}$, $s = 1, \dots, n$, $\|\varphi\| = \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^{2p})^{1/(2p)}$. В дальнейшем будем также пользоваться следующими очевидными неравенствами:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_s(h_{ij}(t))|^{2p})^{1/(2p)} & \leq \exp\{\lambda \tau_{ij}\} \sup_{t < 0} (E|\varphi_s(t)|^{2p})^{1/(2p)}, \\
s = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i;
\end{aligned}$$

$$|m_s(t, \varsigma)| \leq \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)(t - \varsigma)\}, \quad t \in [0, +\infty), \quad \varsigma \in [0, t], \quad P \times \mu - \text{почти всюду}, \quad s = 1, \dots, l,$$

$$|m_s(t, \varsigma)| \leq \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)(t - \varsigma)\} \bigcap_{\varsigma < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j|, \quad t \in [0, +\infty), \quad \varsigma \in [0, t], \quad P \times \mu - \text{почти всюду},$$

$s = l + 1, \dots, n$, а также оценками

$$\int_0^t \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)(t - \varsigma)\} \bigcap_{\varsigma < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| d\varsigma \leq \frac{\max\{1, \bar{b}_s\} (1 - \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)\sigma\})}{(\bar{a}_s - \lambda)(1 - \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)\rho\} \bar{b}_s)}, \quad s = l + 1, \dots, n,$$

доказанными в [18], и оценками

$$\left(\int_0^t \exp\{-2(\bar{a}_s - \lambda)(t - \varsigma)\} \prod_{\varsigma < \mu_j \leq t} (b_{ss}^j)^2 d\varsigma \right)^{1/2} \leq \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2(\bar{a}_s - \lambda)\sigma\})}{2(\bar{a}_s - \lambda)(1 - \exp\{-2(\bar{a}_s - \lambda)\rho\}\bar{b}_s^2)} \right)^{1/2},$$

$$s = l + 1, \dots, n,$$

справедливость которых непосредственно вытекает из предыдущих оценок.

С учетом этих обозначений и неравенств, а также соотношений (2)–(4) из уравнения (15) легко вывести следующие оценки:

$$\begin{aligned} \hat{y}_s &\leq \hat{c}_s \|b_s\|_{k_{2p}^1} + \lambda L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \right] \hat{y}_s + \\ &+ L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^n \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{s\nu}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} (\hat{y}_\nu + \hat{\varphi}_\nu) \right] + \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^n \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} (\hat{y}_\nu + \hat{\varphi}_\nu) \right] + \\ &+ L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \hat{\varphi}_k \right] + L_{1s} \left[\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^n \bar{a}_{sk}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} (\hat{y}_k + \hat{\varphi}_k) \right] + \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^n \bar{a}_{sk}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} (\hat{y}_k + \hat{\varphi}_k) \right], \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\hat{c}_s = 1$ при $s = 1, \dots, l$, а $\hat{c}_s$ при $s = l + 1, \dots, n$ определены ранее,

$$\begin{aligned} L_{1s} &:= \frac{1}{(\bar{a}_s - \lambda)}, L_{2s} := \left(\frac{1}{2(\bar{a}_s - \lambda)} \right)^{1/2}, \quad s = 1, \dots, l, \quad L_{1s} := \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)\sigma\})}{(\bar{a}_s - \lambda)(1 - \exp\{-(\bar{a}_s - \lambda)\rho\}\bar{b}_s)}, \\ L_{2s} &:= \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2(\bar{a}_s - \lambda)\sigma\})}{2(\bar{a}_s - \lambda)(1 - \exp\{-2(\bar{a}_s - \lambda)\rho\}\bar{b}_s^2)} \right)^{1/2}, \quad s = l + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из оценок (16) и на основании того, что норма в R^n выбрана так, что $\hat{\varphi}_j \leq \|\varphi\|$ при всех $j = 1, \dots, n$, получаем

$$\hat{y}_s \leq \hat{c}_s \|b_s\|_{k_{2p}^1} + \sum_{j=1}^n N_{sj}(\lambda) \hat{y}_j + M_s(\lambda) \|\varphi\|, \quad s = 1, \dots, n. \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} N_{ss}(\lambda) &:= \lambda L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \right] + \\ &+ L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} + \sum_{j=0, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} \right] + \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{ss}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} \right], \quad s = 1, \dots, n, \\ N_{sj}(\lambda) &:= L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=0}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \exp\{\lambda \tau_{1\nu}\} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \exp\{\lambda \tau_{1\nu}\} \right] + \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \exp\{\lambda \tau_{i\nu}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \exp\{\lambda \tau_{i\nu}\} \right], \quad s, j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_s(\lambda) := & L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^n \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{s\nu}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} + \right. \\
& \left. + \sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s \text{ при } j \in I_s}^n \bar{a}_{sk}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} \right] + \\
& + c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^n \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^n \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} \right], s=1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Положим $y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_n(t))$, $\bar{y} = \text{col}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$, $M(\lambda) = \text{col}(M_1(\lambda), \dots, M_n(\lambda))$ и пусть $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n$ — $n \times n$ -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss}(\lambda) = 1 - N_{ss}(\lambda), \quad s = 1, \dots, n, \quad c_{sj}(\lambda) = -N_{sj}(\lambda), \quad s, j = 1, \dots, n, \quad s \neq j.$$

Тогда из оценок (17) получаем

$$C(\lambda)\bar{y} \leq \hat{c} \|b\|_{k_{2p}^n} \hat{E} + M(\lambda) \|\varphi\|, \quad (18)$$

где $\hat{c} = \max\{\hat{c}_s, s = 1, \dots, n\}$, $\hat{E}$ — n -мерный вектор, все элементы которого равны единице. Очевидно также, что $C(0) = C$. В силу условий теоремы матрица C является $\mathcal{M}$ -матрицей. Тогда при достаточно малых λ матрица $C(\lambda)$ также является $\mathcal{M}$ -матрицей, а значит, существует $\lambda = \lambda_0$ такое, что матрица $C(\lambda_0)$ будет положительно обратимой. Поэтому из неравенства (18) получаем

$$|\bar{y}| \leq K(\|b\|_{k_{2p}^n} + \|\varphi\|), \quad (19)$$

где $K = \|C(\lambda_0)^{-1}\| \|\hat{E}\| \max\{\hat{c}, |M(\lambda_0)|\}$.

Поскольку $x(t, b, \varphi) = \exp\{-\lambda t\} y(t)$ и $\sup_{t \geq 0} (E|y(t)|^{2p})^{1/(2p)} \leq |\bar{y}|$, то из неравенства (19)

следует, что существуют положительные числа $\lambda = \lambda_0$, $K = \|C(\lambda_0)^{-1}\| \|\hat{E}\| \max\{\hat{c}, |M(\lambda_0)|\}$ такие, что для решения $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^{2p})^{1/(2p)} \leq K \exp\{-\lambda t\} \left(\|b\|_{k_{2p}^n} + \text{vrai} \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^{2p})^{1/(2p)} \right) \quad (t \geq 0).$$

Следовательно, система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных. $\square$

Замечание 1. Проверку того, является ли матрица C $\mathcal{M}$ -матрицей, можно сделать непосредственно, вычисляя ее диагональные миноры: если все эти миноры положительны, то матрица C является $\mathcal{M}$ -матрицей. Кроме того, этот факт можно установить проверкой достаточных условий, которые были приведены в разделе 1.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть элементы матриц A_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, равны нулю при $t \in [0, +\infty)$ $P \times \mu$ -почти всюду и пусть существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \dots, m_1\}$, $s = 1, \dots, n$, и положительные числа

$$\rho, \quad \sigma, \quad \bar{b}_s, \quad s = l+1, \dots, n, \quad \bar{a}_s, \bar{a}_{sk}^{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad s, k = 1, \dots, n,$$

такие, что для системы (1) выполнены оценки

$$\begin{aligned}
|b_{ss}^j| &\leq \bar{b}_s, \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma, \quad j = 1, 2, \dots, \\
|a_{sk}^{ij}(t)| &\leq \bar{a}_{sk}^{ij}, \quad t \in [0, +\infty), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad s, k = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

$P \times \mu$ -почти всюду. Пусть также

$$\sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \geq \bar{a}_s, \quad t \in [0, +\infty), \quad s = 1, \dots, n,$$

$P \times \mu$ -почти всюду и существуют положительные числа $\hat{c}_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что

$$\exp\{-\bar{a}_s t\} \bigcap_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s \text{ при } t \in [0, +\infty), \quad s = l+1, \dots, n.$$

Определим $n \times n$ -матрицу $C_1 = (c_{sj})_{s,j=1}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \right], \quad s = 1, \dots, l, \\ c_{sj} &= -\frac{1}{\bar{a}_s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \right], \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \end{aligned}$$

Следствие 1. Если C_1 является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Справедливость следствия вытекает непосредственно из теоремы 3.

Замечание 2. Если при выполнении условий следствия 1 элементы матриц A_{1j} , $j = 1, \dots, m_1$, являются измеримыми локально суммируемыми функциями, то система (1) является детерминированной системой линейных дифференциальных уравнений с ограниченными запаздываниями, которая будет экспоненциально устойчива относительно начальных данных.

Пусть элементы матриц A_{1k} , $k = 2, \dots, m_1$, A_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, равны нулю при $t \in [0, +\infty)$ $P \times \mu$ -почти всюду и пусть существуют положительные числа $\rho, \sigma, \bar{b}_s$, $s = l+1, \dots, n$, $\bar{a}_s$, $\bar{a}_{sk}^{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, $s, k = 1, \dots, n$, такие, что для системы (1) имеют место неравенства $|b_{ss}^j| \leq \bar{b}_s$, $s = l+1, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, $|a_{sk}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{sk}^{ij}$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, $s, k = 1, \dots, n$, $P \times \mu$ -почти всюду, а также $a_{ss}^{11}(t) \geq \bar{a}_s$, $t \in [0, +\infty)$, $s = 1, \dots, n$, $P \times \mu$ -почти всюду и существуют положительные числа $\hat{c}_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что $\exp\{-\bar{a}_s t\} \bigcap_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty)$, $s = l+1, \dots, n$. Определим $n \times n$ -матрицу $C_2 = (c_{sj})_{s,j=1}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_s} (\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11}, \quad s = 1, \dots, l, \quad c_{sj} = -\frac{1}{\bar{a}_s} \left[(\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} + \bar{a}_{sj}^{11} \right], \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} (\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11}, \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[(\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} + \bar{a}_{sj}^{11} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \end{aligned}$$

Тогда в предыдущих обозначениях из теоремы 3 справедливо

Следствие 2. Если C_2 является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Далее, предположим, что в системе (1) $m_1 = 1$ и пусть существуют положительные числа $\rho, \sigma, \bar{b}_s, s = l+1, \dots, n, \bar{a}_s, \bar{a}_{sk}^{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i, s, k = 1, \dots, n$, такие, что для системы (1) выполнены оценки $|b_{ss}^j| \leq \bar{b}_s, s = l+1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, \rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots, |a_{sk}^{ij}(t)| \leq \bar{a}_{sk}^{ij}, t \in [0, +\infty), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i, s, k = 1, \dots, n, P \times \mu$ -почти всюду. Пусть также $a_{ss}^{11}(t) \geq \bar{a}_s, t \in [0, +\infty), s = 1, \dots, n, P \times \mu$ -почти всюду и существуют положительные числа $\hat{c}_s, s = l+1, \dots, n$, такие, что $\exp\{-\bar{a}_s t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty), s = l+1, \dots, n$. Определим $n \times n$ -матрицу $C_3 = (c_{sj})_{s,j=1}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_s} (\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{11} \sqrt{\tau_{11}} \bar{a}_{ss}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \right], \quad s = 1, \dots, l, \\ c_{sj} &= -\frac{1}{\bar{a}_s} [(\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} + \bar{a}_{sl}^{11}] - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{11} \sqrt{\tau_{11}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \right], \\ &\quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho b_s\})} (\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} - \\ &- c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} b_s^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{11} \sqrt{\tau_{11}} \bar{a}_{ss}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} b_s)} [(\bar{a}_{ss}^{11})^2 \tau_{11} + \bar{a}_{sj}^{11}] - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} b_s^2)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left[\sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{11} \sqrt{\tau_{11}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \right], \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \end{aligned}$$

Следствие 3. Если C_3 является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Справедливость следствия также вытекает непосредственно из теоремы 3.

Следствие 4. Пусть для системы (1) выполнены предположения, предшествующие следствию 3. Предположим дополнительно, что $n = 2$ и что для элементов 2×2 -матрицы $C_4 = (c_{sj})_{s,j=1}^2$ справедливы неравенства $c_{11} > 0, c_{11}c_{22} > c_{12}c_{21}$. Тогда система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Справедливость следствия 4 вытекает из следствия 3 и из того, что при перечисленных предположениях 2×2 -матрица C_4 будет $\mathcal{M}$ -матрицей, поскольку ее диагональные миноры положительны.

Пусть для системы (1) выполнены предположения, предшествующие следствию 3, и пусть $h_{11}(t) = t$ ($t \in [0, \infty)$) μ -почти всюду. Элементы $n \times n$ -матрицы $C_5 = (c_{sj})_{s,j=1}^n$ определим в виде

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij}, \quad s = 1, \dots, l, \quad c_{sj} = -\frac{1}{\bar{a}_s} \bar{a}_{sj}^{11} - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_s} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{ij}, \\ &\quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \\ c_{ss} &= 1 - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij}, \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-\bar{a}_s \sigma\})}{\bar{a}_s(1 - \exp\{-\bar{a}_s \rho\} b_s)} \bar{a}_{sj}^{11} - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \sigma\})}{2\bar{a}_s(1 - \exp\{-2\bar{a}_s \rho\} b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu}, \\ &\quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \end{aligned}$$

В этом случае из теоремы 3 имеет место

Следствие 5. Если C_5 является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (1) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим систему линейных детерминированных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами, которая подвергнута импульсным воздействиям по части переменных:

$$\begin{aligned} dx(t) &= - \sum_{j=1}^m A_j x(t - h_j) dt \quad (t \geq 0), \\ x(\mu_j) &= B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $A_j = (a_{sk}^j)_{s,k=1}^n$, $j = 1, \dots, m$, являются вещественными $n \times n$ -матрицами, h_j , $j = 1, \dots, m$, — неотрицательные действительные числа, μ_j , $j = 1, 2, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$, B_j — вещественная диагональная $n \times n$ -матрица, причем все диагональные элементы отличны от нуля и $b_{ii}^j = 1$, $i = 1, \dots, l$, при $j = 1, 2, \dots$.

Утверждение 1. Пусть для системы (20) выполнено неравенство $\sum_{j=1}^m a_{ss}^j = a_s > 0$, $s = 1, \dots, n$, и пусть существуют положительные числа $\rho, \sigma, \bar{b}_s, \hat{c}_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что справедливы оценки $\exp\{-a_{ss}^1 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty)$, $|b_{ss}^j| \leq \bar{b}_s$, $j = 1, 2, \dots$, $s = l+1, \dots, n$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$. Если в этих предположениях $n \times n$ -матрица C_6 , элементы которой заданы формулами

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{a_s} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ss}^k| h_k |a_{ss}^j|, \quad s = 1, \dots, l, \\ c_{sj} &= -\frac{1}{a_s} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^m |a_{ss}^k| h_k |a_{sj}^\nu| + \sum_{\nu=1}^m |a_{sj}^\nu| \right], \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_s \sigma\})}{a_s(1 - \exp\{-a_s \rho\} \bar{b}_s)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ss}^k| h_k |a_{ss}^j|, \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_s \sigma\})}{a_s(1 - \exp\{-a_s \rho\} \bar{b}_s)} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^m |a_{ss}^k| h_k |a_{sj}^\nu| + \sum_{\nu=1}^m |a_{sj}^\nu| \right], \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \end{aligned}$$

является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (20) экспоненциально устойчива относительно начальных данных.

Справедливость утверждения 1 следует из следствия 1 теоремы 3.

Пусть для системы (20) выполнены соотношения $h_1 = 0$, $a_{ss}^1 > 0$, $s = 1, \dots, n$. В этом случае из следствия 1 теоремы 3 справедливо

Утверждение 2. Пусть для системы (20) существуют положительные числа $\rho, \sigma, \bar{b}_s, \hat{c}_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что имеют место неравенства $\exp\{-a_{ss}^1 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty)$, $|b_{ss}^j| \leq \bar{b}_s$, $j = 1, 2, \dots$, $s = l+1, \dots, n$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$.

Если $n \times n$ -матрица C_7 , элементы которой определены формулами

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{a_{ss}^1} \sum_{j=2}^m |a_{ss}^j|, \quad s = 1, \dots, l, \quad c_{sj} = -\frac{1}{a_{ss}^1} \sum_{\nu=1}^m |a_{sj}^\nu|, \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \\ c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \sigma\})}{a_{ss}^1(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \rho\} \bar{b}_s)} \sum_{j=2}^m |a_{ss}^j|, \quad s = l+1, \dots, n, \\ c_{sj} &= -\frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \sigma\})}{a_{ss}^1(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \rho\} \bar{b}_s)} \sum_{\nu=1}^m |a_{sj}^\nu|, \quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \end{aligned} \quad (21)$$

является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (20) экспоненциально устойчива относительно начальных данных.

Если, например, $c_{ss} > \sum_{j=1, j \neq s}^n |c_{sj}|$, $s = 1, \dots, n$, где c_{sj} , $s, j = 1, \dots, n$, определены формулами (21), то система (20) будет экспоненциально устойчивой относительно начальных данных в силу утверждения 2. Действительно, в этом случае выполнены достаточные условия из раздела 1, которые гарантируют, что $n \times n$ -матрица C_7 будет $\mathcal{M}$ -матрицей.

В частности, если все элементы матриц A_j , $j = 2, \dots, m$, нулевые и $a_{ss}^1 > \sum_{j=1, j \neq s}^n |a_{sj}^1|$, $s = 1, \dots, l$, а также

$$\frac{a_{ss}^1(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \rho\} \bar{b}_s)}{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_{ss}^1 \sigma\})} > \sum_{j=1, j \neq s}^n |a_{sj}^1|, \quad s = l+1, \dots, n,$$

то система (20) будет экспоненциально устойчивой относительно начальных данных.

Рассмотрим импульсную систему линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянными запаздываниями вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j} x(t - h_{1j}) dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} x(t - h_{ij}) d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \\ x(\mu_j) &= B_j x(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots, \text{ п. н.}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^n$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — $n \times n$ -матрицы, элементы которых являются действительными числами, h_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — неотрицательные действительные числа, μ_j , $j = 1, 2, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$, B_j — вещественная диагональная $n \times n$ -матрица, причем все диагональные элементы отличны от нуля и $b_{ii}^j = 1$, $i = 1, \dots, l$, при $j = 1, 2, \dots$.

Утверждение 3. Пусть для системы (22) выполнены соотношения $\sum_{j=1}^{m_1} a_{ss}^{1j} = a_s > 0$, $s = 1, \dots, n$, и пусть существуют положительные числа ρ , σ , $\bar{b}_s, \hat{c}_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что выполнены оценки $\exp\{-a_s t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty)$, $|b_{sj}^j| \leq \bar{b}_s$, $j = 1, 2, \dots$, $s = l+1, \dots, n$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$. Если $n \times n$ -матрица C_8 , заданная формулами

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{a_s} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{ss}^{1j}| - c_p \left(\frac{1}{2a_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{ss}^{ij}| + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| \right], \quad s = 1, \dots, l, \\ c_{sj} &= -\frac{1}{a_s} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{sj}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{sj}^{1\nu}| \right] - c_p \left(\frac{1}{2a_s} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{sj}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}| \right], \\ &\quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{ss} &= 1 - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_s \sigma\})}{a_s(1 - \exp\{-a_s \rho\}b_s)} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{ss}^{1j}| - \\
&- c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_s \sigma\})}{2a_s(1 - \exp\{-2a_s \rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{ss}^{ij}| + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| \right], \quad s = l+1, \dots, n, \\
c_{sj} &= - \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_s \sigma\})}{a_s(1 - \exp\{-a_s \rho\}b_s)} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{sj}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{sj}^{1\nu}| \right] - \\
&- c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_s \sigma\})}{2a_s(1 - \exp\{-2a_s \rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{sj}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}| \right], \\
&\quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j,
\end{aligned}$$

является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (22) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Справедливость утверждения 3 следует непосредственно из теоремы 3.

Пусть для системы (22) выполнены соотношения $m_1 = 1$, $h_{11} = 0$, $a_{ss}^{11} > 0$, $s = 1, \dots, n$. Из теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. Пусть для системы (22) существуют положительные числа ρ , σ , $\bar{b}_s, c_s$, $s = l+1, \dots, n$, такие, что выполнены оценки $\exp\{-a_{ss}^{11}t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |b_{ss}^j| < \hat{c}_s$ при $t \in [0, +\infty)$, $|b_{sj}^j| \leq \bar{b}_s$, $j = 1, 2, \dots$, $s = l+1, \dots, n$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$. Если $n \times n$ -матрица C_9 , заданная формулами

$$\begin{aligned}
c_{ss} &= 1 - c_p \left(\frac{1}{2a_{ss}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}|, \quad s = 1, \dots, l, \\
c_{sj} &= -|a_{sj}^{11}| \frac{1}{a_{ss}^{11}} - c_p \left(\frac{1}{2a_{ss}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}|, \quad s = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j, \\
c_{ss} &= 1 - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\sigma\})}{2a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}|, \quad s = l+1, \dots, n, \\
c_{sj} &= -|a_{sj}^{11}| \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_{ss}^{11}\sigma\})}{a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-a_{ss}^{11}\rho\}b_s)} - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\sigma\})}{2a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}|, \\
&\quad s = l+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad s \neq j,
\end{aligned}$$

является $\mathcal{M}$ -матрицей, то система (22) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Для проверки того, является ли C_9 в утверждении 4 $\mathcal{M}$ -матрицей, можно воспользоваться достаточными условиями из раздела 1. Если, например,

$$\begin{aligned}
1 - c_p \left(\frac{1}{2a_{ss}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| &> \sum_{j=1}^n \left(|a_{sj}^{11}| \frac{1}{a_{ss}^{11}} + c_p \left(\frac{1}{2a_{ss}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}| \right), \quad s = 1, \dots, l, \\
1 - c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\sigma\})}{2a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| &> \\
> \sum_{j=1, j \neq s}^n \left(|a_{sj}^{11}| \frac{\max\{1, \bar{b}_s\}(1 - \exp\{-a_{ss}^{11}\sigma\})}{a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-a_{ss}^{11}\rho\}b_s)} + c_p \left(\frac{\max\{1, \bar{b}_s^2\}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\sigma\})}{2a_{ss}^{11}(1 - \exp\{-2a_{ss}^{11}\rho\}b_s^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{sj}^{i\nu}| \right), \\
&\quad s = l+1, \dots, n,
\end{aligned}$$

то C_9 является $\mathcal{M}$ -матрицей, так что система (22) будет экспоненциально $2p$ -устойчивой относительно начальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием* (М.: Наука, 1981).
- [2] Царьков Е.Ф. *Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений* (Рига: Зинатне, 1989).
- [3] Mao X.R. *Stochastic Differential Equations and Applications* (Horwood Publ. Ltd. 1997).
- [4] Mohammed PS.-E.A. *Stochastic Differential Systems with Memory. Theory, Examples and Applications*, Proc. of The Sixth Workshop on Stochastic Analysis. Geilo, Norway 1–91 (1996).
- [5] Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatulina L.F. *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Methods and Appl. (Hindawi, New York. 2007).
- [6] Azbelev N.V., Simonov P.M. *Stability of Differential equations with Aftereffect*, Taylor and Francis (London, 2002).
- [7] Кадиев Р.И. *Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием*, Дифференц. уравнения **30** (4), 555–564 (1994).
- [8] Кадиев Р.И. *Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу*, Изв. вузов. Матем., № 10, 35–40 (1995).
- [9] Кадиев Р.И. Дис. ... д-р физ.-матем. наук (Махачкала, 2000).
- [10] Кадиев Р.И. *Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению*, Дифференц. уравнения, Минск, БГУ **49** (8), 963–970 (2013).
- [11] Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость линейных функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях*, Дифференц. уравнения **28** (2), 198–207 (1992).
- [12] Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием*, Дифференц. уравнения **43** (7), 879–885 (2007).
- [13] Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями*, Дифференц. уравнения, Минск, БГУ **46** (4), 486–498 (2010).
- [14] Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями*, Дифференц. уравнения, Минск, БГУ **53** (5), 579–590 (2017).
- [15] Anokhin A., Berezhansky L., Braverman E. *Exponential stability of linear delay impulsive differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **193**, 923–941 (1995).
- [16] Bainov D., Stamova I., Vatsala A. *Global stability of sets for linear impulsive differential-difference equations*, Appl. Anal. **62**, 149–160 (1996).
- [17] Berezhansky L., Braverman E. *Boundedness and stability of impulsively perturbed delay differential equations*, Functional Different. Equat. **3** (1-2), 19–30 (1995).
- [18] Berezhanski L., Idels L. *On Integrable solutions of impulsive delay differential equations*, Comm. Appl. Math. Anal. **2**, 301–309 (1998).
- [19] Xu L., He D., Ma Q. *Impulsive stabilization of stochastic differential equations with time delays*, Math. and Computer Modelling **57**, 997–1104 (2013).
- [20] Kadijev R., Ponosov A. *Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays*, J. Abstract Diff. Equat. and Appl. **2** (2), 7–25 (2012).
- [21] Линцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов* (Наука, М., 1986).
- [22] Беллман Р. *Введение в теорию матриц* (Наука, М., 1969).

Рамазан Исмаилович Кадиев

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
ул. М. Гаджиева, д. 45, г. Махачкала, 367032, Россия;

Дагестанский государственный университет,
ул. М. Гаджиева, д. 43 а, г. Махачкала, 367025, Россия,

e-mail: kadijev_r@mail.ru

Аркадий Владимирович Поносов
Норвежский университет естественных наук,
г. Ос, Норвегия,
e-mail: arkadi@nmbu.no

R.I. Kadiev and A.V. Ponosov

Positive invertibility of matrices and exponential stability of impulsive systems of Ito linear differential equations with bounded delays

Abstract. Based on the theory of inverse-positive matrices, some problems of exponential $2p$ -stability ($1 \leq p < \infty$) of systems of linear differential Ito equations with bounded delays and impulse effects on the part of the solution components are investigated. The ideas and methods developed by N.V. Azbelev and his students to study deterministic stability of functional differential equations are applied. For the above mentioned systems of equations, sufficient conditions for exponential $2p$ -stability ($1 \leq p < \infty$) are given in terms of positive invertibility of matrices constructed via the parameters of these systems. Feasibility of these conditions is checked for specific systems of equations.

Keywords: Ito equations, stability of solutions, impulse effects, positive invertibility of matrices, bounded delays.

Ramazan Ismailovich Kadiev
Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences,
M. Gadjeva str., 45, Makhachkala, 367032 Russia;
Dagestan State University,
43 a Hajiyevev str., Makhachkala, 367025, Russia,
e-mail: kadiev_r@mail.ru

Arcady Vladimirovich Ponosov
Norwegian University of Life Sciences,
P.O. Box 5003 N-1432, As, Norway,
e-mail: arkadi@nmbu.no