Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Миронова, Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 44–49

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-44-49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:00:10

Л.Б. МИРОНОВА

ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Аннотация. Предложена новая задача для факторизованного дифференциального уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой произведение дифференциального оператора первого и третьего порядков. Доказаны существование и единственность решения задачи. Решение построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора третьего порядка, при этом одна из функций, входящих в формулу решения задачи, определяется в резольвентах двух интегральных уравнений.

Ключевые слова: факторизованное уравнение, псевдопараболическое уравнение, уравнение с доминирующей частной производной, метод Римана, задача Гурса, уравнение Вольтерры.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-44-49

Различные задачи для факторизованных уравнений, оператор которых представлен в виде произведения оператора первого порядка и гиперболического оператора второго порядка рассматривались в работах ([1]–[5], [6], гл. 4, §1–2, с. 212–226).

В ([6], гл. 4, §2, с. 223–226) В.И. Жегалов рассматривает задачу в прямоугольной области с данными на характеристиках для факторизованного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u) = 0. \quad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) относится к одному из четырех канонических видов уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными, полученных в статье [7].

В статье [8] рассмотрены задачи для факторизованных уравнений с операторами Бианки, а именно, для уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)L(u) &= 0, \\ L(u) &\equiv u_{xyz} + a(x, y, z)u_{xy} + b(x, y, z)u_{yz} + c(x, y, z)u_{xz} + \\ &+ d(x, y, z)u_x + e(x, y, z)u_y + f(x, y, z)u_z + g(x, y, z)u, \end{aligned} \quad (2)$$

в пространстве трех независимых переменных и его аналога в четырехмерном пространстве. В работе [9] полученные результаты были распространены на уравнение в пространстве произвольной размерности.

Здесь рассматривается уравнение с переменными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u) = 0, \quad (3)$$

дифференциальный оператор которого представляет собой произведение оператора первого порядка и псевдопараболического оператора третьего порядка. Уравнение

$$u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f(x, y), \quad (4)$$

относящееся к классу уравнений с доминирующей частной производной (часто его называют псевдопараболическим уравнением третьего порядка) изучалось многими авторами (например, [10]–[15]) и имеет многочисленные приложения, в частности, описывает диффузию в трещиноватых средах, процесс влагопереноса в почве [16]–[19].

Определим класс функций $C^{(k,l)}$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1, k_2)}$, если существуют непрерывные производные $\frac{\partial^{r_1+r_2}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}$ ($r_i = 0, \dots, k_i$). Решение уравнения (3) класса $C^{(3,2)}$ назовем регулярным.

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, а X, Y — части ∂D , лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y = x$, расположенный внутри D , обозначим M .

Задача. Найти в D функцию $u \in C(\overline{D}) \cap C^{(2,0)}(D \cup \overline{X}) \cap C^{(0,1)}(D \cup \overline{Y})$, являющуюся в $D \setminus M$ регулярным решением уравнения (3) и удовлетворяющую условиям

$$u|_{\overline{Y}} = \varphi_1(y), \quad u|_{\overline{X}} = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\overline{Y}} = \psi_1(y), \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\overline{X}} = \psi_2(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\overline{Y}} = \lambda(y),$$

$$\begin{aligned} \varphi_1, \psi_1, \lambda &\in C^2([0, y_1]), \quad \varphi_2, \psi_2 \in C^2([0, x_1]), \\ \varphi_1(0) &= \varphi_2(0), \quad \psi_1(0) = \varphi_2'(0), \quad \varphi_1'(0) = \psi_2(0), \quad \lambda(0) = \varphi_2''(0). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что можно переписать уравнение (3) в форме

$$u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = \omega(x - y). \quad (7)$$

Из постановки задачи следует, что функция $\omega(\xi)$, рассматриваемая при $\xi \in [-y_1, x_1]$, должна быть на $[-y_1, 0]$ и $[0, x_1]$ непрерывно дифференцируема, а в точке $\xi = 0$ непрерывно склеиваться. В остальном ее следует считать произвольной.

В статье [12] в терминах функции Римана построено решение задачи Гурса для уравнения (4), которое представляет собой общее представление регулярных решений уравнения (4). Граничные условия задачи Гурса представляют собой первые три условия из (5).

Пусть $u_0(x, y) = u_0(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1)$ есть решение в области D уравнения (7) при $\omega \equiv 0$, удовлетворяющее первым трем условиям (5). При условиях гладкости коэффициентов уравнения

$$a_{ij} \in C^{(i,j)}(\overline{D}) \quad (8)$$

$u_0(x, y)$ записывается через функцию Римана $R(x, y, \xi, \eta)$ уравнения (7), при этом соответствующая формула

$$u_x(x, y) = u_{0x}(x, y) + \int_0^x \int_0^y R(\alpha, \beta, x, y) \omega(\alpha - \beta) d\beta d\alpha \quad (9)$$

дает решение уравнения (7), также удовлетворяющее первым трем условиям (5) (см. [12], формула (6)).

Функция Римана для уравнения (7) определена в работе [12] как решение интегрального уравнения Вольтерры

$$v(x, y) - \int_{\eta}^y a_{20}(x, \beta) v(x, \beta) d\beta - \int_{\xi}^x (a_{11}(\alpha, y) - (x - \alpha) a_{01}(\alpha, y)) v(\alpha, y) d\alpha + \\ + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y (a_{10}(\alpha, \beta) - (x - \alpha) a_{00}(\alpha, \beta)) v(\alpha, \beta) d\beta d\alpha = 1, \quad (10)$$

решение которого существует и единственно.

Требуя выполнения последних двух условий из (5), из представления (9) решения задачи получим

$$\begin{aligned} \int_0^y R(0, \beta, 0, y) \omega(-\beta) d\beta &= \lambda(y) - \mu_1(y), \quad y \in [0, y_1], \\ \int_0^x R(\alpha, 0, x, 0) \omega(\alpha) d\alpha &= \psi_2'(x) - \mu_2(x), \quad x \in [0, x_1], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\mu_1(y) = \left. \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right|_{x=0}, \quad \mu_2(x) = \left. \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right|_{y=0}.$$

Функции μ_1 , μ_2 можно вычислить через исходные данные задачи. Например, для отыскания μ_1 сначала зададим некоторое малое $\varepsilon > 0$ и проинтегрируем (7) при $\omega \equiv 0$ по y от ε до y , а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим для μ_1 интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \mu_1(y) + \int_0^y a_{20}(0, \beta) \mu_1(\beta) d\beta &= \lambda(0) - g(y), \\ g(y) &= \int_0^y [a_{11}(0, \beta) \psi_1'(\beta) + a_{10}(0, \beta) \psi_1(\beta) + a_{01}(0, \beta) \varphi_1'(\beta) + a_{00}(0, \beta) \varphi_1(\beta)] d\beta. \end{aligned}$$

Это уравнение сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого дается формулой

$$\mu_1(y) = \lambda(0) \exp \int_y^0 a_{20}(0, \beta) d\beta - \int_0^y g'(\beta) \left(\exp \int_y^{\beta} a_{20}(0, \beta_1) d\beta_1 \right) d\beta.$$

Аналогично уравнение для μ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_2(x) + \int_0^x a_{11}(\alpha, 0) \mu_2(\alpha) d\alpha &= \psi_2'(0) - h(x), \\ h(x) &= \int_0^x [a_{20}(\alpha, 0) \varphi_2''(\alpha) + a_{10}(\alpha, 0) \varphi_2'(\alpha) + a_{01}(\alpha, 0) \psi_2(\alpha) + a_{00}(0, \beta) \varphi_2(\alpha)] d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\mu_2(x) = \psi'_2(0) \exp \int_x^0 a_{11}(\alpha, 0) d\alpha - \int_0^x h'(\alpha) \left(\exp \int_x^\alpha a_{11}(\alpha_1, 0) d\alpha_1 \right) d\alpha.$$

Продифференцируем уравнения (11)

$$\omega(-y) + \int_0^y R_y(0, \beta, 0, y) \omega(-\beta) d\beta = \lambda'(y) - \mu'_1(y), \quad y \in [0, y_1], \quad (12)$$

$$\omega(x) + \int_0^x R_x(\alpha, 0, x, 0) \omega(\alpha) d\alpha = \psi''_2(x) - \mu'_2(x), \quad x \in [0, x_1]. \quad (13)$$

Получаем интегральные уравнения Вольтерры, однозначно и безусловно разрешимые в классе непрерывных функций (решение каждого из них может быть записано через резольвенту ядра, представляющего собой в нашем случае производную функции Римана).

Отметим, что уравнение (12) можно свести к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению, т. е. его решение записывается в квадратурах. Воспользуемся свойством функции Римана

$$R(0, \beta, 0, y) = \exp \int_y^\beta a_{20}(0, \eta) d\eta,$$

которое является следствием интегрального уравнения (10). Следовательно, (12) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \theta(y) - a_{20}(0, y) \int_0^y \theta(\beta) d\beta &= [\lambda'(y) - \mu'_1(y)] \exp \int_0^y a_{20}(0, \beta) d\beta, \\ \theta(y) &= \omega(-y) \exp \int_0^y a_{20}(0, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) с помощью подстановки $w(y) = \int_0^y \theta(\eta) d\eta$ сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$w'(y) - a_{20}(0, y)w = [\lambda'(y) - \mu'_1(y)] \exp \int_0^y a_{20}(0, \eta) d\eta, \quad w(0) = 0,$$

решение которого в явном виде не приводится, поскольку далее не используется.

Включения (6) и (8) обеспечивают принадлежность ω классу C^1 на отрезках $[-y_1, 0]$ и $[0, x_1]$, а условие склеивания $\omega(+0) = \omega(-0)$ будет иметь место, если на основании (12) и (13) потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lambda'(0) - \mu'_1(0) = \psi''_2(0) - \mu'_2(0). \quad (15)$$

В развернутой форме (15) принимает вид

$$\lambda'(0) + a_{20}(0, 0)\lambda(0) + g'(0) = \psi''_2(0) + a_{11}(0, 0)\psi'_2(0) + h'(0), \quad (16)$$

все значения в (16) выражаются через граничные значения задачи и коэффициенты уравнения (3).

Отметим, что $\omega(x)$, $\omega(-y)$ определяются единственным образом, так как уравнения для этих функций с необходимостью следуют из постановки задачи. Функция $u_0(x, y)$ тоже вычисляется через φ_1 , φ_2 , ψ_1 однозначно. Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Если выполнены условия (8), (16), то задача имеет единственное решение, определяемое формулами (9), (12), (13).*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джураев Т. Д. *Об уравнениях смешанно-составного типа*, Изв. АН Узбекской ССР. Сер. физ.-матем. науки, № 6, 3–14 (1961).
- [2] Джураев Т. Д. *О некоторых краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа*, Сиб. матем. журн. **4** (4), 775–787 (1963).
- [3] Елубаев С. Е. *Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа*, Сиб. матем. журн. **2** (4), 510–519 (1961).
- [4] Елубаев С. Е. *Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными*, Вестн. АН Казахск. ССР, № 6, 54–62 (1962).
- [5] Ni Xingtang *Boundary value problem with three characteristic supports for linear totally hiperbolic equation of the third order*, Kexue tongbao **25** (5), 361–369 (1980).
- [6] Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2014).
- [7] Джураев Т. Д., Попёлек Я. *О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка*, УМН **44** (4), 237–238 (1989).
- [8] Жегалов В. И., Миронов А. Н. *К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **46** (3), 364–371 (2010).
- [9] Миронов А. Н. *Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n -мерном пространстве*, Изв. вузов. Матем., № 1, 54–60 (2012).
- [10] Водахова В. А. *Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения*, Дифференц. уравнения **18** (2), 280–285 (1982).
- [11] Джохадзе О. М. *Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка*, Матем. заметки **74** (4), 517–528 (2003).
- [12] Жегалов В. И., Уткина Е. А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка*, Изв. вузов. Матем., № 10, 73–76 (1999).
- [13] Жегалов В. И., Миронов А. Н. *О задачах Коши для двух уравнений в частных производных*, Изв. вузов. Матем., № 5, 23–30 (2002).
- [14] Кожанов А. И. *Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера*, Дифференц. уравнения **40** (6), 763–774 (2004).
- [15] Миронов А. Н., Миронова Л. Б. *Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными*, Матем. заметки **99** (1), 89–96 (2016).
- [16] Шхануков М. Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах*, Дифференц. уравнения **18** (4), 689–699 (1982).
- [17] Солдатов А. П., Шхануков М. Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка*, ДАН СССР **297** (3), 547–552 (1987).
- [18] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. *Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах*, ПММ **24** (5), 58–73 (1960).
- [19] Hallaire M. *Le potentiel efficace de l'eau dans le sol an regime de dessechement*, L'eau et production vegetale, Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, № 9, 27–62 (1964).

Любовь Борисовна Миронова

Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

L.B. Mironova

A problem for a factorized equation with a pseudoparabolic differential operator

Abstract. A new problem is proposed for a fourth-order factorized differential equation whose operator is the product of a first- and third-order differential operator. The existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. The solution is constructed in terms of the Riemann function of the corresponding pseudoparabolic differential operator of the third order, and one of the functions included in the formula for solving the problem is determined in the resolvents of two integral equations.

Keywords: factorized equation, pseudoparabolic equation, equation with leading partial derivative, Riemann method, Goursat problem, Volterra equation.

Lubov' Borisovna Mironova

*Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,*

e-mail: lbmironova@yandex.ru