Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Цветков, Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике вязкой стратифицированной жидкости, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 59–73

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-59-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 07:38:53

Д.О. ЦВЕТКОВ

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДИНАМИКЕ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. Изучается задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей неподвижный сосуд с упругой мембраной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: эффект стратификации в вязких жидкостях, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, задача Коши, сильное решение.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-59-73

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая задача относится к обширному классу задач к которым приходят в авиации, судостроении и при транспортировке жидкостей. Различные подходы к решению таких задач можно найти в монографиях [1]–[3]. В работах [4]–[6] рассмотрены задачи о колебаниях однородной и многослойной идеальной жидкости с упругими мембранами на «свободной» поверхности и границах раздела жидкостей. (Под «свободной» будем понимать верхнюю границу жидкости. Поскольку мембрана все же является механическим ограничителем движений жидкости; здесь и далее этот термин используется в кавычках.) С позиции функционального анализа, в частности, общей теории абстрактных дифференциально-операторных уравнений, методов спектральной теории операторных пучков изучены вопросы разрешимости начально-краевых задач, структуры и характера спектра нормальных колебаний. Не остались без внимания и колебания вязкой жидкости, в частности, в работе [7] рассматривалась вязкая однородная жидкость ограниченная сверху упругой мембраной. Были найдены условия существования решения исходной задачи. Отметим работу [8], где выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной и многослойной стратифицированной жидкостей в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на «свободной» и внутренних поверхностях многослойной жидкости. Проведены численные исследования собственных частот, построены приближенные решения рассматриваемых задач.

В представленной работе рассматривается задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости с упругой мембраной на «свободной» поверхности. Предполагаем, что слои вязкой жидкости свободно скользят вдоль мембраны. Наличие стратификации, усложняет соответствующую задачу из [7], более того применение метода операторных блок-матриц позволило получить более общие условия, при которых существует сильное

по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вязкая стратифицированная жидкость, плотность которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной границей Γ , на которой находится упругая мембрана. Через ρ_m обозначим поверхностную плотность мембраны, а через σ — величину ее предварительного растяжения. Считаем, что на границе $\partial\Gamma$ мембрана закреплена, т. е. ее смещение равно нулю. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на Γ . Через $\vec{n}$ обозначим единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega$ и направленный вне Ω , через $\mu = \text{const} > 0$ — коэффициент динамической вязкости, а через $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в состоянии покоя.

Рассмотрим основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho'_0(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \quad (1)$$

где $N^2(x_3)$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля–Брента).

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Через $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ обозначим поле скорости в жидкости, через $p = p(t, x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления, а через $\rho = \rho(t, x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Линеаризованные уравнения для определения функций $\vec{u}$, p , ρ имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3) (-\nabla p - g\rho \vec{e}_3 + \mu \Delta \vec{u}) + \vec{f}(x, t) \quad (\text{в } \Omega), \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (3)$$

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad (4)$$

а на поверхности Γ выполняются динамические и кинематические условия. Если уравнение свободной движущейся поверхности $\Gamma(t)$ разыскивать в виде $x_3 = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, то упомянутые условия таковы:

$$\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2; \text{ на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\zeta = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad (6)$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sigma \Delta_2 \zeta - g\rho_0(0)\zeta + p - 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{на } \Gamma). \quad (7)$$

Отметим, что первое условие (5) основано на предположении о том, что слои вязкой жидкости свободно скользят вдоль мембраны, а второе условие — следствие условия сохранения объема Ω при колебаниях системы. Соотношения (6) отражают кинематическое условие на

Γ и условие закрепления мембраны по контуру. Граничное условие (7) есть второй закон Ньютона, примененный к элементу мембраны единичной площади.

В начальный момент времени естественно считать заданными

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(\hat{x}, 0) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \quad (8)$$

Таким образом, задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, сводится к решению уравнений (2), (3) при краевых и начальных условиях (4)–(8).

Заметим, что для классического решения задачи (2)–(8) имеет место закон баланса полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} |\rho|^2 d\Omega + \sigma \int_{\Gamma} (|\nabla_2 \zeta|^2 + \sigma^{-1} g \rho_0(0) |\zeta|^2) d\Gamma \right) + \right. \\ \left. + \left(\int_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}|^2 d\Omega + \rho_m \int_{\Gamma} |\partial \zeta / \partial t|^2 d\Gamma \right) \right] = -\mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$E(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Левая часть (9) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (вторая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии мембраны. Полная потенциальная энергия (первая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергии мембраны. Правая часть (9) есть сумма скорости диссипации энергии за счет вязких сил и мощности внешних сил.

2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НА ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Свяжем с функцией $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{u}(x) \cdot \overline{\vec{v}(x)} d\Omega. \quad (10)$$

Как следует из (1), для $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства $0 < m \leq \rho_0(x_3) \leq M < \infty$, из которых следует, что норма, порожденная (10) и связанная с кинетической энергией в стратифицированной жидкости, эквивалентна обычной норме пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$. Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ множества гладких функций

$$\{ \vec{u} \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}.$$

В качестве двух других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) := \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \vec{v} = \rho_0^{-1}(x_3) \nabla p, \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S),$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) := \{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \vec{w} = \rho_0^{-1}(x_3) \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0). \quad (11)$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (10) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [9], с.115).

Основываясь на разложении (11), применим метод ортогонального проектирования к исходной начально-краевой задаче. Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) := \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) := \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$$

соответственно ($P_{0,S} + P_{0,\Gamma} = I$). В силу условия соленоидальности в Ω и условия прилипания на S считаем, что

$$\vec{u}(t, x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \text{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega \text{)}, u_n = 0 \text{ (на } S \text{)} \};$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p(t, x) \in \vec{G}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \vec{v} \in \rho_0^{-1} \nabla p \text{ (в } \Omega \text{)}, \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \},$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p(t, x) = \rho_0^{-1} \nabla \tilde{p}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla \varphi(t, x), \quad \rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla \varphi \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0).$$

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ к уравнению (2):

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1} \nabla \varphi - P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) + P_{0,\Gamma} \vec{f}(t, x), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} - P_{0,S}(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) + P_{0,S}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) + P_{0,S} \vec{f}(t, x). \quad (13)$$

Соотношение (12) показывает, что $\rho_0^{-1} \nabla \varphi(t, x)$ может быть найдено, если известно решение $(\vec{u}, \rho)$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (13), а также условия (7) с соответствующей заменой $p \rightarrow \tilde{p}$, так как $p = \tilde{p} + \varphi$, $\varphi = 0$ (на Γ). Условимся называть решения уравнения (12) тривиальными.

Наряду с введенными пространствами рассмотрим также гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \cdot \overline{\psi(x)} d\Omega \quad (14)$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_0 = \int_{\Gamma} \xi(\hat{x}) \cdot \overline{\eta(\hat{x})} d\Gamma, \quad \hat{x} \in \Gamma.$$

В силу $\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0$ (см. (5)) получаем, что функция $\zeta(t, \hat{x})$ при каждом t должна принадлежать гильбертовому пространству $H_0 := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функции 1_{Γ} , тождественно равной единице.

Введем также пространство $H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)$ скалярных функций $\{p(x)\}$ таких, что

$$\|p\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)}^2 = \int_{\Omega} \rho_0^{-1} |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Отметим, что норма (15) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Omega)$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ОПЕРАТОРЫ

Для последующих построений введем оператор

$$B_{\sigma} \zeta := -\Delta_2 \zeta + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \zeta,$$

определенный на множестве $\mathcal{D}(B_{\sigma}) = \{ \zeta \in H^2(\Gamma) \mid \zeta = 0 \text{ (} \partial\Gamma \text{)} \}$.

Лемма 2. $B_{\sigma} : \mathcal{D}(B_{\sigma}) \subset L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ является неограниченным симметричным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{D}(B_\sigma)$ плотна в $L_2(\Gamma)$, так как в нее входят все финитные (бесконечно дифференцируемые) функции, заданные на Γ . Очевидно также (и это будет видно из дальнейшего), что B_σ — неограниченный оператор.

В силу формулы Грина и граничных условий для ζ из области определения оператора B_σ получаем

$$\begin{aligned} (B_\sigma \zeta, \zeta) &= - \int_{\Gamma} \Delta_2 \zeta \cdot \zeta \, d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma = \int_{\Gamma} |\nabla_2 \zeta|^2 \, d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma \geq \\ &\geq \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma = \sigma^{-1} g \rho_0(0) \|\zeta\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, симметрия оператора B_σ и положительная определенность в $L_2(\Gamma)$. $\square$

Как известно, симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее в силу леммы 2 будем считать, что оператор B_σ уже расширен по Фридрихсу на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через B_σ . Кроме того, $\mathcal{D}(B_\sigma) \subset H_{B_\sigma}$, где H_{B_σ} — энергетическое пространство оператора B_σ .

Лемма 3. $B_\sigma : \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, т. е. его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а собственные функции образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma)$, так и в энергетическом пространстве H_{B_σ} . Обратный оператор B_σ^{-1} является компактным и положительным в $L_2(\Gamma)$. Энергетическое пространство $H_{B_\sigma} \subset L_2(\Gamma)$ оператора B_σ состоит из тех элементов $L_2(\Gamma)$, для которых конечна квадратичная форма

$$\|u\|_{B_\sigma}^2 = \int_{\Gamma} |\nabla_2 \zeta|^2 \, d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma,$$

причем $\mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}) = H_{B_\sigma}$.

Доказательство основано на положениях общей теории положительно определенных операторов, теоремах вложения функциональных пространств и понятии эквивалентных норм. Действительно, нормы $\|\cdot\|_{B_\sigma}^2$ и $\|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}^2$ эквивалентны. Так как согласно теореме вложения С.Л. Соболева пространство $H^1(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, то H_{B_σ} также компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Поэтому по теореме С.Г. Михлина (см., например, [10], с. 145) оператор B_σ имеет дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы, а обратный оператор B_σ^{-1} является компактным положительным оператором: $0 < B_\sigma^{-1} = (B_\sigma^{-1})^*$. $\square$

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных задач.

Введем подпространство

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) := \{ \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega, \rho_0) \mid \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S) \}$$

пространства $\vec{H}^1(\Omega, \rho_0)$. Отметим, что подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ связано с кинетической энергией жидкости в открытом сосуде, плотным множеством в нем является подпространство $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ функций с конечной скоростью диссипации энергии (см. подробнее, например, [9], с.132) и скалярным произведением: $(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)} = E(\vec{u}, \vec{v})$.

Вспомогательная задача I. По заданной функции $\vec{f}_1$ найти функции $\vec{u}(x)$ и $p_1(x)$, являющиеся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho_0^{-1} \nabla p_1 - P_{0,S}(\rho_0^{-1} \mu \Delta \vec{u}) &= \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) &= 0 \quad (i = 1, 2; \text{ на } \Gamma), \quad -p_1 + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned}$$

Это аналог вспомогательной задачи С.Г.Крейна (см., например, [9]).

Определение 1. Функцию $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи I, если для любого $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ выполнено

$$\mu E(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)}. \quad (16)$$

Лемма 4. Если $\vec{f}_1 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, то задача I имеет единственное обобщенное решение $\vec{u} = \mu^{-1} A^{-1} \vec{f}_1$, где A — оператор задачи I. A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, обладающий следующими свойствами.

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$.
2. Для любого $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$, $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ имеет место тождество $(A\vec{u}, \vec{v}) = E(\vec{u}, \vec{v})$. Если $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$, то $E(\vec{u}, \vec{v}) = (A^{1/2}\vec{u}, A^{1/2}\vec{v})$.
3. Обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$.
4. Оператор A имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_n(A) = c_A^{-2/3} n^{2/3} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow +\infty), \quad c_A = \frac{1}{3\pi^2} \operatorname{mes} \Omega. \quad (17)$$

Доказательство. Утверждения данной леммы следуют из общей теории гильбертовых пар пространств (см. например, [11], с. 15–17) и из того факта, что $(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0); \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0))$ — гильбертова пара, причем $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ компактно вложено в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. При этом тождество (16) служит определением оператора A как оператора гильбертовой пары, действующего в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и заданного на плотном множестве $\mathcal{D}(A) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ с областью значений $\mathcal{R}(A) = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ (см. [11], с. 16). Асимптотическая формула (17) доказана в [12]. $\square$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде

$$H_+ \subset H_0 \subset H_-, \quad H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}, \quad H_- = (H_+)^* =: \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}. \quad (18)$$

Здесь через $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [11]).

Вспомогательная задача II. По заданной функции $\psi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_2(x)$, $x \in \Omega$, являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x_3) \nabla p_2) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x_3) \nabla p_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \rho_0^{-1}(0) p_2 &= \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Это аналог известной задачи Зарембы для уравнения Лапласа (при $\rho_0 = \text{const}$).

Лемма 5. Если $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$, то задача II имеет единственное обобщенное решение $p_2 \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)$ и

$$\|\rho_0^{-1} \nabla p_2\| = \|p_2\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)} \leq c \|\psi\|_{H_{\Gamma}^{1/2}}. \quad (19)$$

Утверждения леммы следуют непосредственно из общей схемы рассмотрения краевых задач (см. [9], с. 103–107).

Если $p_2(x)$ — решение задачи II для $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$, то $\rho_0^{-1} \nabla p_2(x) = G\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, где $G : H_{\Gamma}^{1/2} \rightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ есть линейный ограниченный оператор согласно (19).

С учетом выше сказанного вернемся к начально-краевой задаче (2)–(8), точнее, после отделения тривиального решения (12), к соответствующей начально-краевой задаче для уравнения (13). Представим $\rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ в виде

$$\rho_0^{-1} \nabla \tilde{p} = \rho_0^{-1} \nabla p_1 + \rho_0^{-1} \nabla p_2, \quad \rho_0^{-1} \nabla p_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \quad (i = 1, 2)$$

и пусть p_1 — функция из вспомогательной задачи I, а p_2 есть решение вспомогательной задачи II для $\psi = \sigma B\zeta + \rho_m(\partial^2 \zeta / \partial t^2)$, где

$$B := P_{H_0} B_{\sigma} P_{H_0}, \quad \mathcal{D}(B) = \{\zeta \in H^2(\Gamma) \mid \zeta = 0 \ (\partial\Gamma)\} \cap H_0.$$

Лемма 6. B — положительно определенный неограниченный в H_0 оператор с компактным положительным обратным оператором B^{-1} .

Доказательство. В силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования P_{H_0} для $\forall u, v \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{\sigma}) \ominus \{1_{\Gamma}\} \subset H_0$ имеем

$$\begin{aligned} (Bu, v) &= (P_{H_0} B_{\sigma} P_{H_0} u, v) = (B_{\sigma} P_{H_0} u, P_{H_0} v) = (B_{\sigma} u, v) = \\ &= (u, B_{\sigma} v) = (P_{H_0} u, B_{\sigma} P_{H_0} v) = (u, P_{H_0} B_{\sigma} P_{H_0} v) = (u, Bv), \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор B самосопряженный. Далее имеем

$$(Bu, u) = (B_{\sigma} u, u) \geq c \|u\|^2, \quad (20)$$

значит, B — положительно определенный оператор и, следовательно, ограниченно обратим. Обратный B^{-1} при этом является положительным оператором.

Покажем, что обратный к B оператор является компактным. Для этого достаточно доказать, что H_B компактно вложено в H_0 . Любое ограниченное множество X из H_B в силу (20) будет ограниченным и в $H_{B_{\sigma}}$. Как было показано ранее (см. лемму 3), $H_{B_{\sigma}}$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Но в силу вложения $X \subset H_B \subset H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\} \subset L_2(\Gamma)$ получаем, что X компактно в H_0 . Таким образом, любое ограниченное множество в H_B компактно в H_0 , а следовательно, B^{-1} — компактный оператор, что и требовалось доказать. $\square$

4. ПЕРЕХОД К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В дальнейшем все искомые и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt .

Итогом приведенных выше преобразований является

Теорема 1. *Классическое решение начально-краевой задачи (2)–(8) является решением задачи Коши для системы дифференциально операторных уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu A\vec{u} + \sigma GB\zeta + \rho_m G \frac{d^2\zeta}{dt^2} + P_{0,S}(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) &= P_{0,S} \vec{f} =: \vec{f}_{0,S}, \\ \frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n \vec{u} &= 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0 \quad (\zeta'(0) = \zeta^1 = \gamma_n \vec{u}^0), \quad \rho(0) &= \rho^0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь A есть оператор задачи I, G — оператор, связанный с задачей II, и γ_n — оператор следа:

$$\gamma_n \vec{u} := (\vec{u} \cdot \vec{n})_\Gamma, \quad \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0).$$

Будем считать, что функция $(\gamma_n \vec{u})(t)$ непрерывно дифференцируема по t и ее производная принадлежит $D(G) = H_\Gamma^{1/2}$. Тогда

$$G \frac{d^2\zeta}{dt^2} = G \gamma_n \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Осуществим в (21) замену

$$\sigma^{1/2} B^{1/2} \zeta(t) =: \eta(t)$$

и будем считать, что $\eta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. В силу второго уравнения (21) имеем

$$\frac{d\eta}{dt} = \sigma^{1/2} B^{1/2} \frac{d\zeta}{dt} = \sigma^{1/2} B^{1/2} \gamma_n \vec{u}.$$

Введем обозначения:

$$P_{0,S}(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) =: C\rho, \quad -\nabla \rho_0 \cdot \vec{u} =: C^* \vec{u}. \quad (22)$$

Лемма 7. *Операторы $C : \mathfrak{L}_2(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и $C^* : \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega)$, определенные соотношениями (22), взаимно сопряжены и*

$$\|C\| = \|C^*\| \leq N_0.$$

Доказательство непосредственно следует из тождества

$$(C\rho, \vec{u}) = (\rho, C^* \vec{u})_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} = g \int_\Omega \rho u_3 d\Omega \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \forall \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega),$$

которое выводится с использованием определений скалярных произведений (10) и (14), величины $N^2(x_3)$ из (1) и обозначений (22). $\square$

С учетом выше сказанного начально-краевая задача (2)–(8) распадается на тривиальное соотношение (12) и задачу Коши для системы дифференциально операторных уравнений (21), которые могут быть переписаны в виде

$$\mathcal{M} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0, \quad (23)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} I + \rho_m G \gamma_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu A & \sigma^{1/2} G B^{1/2} & C \\ -\sigma^{1/2} B^{1/2} \gamma_n & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathcal{F} = (\vec{f}_{0,S}; 0; 0)^t, \quad y = (\vec{u}, \eta, \rho)^t.$$

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(t)$, $\eta = \eta(t) = \sigma^{1/2} B^{1/2} \zeta(t)$, $\rho = \rho(t)$ – неизвестные функции со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ и $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ соответственно, а индекс $(\dots)^t$ означает операцию транспонирования матрицы.

Определение 2. Сильным решением задачи Коши (23) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $dy/dt \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, кроме того, $\mathcal{A}y(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$, $\mathcal{M}dy(t)/dt \in C([0, T]; \mathcal{H})$ и для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (23).

Лемма 8. Операторы γ_n и G взаимно сопряженные. При этом (см. (18))

$$\gamma_n : \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \longrightarrow \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}, \quad G : H_\Gamma^{1/2} \longrightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0).$$

Доказательство. Возьмем функцию $p \in H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$, являющуюся решением задачи II при $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$, и поле $\vec{v} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$. В силу условий $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (в Ω_1) и $\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$ (на S_1) получим

$$\begin{aligned} (\rho_1^{-1}(x_3) \nabla p, \vec{v})_{\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)} &= \int_\Omega \nabla p \cdot \vec{v} d\Omega = - \int_\Omega p \operatorname{div} \vec{v} d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega} p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_\Gamma p \gamma_n \vec{v} d\Gamma = \int_\Gamma \rho_0(0) \psi \gamma_n \vec{v} d\Gamma \end{aligned}$$

или

$$(G\psi, \vec{v})_{\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)} = (\psi, \gamma_n \vec{v})_{H_0} \quad \forall \psi \in H_\Gamma^{1/2}, \quad \forall \vec{v} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0). \quad (25)$$

Тождество (25) есть определение сопряженного оператора и, значит, $\gamma_n^* = G$. Кроме того, (25) можно распространить на $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, так как элементы из $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ ортогональны элементам из $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ и так как $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ на $\partial\Omega$ для $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$. Таким образом, $\gamma_n : \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \longrightarrow \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, а $G : H_\Gamma^{1/2} \longrightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. $\square$

Лемма 9. Оператор $\mathcal{M} = \operatorname{diag}(I + \rho_m G \gamma_n; I; I)$ из (24) является положительно определенным неограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$, где

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \{ (\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{H} : \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0), \eta \in H_0, \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega) \}.$$

Доказательство. Так как $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$ плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, то $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ плотно в $\mathcal{H}$. Для любого элемента $(\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ имеем $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$, а значит, $\gamma_n \vec{u} \in H_\Gamma^{1/2}$, тогда $G(\gamma_n \vec{u}) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Отметим, что согласно лемме 8 операторы γ_n и G взаимно сопряжены. Следовательно, для y_1 и y_2 из $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}y_1, y_2)_\mathcal{H} &= (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \rho_m (G\gamma_n \vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)} + (\eta_1, \eta_2)_{L_2(\Gamma)} + (\rho_1, \rho_2)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} = \\ &= (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \rho_m (\gamma_n \vec{u}_1, \gamma_n \vec{u}_2)_{L_2(\Gamma)} + (\eta_1, \eta_2)_{L_2(\Gamma)} + (\rho_1, \rho_2)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} = (y_1, \mathcal{M}y_2)_\mathcal{H}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает симметричность оператора $\mathcal{M}$ на $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Пусть $y_1 = y_2 = y$, тогда из последнего получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}y, y)_{\mathcal{H}} &= \|\vec{u}\|_{L_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \rho_m \|\gamma_n \vec{u}\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\rho_1\|_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}^2 \geq \\ &\geq \|\vec{u}\|_{L_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\rho_1\|_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}^2 = \|y\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ — положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. □

Лемма 10. *Оператор $\mathcal{A}$ из (24) с областью определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ y = (\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{H} : \vec{u} \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}\gamma_n), B^{1/2}\eta \in H_{\Gamma}^{1/2}, \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega) \}$$

является аккретивным оператором.

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{A}$ в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + i\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} \mu A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^{1/2}GB^{1/2} & -iC \\ i\sigma^{1/2}B^{1/2}\gamma_n & 0 & 0 \\ iC^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда для любого $y = (\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = (\mu A\vec{u}, \vec{u}) \geq 0,$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ является аккретивным оператором. □

Отметим, что оператор $\mathcal{A}$ не является максимально аккретивным оператором, однако он допускает расширение до максимально аккретивного.

Введем вспомогательные операторы Q_1 и Q_1^+ и рассмотрим их свойства (леммы 11 и 12).

Лемма 11. *Оператор $Q_1 := B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4} : \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \rightarrow H_0$ является ограниченным.*

Доказательство. Будем предполагать, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ такова, что для оператора A из первой вспомогательной задачи выполнено включение

$$\mathcal{D}(A) \subset \vec{H}^2(\Omega, \rho_0) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0). \quad (26)$$

Отметим, что для области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ имеется свойство $\mathcal{D}(A) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ (см. лемму 4). Далее, как следует из монографии [13], в случае граничного условия Дирихле на гладких участках границы $\partial\Omega$ решение первой вспомогательной задачи (при $\rho_0 = \text{const}$) локально принадлежит пространству $\vec{H}^2(\hat{\Omega})$ для любой внутренней подобласти $\hat{\Omega} \subset \Omega$ либо для $\hat{\Omega}$, примыкающей к гладкому участку $\partial\Omega$. Аналогичное утверждение справедливо для условия Неймана, т. е. условия, принятого в первой вспомогательной задаче на Γ . Этот факт установлен в работе [14].

Согласно предположению (26) оператор A^{-1} ограничен из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в $\vec{H}^2(\Omega, \rho_0) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0)$. Кроме того, оператор $A^{-1/2}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) \subset \vec{H}^1(\Omega, \rho_0)$. Так как область определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1})$ образует замкнутое подпространство в $\vec{H}^2(\Omega, \rho_0)$, а $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) = \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{R}(A^{-1/2})$ — замкнутое подпространство в $\vec{H}^1(\Omega, \rho_0)$, то, как следует из теории шкал гильбертовых пространств, оператор $A^{-3/4}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega, \rho_0) \cap \vec{H}^{3/2}(\Omega, \rho_0)$.

Как известно (см., например, [15]), оператор следа γ , а потому и оператор γ_n взятия следа нормальной компоненты векторного поля являются ограниченными операторами из $\vec{H}^p(\Omega, \rho_0)$ на $H^{p-1/2}(\Gamma)$, где Γ — любое достаточно гладкий кусок $\partial\Omega$.

Из выше сказанного, следует, что оператор $\gamma_n A^{-3/4}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в $H^1(\Gamma) \cap H_0$. Кроме того, так как для элементов из $\mathcal{D}(A)$ на границе S выполняется условие Дирихле, которое сохраняется для всех элементов вида $A^{-\alpha} \vec{u}$, $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\alpha > 1/2$, то функция $\gamma_n A^{-3/4}$ при любом $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ удовлетворяет условию Дирихле на $\partial\Gamma$, т. е.

$$\gamma_n A^{-3/4} \in \{ \zeta \in H^1(\Gamma), \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \} \cap H_0 = \mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Таким образом, оператор $B^{1/2} \gamma_n A^{-3/4}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в H_0 . $\square$

Лемма 12. Для оператора $Q_1^+ := A^{-3/4} G B^{1/2}$ с областью определения $\mathcal{D}(Q_1^+) = \{ \eta \in \mathcal{D}(B^{1/2}), B^{1/2} \eta \in \mathcal{D}(G) = H_{\Gamma}^{1/2} \}$ справедливы свойства

$$Q_1^+ \subset Q_1^*, \quad Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(Q_1^+)}, \quad \overline{Q_1^+} = Q_1^*.$$

Доказательство. Для любого $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\eta \in \mathcal{D}(Q_1^+)$ имеем

$$(Q_1^+ \vec{v}, \eta)_{H_0} = (B^{1/2} \gamma_n A^{-3/4} \vec{v}, \eta)_{H_0} = (A^{-3/4} \vec{v}, G B^{1/2} \eta) = (\vec{v}, A^{-3/4} G B^{1/2} \eta) = (\vec{v}, Q_1^+ \eta).$$

Отсюда $Q_1^+ \subset Q_1^*$ и $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(Q_1^+)}$. Согласно лемме 11 оператор Q_1 ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в H_0 , значит, оператор Q_1^* тоже ограничен. Тогда для любого $\eta \in \mathcal{D}(Q_1^+)$ имеет место неравенство

$$\|Q_1^+ \eta\| = \|Q_1^* \eta\| \leq \|Q_1^*\| \cdot \|\eta\|_{H_0}.$$

Следовательно, Q_1^+ ограничен на $\mathcal{D}(Q_1^+)$, а поэтому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q_1^* , т. е. $\overline{Q_1^+} = Q_1^*$. $\square$

5. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для доказательства теоремы существования сильного решения задачи Коши (23) осуществим следующие преобразования. Произведем в уравнении (23) замену $y(t) = e^t z(t)$. В результате получим уравнение относительно z :

$$\mathcal{M} \frac{dz}{dt} + (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})z + (\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I})z = e^{-t} \mathcal{F}, \quad \mathcal{I} := \text{diag}(0; I_{H_0}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}), \quad (27)$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I} \gg 0$. Это возможно, так как $\mathcal{M} \gg 0$ в $\mathcal{H}$.

Рассмотрим для простоты задачу (27) при $\mu = 1$, $\sigma = 1$.

Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})$ оператора $\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}$ совпадает с

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ (\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{H} : \vec{u} \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B^{1/2} \gamma_n), B^{1/2} \eta \in H_{\Gamma}^{1/2}, \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega) \}.$$

На $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператор $\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}$ является равномерно аккретивным, т. е.

$$\text{Re}(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}) = \text{diag}(\mu A, \varepsilon I_{H_0}, \varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}) \gg 0 \quad \text{на } \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Кроме того, оператор $(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})^+ := (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})^*|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, как нетрудно проверить, также является равномерно аккретивным на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Однако он не является замкнутым, таким образом, оператор $\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}$ не является максимальным аккретивным.

Оператор $\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}$ допускает замыкание (см. [16], с.109) $\mathcal{A}_{\varepsilon} := \overline{(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})}$.

В этом случае имеет место соотношение

$$\mathcal{A}_{\varepsilon} + (\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I}) = \overline{(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I})} + (\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I}) = \overline{(\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}) + (\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I})},$$

так как оператор $\mathcal{M} - \varepsilon \mathcal{I}$ ограничен и задан на всем пространстве. Учитывая это обстоятельство, будем замыкать только оператор $\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{I}$.

Лемма 13. Замыкание $\mathcal{A}_\varepsilon = \overline{(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I})}$ оператора $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I}$ есть максимальный равномерно аккретивный оператор. При этом

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon) = \{ (\vec{u}, \eta, \rho)^t \mid \vec{u} + A^{-1/4}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A), \vec{u} \in \mathcal{D}(B^{1/2}\gamma_n), \eta \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap H^{3/2}(\Gamma) \}, \quad (28)$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1A^{-1/4} & I_{H_0} & 0 \\ -Q_2A^{-1/4} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Q_1A^{1/2}Q_2^* \\ 0 & Q_2A^{1/2}Q_1^* & Y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1/4}Q_1^* & A^{-1/4}Q_2^* \\ 0 & I_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

где операторы Q_1 и Q_1^* введены в леммах 11 и 12, $Q_2 := C^*A^{-3/4}$, $Q_2^* = A^{-3/4}C$, $Y_1 := \varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^*$, $Y_2 := \varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2A^{1/2}Q_2^*$.

Доказательство. Можно проверить, что оператор $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I}$ представим в виде:

$$\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1A^{-1/4} & I_{H_0} & 0 \\ -Q_2A^{-1/4} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & Y_1^+ & Q_1A^{1/2}Q_2^* \\ 0 & Q_2A^{1/2}Q_1^+ & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1/4}Q_1^+ & A^{-1/4}Q_2^* \\ 0 & I_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

где $Y_1^+ := \varepsilon I + Q_1A^{1/2}Q_1^+$. Замыкание $\mathcal{A}_\varepsilon$ оператора $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I}$ состоит в замене во втором и третьем блоках оператора Q_1^+ на Q_1^* . Действительно, после такого замыкания оператор $\mathcal{A}$ представим в виде произведения $\mathcal{A} = H_1Y_AH_2$, где операторы H_i ($i = 1, 2$) ограничены, так как операторы $A^{-1/4}$, Q_1 и Q_2 ограничены. Если показать, что Y_A^{-1} ограничен, то будет следовать, что оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ замкнут.

Найдем Y_A^{-1} , для этого рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Q_1A^{1/2}Q_2^* \\ 0 & Q_2A^{1/2}Q_1^* & Y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \eta_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix}.$$

Это соотношение равносильно системе

$$\begin{aligned} A\vec{u} &= \vec{u}_1, \\ (\varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^*)\eta + Q_1\hat{Q}_2^*\rho &= \eta_1, \quad \hat{Q}_2^* = A^{-1/4}C, \\ \hat{Q}_2Q_1^*\eta + (\varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + \hat{Q}_2\hat{Q}_2^*)\rho &= \rho_1, \quad \hat{Q}_2 = C^*A^{-1/4}. \end{aligned}$$

Так как оператор $\varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^*$ является положительно определенным, то существует ограниченный обратный к нему оператор $M_1 := (\varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^*)^{-1}$.

Следовательно, $\eta = M_1\eta_1 - M_1Q_1\hat{Q}_2^*\rho$. Далее, подставим η в третье уравнение системы, получим

$$\hat{Q}_2Q_1^*M_1\eta_1 + \left(\varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + \hat{Q}_2\hat{Q}_2^* - \hat{Q}_2Q_1^*M_1Q_1\hat{Q}_2^* \right) \rho = \rho_1.$$

Оператор $M_2 := \varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + \hat{Q}_2\hat{Q}_2^* - \hat{Q}_2Q_1^*M_1Q_1\hat{Q}_2^*$ является положительно определенным. Действительно, для любого $\rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} (M_2\rho, \rho) &= \left((\varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + \hat{Q}_2\hat{Q}_2^* - \hat{Q}_2Q_1^*M_1Q_1\hat{Q}_2^*)\rho, \rho \right) = \varepsilon \|\rho\|^2 + \|\hat{Q}_2^*\rho\|^2 - (M_1Q_1\hat{Q}_2^*\rho, Q_1\hat{Q}_2^*\rho) \geq \\ &\geq \varepsilon \|\rho\|^2 - \left\| \left(\varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^* \right)^{-1} \right\| \cdot \|Q_1\hat{Q}_2^*\rho\|^2 \geq \left(\varepsilon - \varepsilon^{-1} \cdot \|Q_1\hat{Q}_2^*\|^2 \right) \|\rho\|^2. \end{aligned}$$

Остается выбрать ε так, чтобы $\|Q_1\hat{Q}_2^*\| < \varepsilon$.

С учетом выше сказанного, получаем

$$Y_A^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M_1 + M_1Q_1\hat{Q}_2^*M_2^{-1}\hat{Q}_2Q_1^*M_1 & -M_1Q_1\hat{Q}_2^*M_2^{-1} \\ 0 & -M_2^{-1}\hat{Q}_2Q_1^*M_1 & M_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Все элементы обратной матрицы являются ограниченными операторами, а значит, Y_A^{-1} ограничен и поэтому оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ замкнут.

В частности, из представления для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ следует $\vec{u} + A^{-1/4}Q_1^*\eta + A^{-1}C\rho \in \mathcal{D}(A)$. Так как $A^{-1}C\rho \in \mathcal{D}(A)$, то $\vec{u} + A^{-1/4}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A)$. Остальные требования из (28) очевидны. $\square$

Рассмотрим уравнение с замкнутым оператором

$$\mathcal{M}\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon z + (\mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})z = e^{-t}\mathcal{F}. \quad (29)$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I}$ уже максимальный аккретивный. Оператор $\mathcal{M}$ самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в $\mathcal{H}$, значит, для него существует оператор $\mathcal{M}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Преобразуем (29) к виду

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})z + \mathcal{M}^{-1}e^{-t}\mathcal{F}, \quad z(0) = y^0. \quad (30)$$

Введем в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle z, z \rangle := (\mathcal{M}z, z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{M}^{1/2}z, \mathcal{M}^{1/2}z)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы старой норме следует из свойств оператора $\mathcal{M}$.

Легко проверить, что оператор $-\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})$ будет максимальным диссипативным в новом скалярном произведении и, значит, задача Коши (30) будет равномерно корректной (см. [16], с. 166), а оператор $-\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})$ порождает сжимающую в новом скалярном произведении полугруппу операторов

$$\mathcal{U}(t) := \exp(-t\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})).$$

Справедлива

Теорема 2. *Задача Коши (30) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, выражаемое формулой*

$$z(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{M}^{-1}e^{-\tau}\mathcal{F}(\tau) d\tau,$$

если выполнены условия $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon)$, $\mathcal{F} \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$.

Таким образом, задача Коши

$$\mathcal{M}\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon z + (\mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})z = e^{-t}\mathcal{F}, \quad z(0) = y^0 \quad (31)$$

имеет единственное сильное решение, если выполнены условия теоремы 2. Перепишем задачу (31) в виде

$$\begin{aligned} (I + \rho_m G \gamma_n) d\vec{u}/dt + A(\vec{u} + A^{-1/4}Q_1^*\eta) + C\rho &= e^{-t}f_{0,S}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \\ d\eta/dt - Q_1 A^{3/4}\vec{u} + \varepsilon\eta &= 0, \quad \eta(0) = \eta^0 = B^{1/2}\zeta^0, \\ d\rho/dt - Q_2 A^{3/4}\vec{u} + \varepsilon\rho &= 0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что скобки в первом уравнении раскрыть нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать более широкому множеству и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A)$ (кроме того, здесь и далее, предполагаем, что $\vec{u} \in \mathcal{D}(B^{1/2}\gamma_n)$). Для обратного перехода от

задачи (31) к задаче Коши для уравнения (27) умножим второе уравнение системы на $e^{\varepsilon t}$, тогда $d/dt (e^{\varepsilon} \eta(t)) = e^{\varepsilon t} Q_1 A^{3/4} \vec{u}(t)$. Отсюда

$$\eta(t) = \eta^0 e^{-\varepsilon t} + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} Q_1 A^{3/4} \vec{u}(s) ds. \quad (33)$$

Подставляя (33) в первое уравнение (32), получаем

$$(I + \rho_m G \gamma_n) \frac{d\vec{u}}{dt} + A \left(\vec{u}(t) + e^{-\varepsilon t} A^{-1/4} Q_1^* \eta^0 + \right. \\ \left. + A^{-1/4} Q_1^* \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} Q_1 A^{3/4} \vec{u}(s) ds \right) + C \rho = \vec{f}_{0,s}(t) e^{-\varepsilon t}. \quad (34)$$

Из теоремы 2 следует, что функция

$$\vec{u}(t) + e^{-\varepsilon t} A^{-1/4} Q_1^* \eta^0 + A^{-1/4} Q_1^* \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} Q_1 A^{3/4} \vec{u}(s) ds =: \vec{u}_\varepsilon(t) \quad (35)$$

принадлежит $\mathcal{D}(A)$ для любого $t \in [0, T]$ и $\vec{u}_\varepsilon(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$.

Если $\eta^0 \in \mathcal{D}(Q_1^+)$, то по лемме 12 получаем $Q_1^* \eta^0 = Q_1^+ \eta^0 = A^{-3/4} G B^{1/2} \eta^0$ и поэтому $A^{-1/4} Q_1^* \eta^0 = A^{-1} G B^{1/2} \eta^0 \in \mathcal{D}(A)$.

Рассмотрим оператор $P := A^{-1/4} Q_1^* Q_1 A^{3/4} = A^{-1/4} Q_1^* B^{1/2} \gamma_n$, где $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(P)$. Введем $\mathcal{D}(A)$ как гильбертово пространство с нормой графика

$$\| \vec{u} \|_{\mathcal{D}(A)} := \| A^{1/2} \vec{u} \|.$$

Тогда, очевидно, сужение $P_a := P|_{\mathcal{D}(A)}$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{D}(A)$. Этот факт позволяет рассмотреть соотношение (35) как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $\mathcal{D}(A)$. Здесь функция

$$\vec{u}_\varepsilon(t) - e^{-\varepsilon t} A^{-1/4} Q_1^* \eta^0 \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$$

и ядро $P_a e^{-\varepsilon(t-s)}$ интегрального оператора непрерывно по t, s на $\mathcal{D}(A)$. Поэтому задача (35) имеет единственное решение $\vec{u}(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$ и каждое слагаемое в (35) есть элемент из $C([0, T]; \mathcal{D}(A))$. Таким образом, в уравнении (34) и потому в первом уравнении (32) можно раскрыть скобки. Тем самым получим, что для функции $z(t)$ выполнено уравнение (27). Осуществляя в уравнении (27) обратную замену $z(t) = e^{-t} y(t)$, получаем, что для задачи Коши (23) имеет место следующая

Теорема 3. *Задача Коши (23) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены условия*

$$y^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \mathcal{F}(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}).$$

Переформулируем результат теоремы для исходной начально-краевой задачи.

Теорема 4. *Начально-краевая задача (2)–(8) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B^{1/2} \gamma_n), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(B) \cap H^{5/2}(\Gamma), \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad \vec{f}(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильгамов М.А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ* (Наука, М., 1969).
- [2] Вольмир А.С. *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости* (Наука, М., 1979).
- [3] Перцев А.К., Платонов Э.Г. *Динамика оболочек и пластин* (Судостроение, Л., 1987).
- [4] Capodanno P. *Vibrations d'un Liquide dans un Container Cyllindrique Symmetrique a Fond Elastique en Apesanteur*, Mecanique Appl. **38** (1), 59–72 (1993).
- [5] Capodanno P. *Vibrations d'un Fluide Compressible une Cavite Fermee par Une Membran Supportee par un Escri*, Mech. Resch Communicat. **22** (1), 1–7 (1995).
- [6] Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д., Пашкова Ю.С. *Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем*, Учен. зап. Симф. ун-та, **41** (2), 98–108 (1995).
- [7] Пашкова Ю.С. *Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем* (Автореф. дис., Донецк, 1996).
- [8] Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. *Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами*, Теор. прикл. механ. **29**, 151–163 (1999).
- [9] Korachevsky N.D., Krein S.G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. V.1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid* (Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001).
- [10] Михлин С.Г. *Курс математической физики* (Наука, М., 1968).
- [11] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и ее приложения* (Симферополь, 2011).
- [12] Metivier G. *Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationnelles a des sousespaces*, J. Math. Pures Appl., **57** (2), 133–156 (1978).
- [13] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* (Наука, М., 1970).
- [14] Солонников В.А. *О дифференциальных свойствах решения первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса*, Тр. МИ АН СССР **73**, 221–291 (1964).
- [15] Солонников В.А. *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагмиса–Л. Ниренберга*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **28** (3), 665–706 (1964).
- [16] Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах* (Наука, М., 1967).

Денис Олегович Цветков

Крымский федеральный университет (Таврическая академия),

пр-т Вернадского, д. 4, г. Симферополь, 295000, Россия,

e-mail: tsvetdo@gmail.com

D.O. Tsvetkov

On an initial-boundary value problem which arises in the dynamics of a viscous stratified fluid

Abstract. An initial-boundary value problem is considered which describes the linear vibrations of a viscous stratified fluid with elastic membrane in a bounded vessel. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

Keywords: stratification effect in viscous fluids, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.

Denis Olegovich Tsvetkov

Crimean Federal University (Taurida Academy),

4 Vernadskogo Ave., Simferopol, 295000 Russia,

e-mail: tsvetdo@gmail.com