Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Б. Салимов, Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики решеток без дополнительных условий, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 74–80

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-74-80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:40:18

Краткое сообщение

Р.Б. САЛИМОВ

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ
РЕШЕТОК БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ**

Аннотация. Рассматривается обратная краевая задача аэрогидродинамики, в которой требуется найти форму профиля решетки, обтекаемой потенциальным потоком несжимаемой невязкой жидкости, когда распределение величины скорости на нем задано как функция дуговой абсциссы точки профиля, и определить период решетки.

Ключевые слова: обратная краевая задача аэрогидродинамики, решетка, профиль, комплексный потенциал.

УДК: 533.692

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-74-80

1. Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ расположена решетка профилей, период которой равен $te^{i\nu}$ ([1], с. 123; [2], с. 291), $t > 0$, $0 < \nu < \pi$. Решетка обтекается установившимся потоком несжимаемой невязкой жидкости, комплексный потенциал его обозначим через $w(z)$. Значение комплексной скорости $w'(z)$ на бесконечности слева от решетки обозначим через $\nu_1 e^{-i\alpha_1}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, справа от решетки — через $\nu_2 e^{-i\alpha_2}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Поток, обтекающий решетку, имеет период, равный $te^{i\nu}$, т.е. $w'(z + te^{i\nu}) = w'(z)$.

Обозначим через L_z профиль решетки, точка разветвления на котором совпадает с точкой $z = 0$.

Введем плоскость комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ ($\rho > 0$, $\text{Im}\gamma = 0$). Функцией $z = z(\zeta)$ отобразим конформно внешность решетки профилей на бесконечнолистную риманову поверхность внутри системы концентрических окружностей, имеющих уравнение $|\zeta| = 1$, требуя, чтобы бесконечно удаленным точкам слева и справа от решетки отвечали соответственно точки $\zeta = -q$ и $\zeta = q$, $0 < q < 1$. Эта функция отображает конформно круг $|\zeta| < 1$ с разрезом по отрезку, соединяющему точки $\zeta = -q$, $\zeta = q$, на область, ограниченную профилем решетки и двумя конгруэнтными линиями, причем разность комплексных координат соответственных точек линии, лежащей выше профиля, и линии, расположенной ниже профиля, равна $te^{i\nu}$ ([1], с. 132). В дальнейшем будем рассматривать ветвь $z(\zeta)$, которая окружность $|\zeta| = 1$ переводит в профиль L_z .

Обозначим

$$w(z(\zeta)) = W(\zeta), \quad (1)$$

будем рассматривать $W(\zeta)$ как комплексный потенциал соответствующего течения в области $|\zeta| \leq 1$.

Для производной функции $W(\zeta)$ справедливо представление ([1], с. 132)

$$\frac{dW}{d\zeta} = iB_1 e^{-i\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}} (\zeta - e^{i\gamma_A})(\zeta - e^{i\gamma_B})(\zeta^2 - q^2)^{-1}(\zeta^2 - \frac{1}{q^2})^{-1}, \quad (2)$$

где B_1 — действительное число, $B_1 \neq 0$, причем $e^{i\gamma_A}, e^{i\gamma_B}$ — точки на окружности $|\zeta| = 1$, отвечающие соответственно точке разветвления A и точке схода B потока на профиле L_z решетки.

На профиле L_z и на окружности $|\zeta| = 1$ установим направление, при котором область течения остается слева.

Циркуляция Γ скорости по окружности $|\zeta| = 1$ с указанным направлением будет ([1], с. 141):

$$\Gamma = \int_{|\zeta|=1} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta, \quad (3)$$

такой же будет и циркуляция скорости по L_z .

С учетом формул (2), (3) получим

$$\Gamma = -4\pi B_1 q^2 (1 - q^4)^{-1} \cos \frac{\gamma_A - \gamma_B}{2}. \quad (4)$$

Производная $w'_z(z(\zeta))$, аналитичная в круге $|\zeta| < 1$, в точках $\zeta = -q, \zeta = q$ соответственно принимает значения $v_1 e^{-i\alpha_1}, v_2 e^{-i\alpha_2}$. Согласно (1) $z'(\zeta) = W'(\zeta)/w'_z(z(\zeta))$, поэтому в силу (2) в окрестностях точек $\zeta = -q, \zeta = q$ соответственно будут справедливы разложения

$$z'(\zeta) = \frac{CM_1}{v_1 e^{-i\alpha_1}} \cdot \frac{1}{\zeta + q} + a_0^- + a_1^-(\zeta + q) + a_2^-(\zeta + q)^2 + \dots, \quad (5)$$

$$z'(\zeta) = \frac{CM_2}{v_2 e^{-i\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\zeta - q} + a_0^+ + a_1^+(\zeta - q) + a_2^+(\zeta - q)^2 + \dots, \quad (6)$$

где

$$M_1 = -\frac{1}{2q}(q + e^{i\gamma_A})(q + e^{i\gamma_B})/(q^2 - q^{-2}), \quad M_2 = \frac{1}{2q}(q - e^{i\gamma_A})(q - e^{i\gamma_B})/(q^2 - q^{-2}), \quad (7)$$

$$C = iB_1 e^{-i\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}} = i e^{-i\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}} \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot (q^2 - q^{-2}) / \cos \frac{\gamma_B - \gamma_A}{2}. \quad (8)$$

Функция $z(\zeta)$ получает приращение, равное $te^{i\nu}$, при обходе окружности малого радиуса ε с центром в точке $\zeta = -q$, начиная от точки, лежащей на верхнем берегу разреза, проведенного по отрезку, соединяющему точки $\zeta = -q, \zeta = q$. С другой стороны, согласно (5) это приращение равно $2\pi i C M_1 / (v_1 e^{-i\alpha_1})$. Поэтому имеет место соотношение

$$2\pi i C M_1 / (v_1 e^{-i\alpha_1}) = te^{i\nu}. \quad (9)$$

На основании аналогичных рассуждений, относящихся к точке $\zeta = q$, придем к равенству

$$2\pi i C M_2 / (v_2 e^{-i\alpha_2}) = -te^{i\nu}. \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) эквивалентны системе

$$\begin{aligned} 2\pi i C M_1 &= te^{i\nu} v_1 e^{-i\alpha_1}, \\ 2\pi i C (M_1 + M_2) &= te^{i\nu} (v_1 e^{-i\alpha_1} - v_2 e^{-i\alpha_2}), \end{aligned} \quad (11)$$

в которой в силу (7), (8) $2\pi i C (M_1 + M_2) = \Gamma$.

В дальнейшем будем считать, что $\Gamma \neq 0$ и согласно (4) $\gamma_B - \gamma_A \neq \pi$. При этом система

$$\Gamma = te^{i\nu} (v_1 e^{-i\alpha_1} - v_2 e^{-i\alpha_2}), \quad (12)$$

$$\left(qe^{-i\frac{\gamma_A}{2}} + e^{i\frac{\gamma_A}{2}}\right) \left(qe^{-i\frac{\gamma_B}{2}} + e^{i\frac{\gamma_B}{2}}\right) = \frac{v_1 e^{-i\alpha_1}}{v_1 e^{-i\alpha_1} - v_2 e^{-i\alpha_2}} 4q \cos \frac{\gamma_B - \gamma_A}{2}, \quad (13)$$

равносильна системе (11) и, следовательно, системе (9), (10).

Пусть $\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)$ есть потенциал скорости на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$ для вышеуказанного течения в области $|\zeta| \leq 1$, удовлетворяющий условию $\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)|_{\gamma=\gamma_A} = 0$. Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) = W'(e^{i\gamma}) i e^{i\gamma},$$

на основании формулы (2) с учетом (8) получим

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1 - q^4}{\cos \frac{\gamma_B - \gamma_A}{2}} \frac{\sin \frac{\gamma - \gamma_A}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_B}{2}}{1 - 2q^2 \cos 2\gamma + q^4},$$

$$\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) = \int_{\gamma_A}^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) d\gamma.$$

2. Рассмотрим решение следующей обратной краевой задачи. Пусть s — дуговая абсцисса точки профиля L_z , отсчитываемая от точки разветвления A потока в указанном выше направлении, l — периметр профиля L_z , $s = s_B$ — дуговая абсцисса точки схода B потока на L_z . Требуется определить форму профиля L_z решетки, если на нем задано распределение величины скорости в виде $v = v(s)$, $0 \leq s \leq l$, $v(0) = 0$, $v(l) = 0$, $v(s_B) = 0$. Функцию $v(s)$ считаем удовлетворяющей условию Гёльдера, кроме того, примем, что существуют конечные односторонние производные, для которых имеют место условия $v'(0) = -v'(l) \neq 0$, $v'(s_B + 0) = -v'(s_B - 0) \neq 0$.

Остальные величины, характеризующие поток через решетку и период решетки, определяются в процессе решения задачи.

Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики решеток посвящено большое число работ, обзор которых имеется в книге ([3], сс. 204, 205).

Зная функцию $v(s)$, вычислим значения потенциала скорости $\varphi = \varphi(s)$ на профиле L_z

$$\varphi(s) = \int_0^s v(s) ds, \quad 0 \leq s \leq s_B, \quad \varphi(s) = \int_s^l v(s) ds, \quad s_B \leq s \leq l. \quad (14)$$

Обозначим $\varphi_B = \varphi(s_B - 0)$, $\varphi_H = \varphi(s_B + 0)$. Тогда циркуляция скорости по профилю L_z будет равна $\Gamma = \varphi_B - \varphi_H$.

В силу (1) имеем

$$\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)|_{\gamma=\gamma_B} = \varphi_B, \quad (15)$$

$$\varphi(s) = \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B), \quad \gamma_B - 2\pi \leq \gamma \leq \gamma_B. \quad (16)$$

При фиксированных величинах $\Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B$ последнее соотношение определяет зависимость $s = s(\gamma)$. Ясно, что выражение $s(\gamma)$ зависит от величин $\Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B$, т. е. является функцией $s(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)$, для которой с целью сокращения записи будем использовать символ $s(\gamma)$.

Функция $\ln w'_z(z) = \chi(\zeta)$, $z = z(\zeta)$, аналитична в круге $|\zeta| < 1$. Учитывая, что граничное значение ее действительной части равно $\ln v(s(\gamma))$, будем иметь ([4], с. 58)

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_B - 2\pi}^{\gamma_B} \ln v(s(\gamma)) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma - i\eta_0, \quad (17)$$

где η_0 — произвольная действительная постоянная. Полагая в последней формуле $\zeta = -q$, затем $\zeta = q$, придем к формулам

$$\ln v_k - i(\alpha_k - \eta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_B - 2\pi}^{\gamma_B} \ln v(s(\gamma)) \frac{e^{i\gamma} - q(-1)^{k-1}}{e^{i\gamma} + q(-1)^{k-1}} d\gamma, \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

Преобразуем систему (12), (13), заменив в ней числа ν, α_1, α_2 соответственно на $\nu - \eta_0, \alpha_1 - \eta_0, \alpha_2 - \eta_0$. Тогда эти преобразованные уравнения (12), (13), уравнения (15), (16), (18) образуют систему уравнений с неизвестными величинами $t, \nu - \eta_0, q, \gamma_A, \gamma_B, v_1, \alpha_1 - \eta_0, v_2, \alpha_2 - \eta_0$ и искомой функцией $s(\gamma)$.

Если эта система решена и названные неизвестные найдены, то при заданном значении α_1 и найденной разности $\alpha_1 - \eta_0$ вычислим величину η_0 и по формуле (17) определим $\chi(\zeta)$. Тогда $z'(\zeta) = e^{-\chi(\zeta)} W'(\zeta)$, причем производная $W'(\zeta)$ находится на основании (2), (8). Функция $z(\zeta)$ определяется формулой

$$z(\zeta) = \int_{e^{i\gamma_A}}^{\zeta} e^{-\chi(\zeta)} W'(\zeta) d\zeta.$$

Граничные значения этой функции $z(e^{i\gamma})$ определяют комплексные координаты точек L_z . Этот профиль L_z будет замкнутым контуром, так как для $z'(\zeta)$ справедливы разложения (5), (6), для коэффициентов которых выполняются условия (9), (10) в силу системы (12), (13).

3. Для решения вышеуказанной системы с неизвестными величинами и функцией $s(\gamma)$ можно использовать различные методы, в частности, методы последовательных приближений. Для простоты остановимся на случае, когда заданное на искомом профиле решетки распределение скорости близко к распределению скорости на известном профиле некоторой решетки. Разности скоростей в соответствующих точках указанных профилей являются малыми величинами, величины второго порядка относительно этих малых можно не учитывать.

Для величин, относящихся к исходной известной решетке, сохраним принятые выше обозначения, а соответствующие величины, относящиеся к искомой измененной решетке, будем обозначать теми же буквами, снабжая их верхней волнистой чертой “ $\sim$ ”. Будем считать, что для исходной решетки функции $w(z), z(\zeta)$ известны.

Для простоты примем, что $\tilde{l} = l, \tilde{s}_B = s_B$.

Пусть распределение скорости на искомом профиле $\tilde{L}_z$ измененной решетки задано в виде

$$\tilde{v}(s) = v(s) + \varepsilon f(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (19)$$

где $v(s)$ — известное распределение скорости вдоль профиля L_z исходной известной решетки, удовлетворяющее условиям, указанным в п. 2, $f(s)$ — функция, обладающая свойствами, аналогичными указанным для $v(s)$, ε — малая положительная величина, причем величинами порядка ε^2 можно пренебрегать. Примем, что функции $v(s), f(s)$ имеют непрерывные производные $v''(s), f''(s)$ в интервалах $[0, s_B], [s_B, l]$. Будем считать также, что профиль L_z обладает достаточной степенью гладкости и производная $s''(\gamma)$ непрерывна всюду на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$ ([5], с. 117).

В силу (19) $\Delta v(s) = \tilde{v}(s) - v(s) = O(\varepsilon)$. Поэтому с учетом (14) приходим к выводу, что $\Delta \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) - \varphi(s)$, $\Delta \varphi(s) = \int_0^s \Delta v(s) ds, 0 \leq s \leq s_B$, и $\Delta \varphi(s) = \int_s^l \Delta v(s) ds, s_B \leq s \leq l$, $\Delta \varphi_B = \tilde{\varphi}_B - \varphi_B = \Delta \varphi(s_B - 0)$, $\Delta \varphi_H = \tilde{\varphi}_H - \varphi_H = \Delta \varphi(s_B + 0)$, $\Delta \Gamma = \tilde{\Gamma} - \Gamma = \Delta \varphi_B - \Delta \varphi_H$ являются малыми величинами $O(\varepsilon)$. Примем, что $\Delta \gamma_A = \tilde{\gamma}_A - \gamma_A$, $\Delta \gamma_B = \tilde{\gamma}_B - \gamma_B$,

$\Delta q = \tilde{q} - q, \Delta t = \tilde{t} - t, \Delta \nu = \tilde{\nu} - \nu, \Delta v_k = \tilde{v}_k - v_k, \Delta \alpha_k = \tilde{\alpha}_k - \alpha_k, k = 1, 2, \Delta \eta_0 = \tilde{\eta}_0 - \eta_0$ являются малыми величинами $O(\varepsilon)$.

Из формулы, аналогичной (16),

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi_1(\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}, \tilde{q}, \tilde{\gamma}_{\tilde{A}}, \tilde{\gamma}_{\tilde{B}}), \tilde{\gamma}_{\tilde{B}} - 2\pi \leq \tilde{\gamma} \leq \tilde{\gamma}_{\tilde{B}} \quad (20)$$

определяется зависимость $s = \tilde{s}(\tilde{\gamma})$ ($\tilde{s}(\tilde{\gamma}) = \tilde{s}(\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}, \tilde{q}, \tilde{\gamma}_{\tilde{A}}, \tilde{\gamma}_{\tilde{B}})$), причем

$$\tilde{\varphi}_1(\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}, \tilde{q}, \tilde{\gamma}_{\tilde{A}}, \tilde{\gamma}_{\tilde{B}})|_{\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}} = \tilde{\varphi}_B.$$

Соотношение

$$\tilde{s}(\tilde{\gamma}) = s(\gamma), \tilde{\gamma}_{\tilde{B}} - 2\pi \leq \tilde{\gamma} \leq \tilde{\gamma}_{\tilde{B}}, \gamma_B - 2\pi \leq \gamma \leq \gamma_B, \quad (21)$$

определяет функцию $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$, причем $\tilde{\gamma}(\gamma_B - 2\pi) = \tilde{\gamma}_{\tilde{B}} - 2\pi, \tilde{\gamma}(\gamma_A) = \tilde{\gamma}_{\tilde{A}}, \tilde{\gamma}(\gamma_B) = \tilde{\gamma}_{\tilde{B}}$.

В силу (16), (20) имеем $\Delta \varphi(s) = \varphi_1(\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}, \tilde{q}, \tilde{\gamma}_{\tilde{A}}, \tilde{\gamma}_{\tilde{B}}) - \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B), \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma), \gamma_B - 2\pi \leq \gamma \leq \gamma_B$. Так как частные производные второго порядка функции $\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)$ непрерывны, то разность правой части предыдущей формулы мало отличается от первого дифференциала этой функции в силу указанных условий и формулы Тейлора. Поэтому указанную формулу можно записать так:

$$\Delta \varphi(s) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma}(\tilde{\gamma}(\gamma) - \gamma) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Gamma} \Delta \Gamma + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_A} \Delta \gamma_A + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_B} \Delta \gamma_B + O(\varepsilon^2). \quad (22)$$

Отсюда при $\gamma = \gamma_B$ получаем

$$\Delta \varphi_B = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Gamma}|_{\gamma=\gamma_B} \Delta \Gamma + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q}|_{\gamma=\gamma_B} \Delta q + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_A}|_{\gamma=\gamma_B} \Delta \gamma_A + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_B}|_{\gamma=\gamma_B} \Delta \gamma_B + O(\varepsilon^2), \quad (23)$$

при $\gamma = \gamma_B - 2\pi$ получим аналогичное выражение для $\Delta \varphi_H$. Формулу (22) с учетом выражений для $\Delta \varphi_B, \Delta \varphi_H$, опуская слагаемые $O(\varepsilon^2)$, представим в виде

$$\tilde{\gamma}(\gamma) - \gamma = \frac{\Delta U(\gamma)}{\varphi'_{1\gamma}} + \frac{U_1(\gamma)}{\varphi'_{1\gamma}} \Delta q + \frac{U_A(\gamma)}{\varphi'_{1\gamma}} \Delta \gamma_A + \frac{U_B(\gamma)}{\varphi'_{1\gamma}} \Delta \gamma_B; \quad (24)$$

здесь при $\gamma_A \leq \gamma \leq \gamma_B$

$$\Delta U(\gamma) = \Delta \varphi(s) - \Delta \varphi_B \frac{\varphi_1}{\varphi_B} + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \Gamma}|_{\gamma=\gamma_B} \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Gamma} \right] \Delta \Gamma, \quad s = s(\gamma),$$

$$U_1(\gamma) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q}|_{\gamma=\gamma_B} \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial q}, \quad U_A(\gamma) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_A}|_{\gamma=\gamma_B} \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_A}, \quad U_B(\gamma) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_B}|_{\gamma=\gamma_B} \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_B},$$

при $\gamma_B - 2\pi \leq \gamma \leq \gamma_A$ в последних четырех формулах φ_B надо заменить на φ_H , условие $\gamma = \gamma_B$ на условие $\gamma = \gamma_B - 2\pi$.

В силу условий, которым удовлетворяют $\Delta v(s), s(\gamma)$, функция $\tilde{\gamma}(\gamma)$ из (24), дважды дифференцируема в интервалах $\gamma_A \leq \gamma \leq \gamma_B, \gamma_B - 2\pi \leq \gamma \leq \gamma_A$ и имеет ограниченную производную $\tilde{\gamma}''(\gamma)$.

Формулу (18) при $k = 1$ запишем для величин измененного контура $\tilde{L}_z$, когда плотность интеграла будет равна $\ln \tilde{v}(\tilde{s}(\tilde{\gamma}))$, в интеграле формулы (с пределами $\tilde{\gamma}_B - 2\pi, \tilde{\gamma}_B$) сделаем замену $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$. Полученную формулу преобразуем, вычитая почленно части соотношения (18) при $k = 1$.

Тогда, принимая во внимание формулы $\ln \tilde{v}(s) = \ln v(s) + \Delta v(s)/v(s), \ln \tilde{v}_k = \ln v_k + \Delta v_k/v_k, k = 1, 2$, справедливые с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$, в рамках принятой точности будем

иметь

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_1}{v_1} - i(\Delta\alpha_1 - \Delta\eta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_B - 2\pi}^{\gamma_B} \{ \ln v(s(\gamma)) [-\Delta q S_2(\gamma, q) + \\ + i q S_2(\gamma, q)(\tilde{\gamma}(\gamma) - \gamma) + S_1(\gamma, q)(\tilde{\gamma}'(\gamma) - 1)] + \frac{\Delta v(s(\gamma))}{v(s(\gamma))} S_1(\gamma, q) \} d\gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

где $S_1(\gamma, q) = (e^{i\gamma} - q)/(e^{i\gamma} + q)$, $S_2(\gamma, q) = 2e^{i\gamma}/(e^{i\gamma} + q)^2$. Подставляя сюда выражение (24) для $\tilde{\gamma}(\gamma) - \gamma$ и ее производной согласно (24), придем к соотношению

$$\frac{\Delta v_1}{v_1} - i(\Delta\alpha_1 - \Delta\eta_0) = \Delta d_{10} + a_{11}\Delta q + a_{12}\Delta\gamma_A + a_{13}\Delta\gamma_B, \quad (26)$$

где $\Delta d_{10}, a_{1k}$, $k = 1, 2, 3$, — известные интегралы, получаемые из (25) с учетом (24).

Поступая аналогично, на основании (18) при $k = 2$ с учетом (24) получим уравнение

$$\frac{\Delta v_2}{v_2} - i(\Delta\alpha_2 - \Delta\eta_0) = \Delta d_{20} + a_{21}\Delta q + a_{22}\Delta\gamma_A + a_{23}\Delta\gamma_B, \quad (27)$$

где $\Delta d_{20}, a_{2k}, k = 1, 2, 3$, — известные интегралы, вид которых находится, как указано выше, когда используется формула, получаемая из (25) заменой $v_1, \alpha_1, \Delta q, q$ соответственно на $v_2, \alpha_2, -\Delta q, -q$.

Уравнение (13) запишем в виде

$$T(v_1, v_2, \alpha, q, \gamma_A, \gamma_B) = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2, \alpha, q, \gamma_A, \gamma_B) = \\ = \left[1 - \frac{v_2}{v_1} e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \left(q e^{-i\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}} + 2 \cos \frac{\gamma_B - \gamma_A}{2} + \frac{1}{q} e^{i\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}} \right) - 4 \cos \frac{\gamma_B - \gamma_A}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Обозначая $\Delta\alpha = \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 = \tilde{\alpha} - \alpha$, уравнение (28) для измененной решетки запишем так: $T(v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, \alpha + \Delta\alpha, q + \Delta q, \gamma_A + \Delta\gamma_A, \gamma_B + \Delta\gamma_B) = 0$. Отсюда вычтем почленно равенство (28). Разность в левой части с принятой точностью заменим первым дифференциалом функции (29) и придем к уравнению $v_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} \left[\frac{\Delta v_1}{v_1} - i(\Delta\alpha_1 - \Delta\eta_0) \right] + v_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} \left[\frac{\Delta v_2}{v_2} - i(\Delta\alpha_2 - \Delta\eta_0) \right] + \frac{\partial T}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial T}{\partial \gamma_A} \Delta\gamma_A + \frac{\partial T}{\partial \gamma_B} \Delta\gamma_B = 0$.

Подставим сюда выражения (26), (27) и получим

$$\begin{aligned} \left[v_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} a_{11} + v_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} a_{21} + \frac{\partial T}{\partial q} \right] \Delta q + \left[v_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} a_{12} + v_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} a_{22} + \frac{\partial T}{\partial \gamma_A} \right] \Delta\gamma_A + \\ + \left[v_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} a_{13} + v_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} a_{23} + \frac{\partial T}{\partial \gamma_B} \right] \Delta\gamma_B = -v_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} \Delta d_{10} - v_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} \Delta d_{20}. \end{aligned} \quad (30)$$

Соотношения (23) (без слагаемого $O(\varepsilon^2)$) и (30) представляют собой систему уравнений с неизвестными $\Delta q, \Delta\gamma_A, \Delta\gamma_B$. Остановимся лишь на общем случае, когда определитель системы отличен от нуля и система имеет единственное решение. Определив из нее величины $\Delta q, \Delta\gamma_A, \Delta\gamma_B$, при заданном значении $\Delta\alpha_1$ из (26) найдем $\Delta v_1, \Delta\eta_0$, затем из (27) — величины $\Delta v_2, \Delta\alpha_2$.

На основании формулы (12) находится период решетки $\tilde{t}e^{i\tilde{\nu}}$. Формулы (21), (24) определяют зависимость $\tilde{s}(\tilde{\gamma})$, причем $\tilde{s}'(\tilde{\gamma}) = s'(\gamma)/\tilde{\gamma}'(\gamma)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$. Остается вычислить $\tilde{z}(\zeta)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л.И. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики* (Наука, М., 1980).
- [2] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, Т. 1. (ГИФМЛ, М., 1963).
- [3] Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики* (Наука, М., 1994).
- [4] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).
- [5] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного* (Наука, М., 1973).

Расих Бахтигареевич Салимов

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,*

e-mail: salimov.rsb@gmail.com

R.B. Salimov

Solution of inverse mixed boundary value problem of aerohydrodynamics for cascade of profiles without additional restrictions

Abstract. The inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics is considered, in which it is required to find the shape of the profile streamlined by the potential flow of an incompressible inviscid fluid when the velocity distribution on it is given as a function of the arc abscissa of the profile point and determine the lattice period.

Keywords: inverse boundary value problem of aerohydrodynamics, grill, profile, complex potential.

Rasikh Bakhtigareevich Salimov

*Kazan State Architecture and Building University,
1 Zelenaya str., Kazan, 420043 Russia,*

e-mail: salimov.rsb@gmail.com