Общероссийский математический портал

М. М. Ямалеев, Изолированность со стороны в 2-вычислимо перечислимых степенях, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 81–86

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-81-86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:06:04

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

М.М. ЯМАЛЕЕВ

ИЗОЛИРОВАННОСТЬ СО СТОРОНЫ В 2-ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ СТЕПЕНЯХ

Аннотация. В работе рассматривается изолированность со стороны в различных степенных структурах, в частности, в 2-вычислимо перечислимых *wtt*-степенях и низких тьюринговых степенях. Интуитивно, некоторая 2-вычислимо перечислимая степень является изолированной со стороны, если все вычислимо перечислимые степени из ее нижнего конуса ограничены сверху некоторой вычислимо перечислимой степенью, несравнимой с данной. Доказывается, что произвольная собственная 2-вычислимо перечислимая *wtt*-степень изолируется со стороны некоторой вычислимо-перечислимой *wtt*-степенью. Также показывается, что аналогичный результат верен для низких 2-вычислимо перечислимых тьюринговых степеней.

Ключевые слова: 2-вычислимо перечислимое множество, *wtt*-степень, тьюринговая степень, изолированность со стороны.

УДК: 510.535

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-81-86

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию структурных свойств вычислимо-перечислимых (далее, в. п.) и 2-в. п. степеней неразрешимости. В работе рассматриваются тьюринговые и *wtt*-степени неразрешимости, а также свойство *изолированности со стороны*, которое является одним из вариантов понятия изолированности для 2-в. п. степеней. Изолированные 2-в. п. тьюринговые степени впервые были рассмотрены в работе Б. Купера и Йи [1], в которой было доказано, что изолированные 2-в. п. тьюринговые степени существуют. Интуитивно, это такие 2-в. п. степени $\mathbf{d}$, для которых существует в. п. степень $\mathbf{c} < \mathbf{d}$, что строго между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$ нет в. п. степеней. Нетрудно также видеть, что степень $\mathbf{c}$ в этом случае будет максимальной (и даже наибольшей) в. п. степенью, расположенной строго под $\mathbf{d}$. При этом, согласно известной теореме Сакса о плотности [2] понятие изолированности имеет смысл только для собственных 2-в. п. степеней (т. е. степеней, которые не содержат в. п. множеств).

Изолированные 2-в. п. степени оказались полезными в ряде конструкций (например, см. [3]) и позволили определенным образом использовать собственность, рассматриваемых 2-в. п. степеней. Однако, к сожалению, оказалось, что существуют также неизоллированные собственные 2-в. п. степени, и, более того, такие степени встречаются так же «часто», как

Поступила в редакцию 26.03.2020, после доработки 26.03.2020. Принята к публикации 29.06.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 18-31-00420 мол_а).

и изолированные (см. [4]–[6]). Таким образом, нельзя сказать, что свойство изолированности может охарактеризовать собственные 2-в. п. степени. Однако подобная характеристика с последующей интерпретацией в. п. степеней в структуре 2-в. п. степеней на языке частичного порядка естественным образом решает известную проблему определимости в. п. тьюринговых степеней в 2-в. п. тьюринговых степенях (проблема была сформулирована в ряде работ, например, в [7] и [8]). Поиск характерных свойств собственных 2-в. п. степеней был отправной точкой данной работы, и, следуя программе, изложенной в [9], в текущей статье показывается, что свойство изолированности со стороны выполнено для низких собственных 2-в. п. тьюринговых степеней, а также для собственных 2-в. п. *wtt*-степеней.

Изолированность со стороны неявно была использована в работах [10] и [11] и явно сформулирована в [12]. В данной работе будем использовать следующее

Определение 1. Будем говорить, что 2-в. п. степень $\mathbf{d}$ является изолированной со стороны, если существует 2-в. п. степень $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$ несравнимы, и для любой в. п. степени $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ верно, что $\mathbf{a} < \mathbf{c}$. При этом степень $\mathbf{c}$ называется изолирующей степенью.

Нетрудно видеть, что каждая изолированная степень является изолированной со стороны. В частности, это следует из известного утверждения из монографии Р. Соара (см. [13], с. 203, упр. 4.7) о свойствах в. п. степеней. Таким образом, свойство изолированности со стороны является более общим, и в рассуждениях достаточно устанавливать изолированность для получения изолированности со стороны.

В следующем разделе приведем вариант теоремы для случая *wtt*-степеней, что позволит более наглядно продемонстрировать основные идеи доказательства. В заключительном разделе покажем, как это доказательство может быть перенесено на случай низких собственных 2-в. п. тьюринговых степеней.

1. ИЗОЛИРОВАННЫЕ СО СТОРОНЫ *wtt*-СТЕПЕНИ

Теорема 1. *Произвольная собственная 2-вычислимо-перечислимая *wtt*-степень $\mathbf{d}$ изолируется со стороны некоторой вычислимо-перечислимой *wtt*-степенью $\mathbf{c}$.*

Схема доказательства. Пусть D — это некоторое 2-в. п. множество из степени $\mathbf{d}$. Для доказательства теоремы достаточно построить в. п. множество C , удовлетворяя следующие требования для всех $e \in \omega$. В рамках данной теоремы будем работать только с *wtt*-сводимостью и поэтому, несколько перегружая обозначения, *wtt*-функционалы будем обозначать как и тьюринговы функционалы, предполагая при этом, что *use*-функции возрастать не будут (это также можно формализовать через рассмотрение пар Φ_e и f_e , где f_e — это частично вычислимая функция, которая ограничивают *use*-функцию φ_e и впоследствии выполняет ее роль).

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e : W_e &= \Phi_e^D \Rightarrow W_e = \Gamma_e^C, \\ \mathcal{N}_e : D &= \Psi_e^C \Rightarrow \exists I_e (D = \Theta_e^{I_e}) \wedge (I_e = \Delta_e^D). \end{aligned}$$

Здесь пары $\{W_e, \Phi_e\}_{e \in \omega}$ являются эффективным перечислением всех пар в. п. множеств и частично вычислимых *wtt*-функционалов (далее в теореме, функционалов). При этом каждая стратегия $\mathcal{R}_e$ строит свой функционал Γ_e . Перечисление функционалов Ψ_e также является эффективным, и каждая стратегия $\mathcal{N}_e$ строит свое в. п. множество I_e и свои *wtt*-функционалы Θ_e и Δ_e .

Стратегия для одного требования $\mathcal{R}_e$. Как только на некотором шаге s видим равенство $W_e(x)[s] = \Phi_e^D(x)[s]$ (включая равенства во всех точках $< x$), определяем $\Gamma_e^C(x)[s] = W_e(x)[s]$ с $\gamma_e(x)[s] = \varphi_e(x)[s]$. Далее, если вычисление $\Phi_e^D(x)$ меняется (из-за изменения $D \upharpoonright \varphi_e(x)[s]$), и при этом нет изменения $W_e(x)$, то ничего не делаем и ждем когда снова

установится $W_e(x)[t] = \Phi_e^D(x)[t]$ на шаге $t > s$. Если же $W_e(x)$ меняется вместе с изменением $\Phi_e^D(x)$ (при условии, что во всех точках $y < x$ изменений нет), то перечисляем $\gamma_e(x)$ в C ,правляем $\Gamma_e^C(x)[t] = W_e(x)[t]$ и завершаем работу с элементом x . Очевидно, если $W_e = \Phi_e^D$, то мы корректно для всех x определяем $\Gamma_e^C(x) = W_e(x)$ и при этом $\gamma_e(x)$ определяется раз и навсегда.

Стратегия для одного требования $\mathcal{N}_e$. Если для некоторого z видим на шаге s равенство $D(z)[s] = \Psi_e^C(z)[s]$ (включая равенства во всех точках $< z$), то определяем $\Theta_e^{I_e}(z)[s] = D(z)[s]$ с $\theta_e(z) = 2z + 1$, а именно: перечисления чисел $2z$ и $2z + 1$ в I_e будут кодировать изменения $D(z)$, которые могут произойти максимум два раза. При этом определяем $\Delta_e^D(2z)[s] = \Delta_e^D(2z + 1)[s] = I_e(2z)[s] = I_e(2z + 1)[s] = 0$, причем значения use-функции $\delta_e(2z)[s] = \delta_e(2z + 1)[s]$ должны быть такими, что $D \upharpoonright \delta_e(2z)[s]$ должно стать новым при перечислении z в D с последующим изъятием. Это значение $\delta_e(2z)[s]$ будет зависеть от стратегий более высокого приоритета, и его рассмотрим в следующем разделе. Таким образом, стратегия будет заключаться в отслеживании равенств правой части требования и строительстве сводимостей $D \leq_{wtt} I_e$ и $I_e \leq_{wtt} D$. Поскольку D имеет собственную 2-в.п. степень, то левая часть импликации будет ложной, и в некоторой точке неравенство установится автоматически.

Взаимодействие нескольких стратегий. Сперва отметим, что $\mathcal{R}$ -стратегии не инициализируют стратегий под своим бесконечным выходом, однако потенциально мешают их работе, перечисляя бесконечное число элементов в C . В свою очередь, $\mathcal{N}$ -стратегии под этим бесконечным выходом стараются запретить C , и при каждом своем действии инициализируют стратегии с меньшим приоритетом. Таким образом, возникает единственная конфликтная ситуация, когда $\mathcal{N}$ -стратегии имеют приоритет меньше, нежели $\mathcal{R}$ -стратегии. Для преодоления этого достаточно рассмотреть случай $\rho_0 \subset \rho_1 \subset \eta$, где ρ_0 и ρ_1 являются $\mathcal{R}$ -стратегиями, успешно строящими Γ_0 и Γ_1 (отметим также, что $\mathcal{R}$ -стратегии не конфликтуют друг с другом), а η является $\mathcal{N}$ -стратегией. Работа стратегий ρ_0 и ρ_1 не будет отличаться от работы их базового модуля, однако стратегия η имеет следующие коррективы: для каждого z значение use-функции $\delta_e(2z)[s]$ определяем как $\max\{\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1) \mid x_i = \max\{y_i \mid \gamma_i(y_i) \leq \psi(z)\}, i = 0, 1\}$. Интуитивно, это именно те максимальные значения, которые связаны с элементами x , перечисление которых в W_i вынуждает перечислить $\gamma_i(x) < \psi(z)$ в C , что может привести к одновременному изменению $\Psi^C(z)$ и $D(z)$. Таким образом, перечисление x в W_i вынуждает также навсегда измениться $D \upharpoonright \varphi_i(x)$. Поэтому, если перечисление $\gamma(x)$ в C портит вычисление $\Psi^C(z)$, то далее имеем совершенно новое значение $D \upharpoonright \delta(2z)$, так как $\delta(2z) \geq \varphi_i(x)$, что означает возможность безболезненного перечисления $2z$ и $2z + 1$ в I_e при необходимости.

Выходы и дерево стратегий. Доказательство использует стандартную технику рассуждения на деревьях при помощи метода приоритета с бесконечными нарушениями. Кратко упомянем лишь основные моменты, необходимые для доказательства. Согласно работе стратегий достаточно задать следующие выходы стратегий:

- каждая $\mathcal{R}$ -стратегия имеет выходы $\infty < fin$, которые отвечают, соответственно, за истинность и ложность левой части импликации,
- каждая $\mathcal{N}$ -стратегия η имеет лишь один выход fin , а также при необходимости проводит инициализацию всех стратегий с меньшими приоритетами.

Дерево стратегий задается как поддерево $\{\infty, fin\}^{<\omega}$. На четных уровнях $2e$ находятся версии стратегий $\mathcal{R}_e$, на нечетных уровнях $2e + 1$ находятся версии стратегий $\mathcal{N}_e$. Далее проводится конструкция с построением вычислимого приближения истинного пути TP и доказывается, что каждая вершина на TP удовлетворяет соответствующее требование.

2. ИЗОЛИРОВАННЫЕ СО СТОРОНЫ НИЗКИЕ ТЬЮРИНГОВЫЕ СТЕПЕНИ

Теорема 2. *Произвольная низкая собственная 2-вычислимо-перечислимая тьюринговая степень $\mathbf{d}$ изолируется со стороны некоторой вычислимо-перечислимой тьюринговой степенью $\mathbf{c}$.*

Схема доказательства. Начальные рассуждения полностью повторяют рассуждения из предыдущего раздела, и этот раздел можно считать его продолжением. Использование одних и тех же обозначений позволит сразу перейти к новым проблемным моментам в доказательстве. Отметим также, что функционалы теперь являются тьюринговыми, что может приводить к их расходимости в некоторых точках, а значит, ввиду новых трудностей потенциально портить предыдущую конструкцию.

Новые конфликты при взаимодействии стратегий. Рассмотрим стратегии $\rho \in \eta$, где ρ является $\mathcal{R}$ -стратегией, а η является $\mathcal{N}$ -стратегией. Пусть $\Phi^D(x)$ расходится в некоторой точке x , но при этом $\Phi^D(x)[t]$ определено на бесконечном множестве шагов t . Более того, пусть x никогда не перечисляется в W . Это значит, что $\varphi(x)[t]$ будет бесконечно возрастать, а значит, для некоторого $z \notin D$ мы будем вынуждены бесконечно повышать $\delta(2z)$, что в итоге приведет к тому, что сведение $I \leq_T D$ будет неверным, а следовательно, стратегия сохранения Сакса не приведет к успеху, заставляя стратегию η вхолостую инициализировать стратегии с меньшими приоритетами. Именно эта трудность и является ключевой для общего случая, когда D имеет произвольную собственную 2-в. п. тьюринговую степень. Однако согласно условию теоремы множество D является низким, а значит, можно косвенным образом ограничивать изменения $\varphi(x)[s]$ для любого x .

Техника Робинсона для работы с низкими степенями. Напомним основные идеи техники Р. Робинсона [14]. Формально эта техника может быть реализована по-разному, но для интуитивного восприятия рассмотрим следующую последовательность событий. Пусть на некотором шаге завершилось вычисление $\Phi_e^D(x)[s]$. Перед тем, как продолжить работу стратегии аналогично работе из предыдущей теоремы (в частности, определить функционал $\Gamma_e^C(x)$), «удостоверяем» это вычисление, используя низость D . Таким образом, верим, что вычисление $\Phi_e^D(x)$ больше не поменяется, и согласно этому действуем, продолжая строить функционал $\Gamma_e^C(x)$, инициализировать другие стратегии и др. Однако наша вера может быть нарушена, и вычисление $\Phi_e^D(x)[t]$ вновь станет неопределенным и не «удостоверенным». Так как D является низким, то вера в достоверность вычисления поменяется лишь конечное число раз, и таким образом, своими неверными действиями стратегия также навредит лишь конечное число раз другим стратегиям (отметим также, что конечность действий будет лишь в рамках точки x , но подобных точек может быть бесконечно). Если же вычисление $\Phi_e^D(x)[s]$ не «удостоверено», то у него есть только одна альтернатива: стать опять неопределенным с изменением $D \upharpoonright \varphi(x)[s]$. Таким образом, если это вычисление не «удостоверяется», то будет бесконечно становиться неопределенным (и таким образом, как будто знаем это заранее, а стратегия не будет предпринимать никаких действий вообще и не будет нарушать другие стратегии).

Модификация базовых модулей и работа на дереве стратегий. Стратегии для $\mathcal{R}$ -требований перед каждым действием должны удостоверяться в правильности своих вычислений. Как известно, ввиду низости D процесс удостоверения занимает лишь конечное число шагов, в течение которых всю конструкцию можно заморозить. После удостоверенных вычислений стратегия определяет или поправляет свой функционал Γ^C и продолжает работать как обычно, имея выходы $\infty < fin$, как и ранее. Однако для $\mathcal{N}$ -стратегии под $\mathcal{R}$ -стратегией возникает новая ситуация: даже если знаем, что сведение $W \leq_T D$ будет корректным, не сможем избежать ситуации, когда различные $x_0 < x_1 < x_2 \dots$ перечисляются по очереди в

W , заставляя $\gamma(x_i)$ перечисляться в C . При этом, очевидно, $D \upharpoonright \varphi(x_i)$ будет меняться навсегда, что способствует сведению $I \leq_T D$. Может оказаться, что различные $\gamma(x_i)$ будут для некоторого $z \notin D$ всегда меньше, чем $\psi(z)$. Тогда $\mathcal{N}$ -требование будет удовлетворено за счет расходимости $\Psi^D(z)$, несмотря на то, что сведение $I \leq_T D$ будет нарушено. При этом также заметим, что $\Delta^D(2z)$ расходится тогда и только тогда, когда расходится $\Psi^D(z)$. Таким образом, достаточно сделать следующие поправки на выходы $\mathcal{N}$ -стратегий: $0 < 1 < \dots < \text{fin}$, где выход $k = z$ означает расходимость $\Psi^D(z)$ (а значит, отсутствие надобности инициализации под выходом k). Отметим, что это никак не нарушит работу стратегий с меньшими приоритетами. Далее рассуждения проводятся стандартным образом при помощи метода приоритета с бесконечными нарушениями на деревьях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cooper B. and Yi X. *Isolated d.r.e. degrees* (Preprint ser. 17, Univ. Leeds, Dept of Pure Math., Leeds, 1995).
- [2] Sacks G.E. *The recursively enumerable degrees are dense*, Ann. Math. **80**(2), 300–312 (1964).
- [3] Wu G. *Isolation and lattice embedding*, J. Symb. Logic **67**, 1055–1064 (2002).
- [4] Ding D., Qian L. *Isolated d.r.e. degrees are dense in r.e. degree structure*, Arch. Math. Logic **36** (1), 1–10 (1996).
- [5] LaForte G. *The isolated d.r.e. degrees are dense in the r.e. degrees*, Math. Logic Quart **42**, 83–103 (1996).
- [6] Arslanov M.M., Lempp S., Shore R.A. *On isolating r.e. and isolated d.r.e. degrees*, Computability, enumerability, unsolvability (London Math. Society, Lect. Note Ser.) **224**, 61–80 (1996).
- [7] Cooper B., Li. A. *Turing Definability in the Ershov Hierarchy*, J. London Math. Society **66**(3), 513–538 (2002).
- [8] Arslanov M.M. *Definability and Elementary Equivalence in the Ershov Difference Hierarchy*, Lect. Notes in Logic, **32**, 1–17 (2009).
- [9] Arslanov M.M., Yamaleev M.M. *On the problem of definability of the computably enumerable degrees in the difference hierarchy*, Lobachevskii J. Math. **39** (5), 634–638 (2018).
- [10] Yang Y., Yu L. *On Σ_1 -structural differences among Ershov hierarchies*, J. Symb. Logic **71**, 1223–1236 (2006).
- [11] Cai M., Shore R.A., Slaman T.A. *The n-r.e. degrees: undecidability and Σ_1 substructures*, J. Math. Logic **12**, 1–30 (2012).
- [12] Wu G., Yamaleev M. M. *Isolation: motivations and applications*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. наук **154** (2), 204–217 (2012).
- [13] Соар Р.И. *Вычислимо-перечислимые множества и степени* (Казанск. матем. о-во, Казань, 2000).
- [14] Robinson R.W. *Interpolation and embedding in the recursively enumerable degrees*, Ann. Math. **93** (2), 285–314 (1971).

Марс Мансурович Ямалеев

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

M.M. Yamaleev

Isolation from side in 2-computably enumerable degrees

Abstract. In this work we consider isolation from side in different degree structures, in particular, in the 2-computably enumerable *wtt*-degrees and in low Turing degrees. Intuitively, a 2-computably enumerable degree is isolated from side if all computably enumerable degrees from its lower cone are bounded from above by some computably enumerable degree which is incomparable with the given one. It is proved that any properly 2-computably enumerable *wtt*-degree is isolated from side by some computable enumerable *wtt*-degree. Also it is shown that the same result holds for the low 2-computable enumerable Turing degrees.

Keywords: 2-computably enumerable set, *wtt*-degree, Turing degree, isolation from side.

Mars Mansurovich Yamaleev

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru