А. Стасенко, Буриданов осел, или Немного о бифуркации, *Квант*, 2020, номер 2, 29–30

Буриданов осел, или Немного о бифуркации

А.СТАСЕНКО

Излагай кратко, но сжато.
Козьма Прутков

Еще великий Аристотель (IV в. до н.э.) вообразил осла, стоящего посредине между двух охапок сена и бесконечно долго пытающегося решить, какую из них предпочесть. Более чем через тысячу лет этот светлый образ был приписан европейцами Жану Буридану (XIV в.). Напомним, что выбор одного из двух вариантов связан с так называемой бифуркацией, раздвоением.

В природе тоже возникают ситуации, при которых нужно сделать выбор. Например, известная новороссийская бора – сильный, порывистый, холодный местный ветер.

Представим горный хребет, который обтекается воздухом. Одна из возможностей: натекая из бесконечности со скоростью v_1, поток, перевалив через хребет, снова приобретает такую же скорость: $v_2 \approx v_1$. При этом линии тока будут симметричными относительно вертикали AB (рис.1,*а*).

Но есть и другая возможность. Если воздух в верхней части потока холодный, а значит плотный, «тяжелый», то с вершины хребта он ринется вниз по склону, его скорость резко возрастет: $v_2 > v_1$, а сечение потока уменьшится (рис.1,*б*). При этом порывы ветра достигают 80 м/с, температура может упасть на десятки градусов. Поэтому уравнение сохранения потока массы запишется в виде

$$\rho_1 v_1 h_1 = \rho_2 v_2 h_2,$$

где ρ_1, ρ_2 – соответствующие значения плотности воздуха. В этом случае сила тяготения

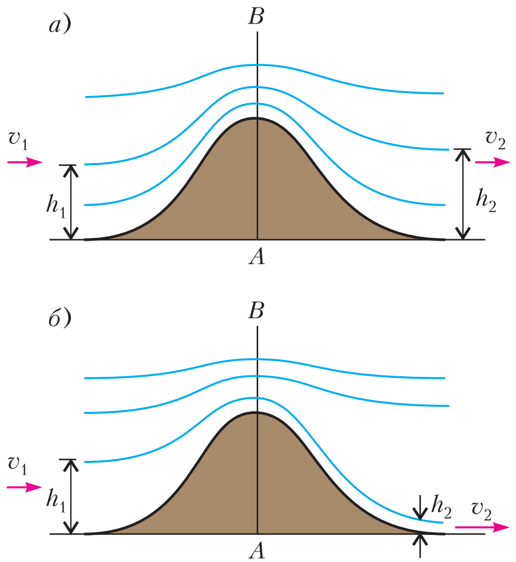

Рис. 1. а) Симметричная картина обтекания хребта воздушным потоком. б) Образование за хребтом высокоскоростного потока воздуха (бора)

служит тем «толчком», который заставляет поток воздуха превращаться в ураган.

А вот сопло ракетного двигателя или аэродинамической трубы, предназначенное для превращения первоначального теплосодержания газа (ученые люди говорят – «энтальпии»), нагретого до температуры T_0, в его кинетическую энергию (рис.2). Как известно, формула Циолковского для скорости ракеты

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

советует реализовать как можно большую скорость истечения u. Ее значение можно

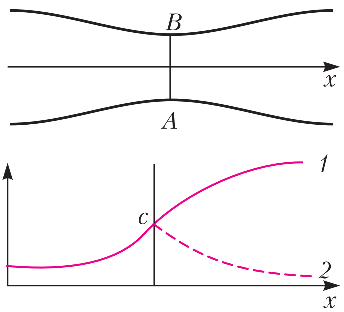

Рис. 2. Сверхзвуковое сопло: AB – критическое сечение, $v = c$ – локальная скорость звука, 1 – сверхзвуковой поток, 2 – дозвуковой поток

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200202

оценить из закона сохранения энергии

$$\frac{u_{\max}^2}{2} = c_p T_0 ,$$

где c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Наука Газодинамика дает два возможных решения: после достижения скорости звука (в критическом сечении сопла) поток в расширяющейся части сопла может или «свалиться» в дозвуковой режим (пунктирная кривая на рисунке 2), или продолжить ускорение (кривая *1*) вплоть до значения $u_{\max}$. Типичная бифуркация!

А надпись на пограничном камне предлагает древнему богатырю даже больше возможностей: «Налево пойдешь – коня потеряешь, направо пойдешь – жизнь потеряешь, прямо пойдешь – жив будешь, да себя позабудешь». (Это — один из наборов фольклорных возможностей; современные шутливые физики предложили более краткую надпись – «Без вариантов».)

Ученые оценили энергетическую «стоимость» одного бита информации (или – или, одно из двух):

$$E_{\min} = kT \ln 2 ,$$

где $k \approx 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – температура окружающей среды. При $T = 300$ К имеем $E_{\min} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж $\approx$ $\approx 0{,}02$ эВ. Любой комар мог намекнуть богатырю, какую дорогу сейчас лучше выбрать, – ведь надпись на камне могла устареть за сотни лет.

Еще больше возможностей предоставляет так называемое логистическое уравнение, с виду совершенно безобидное:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x).$$

Оно было получено (П.Ферхюльст, 1838 г.) при исследовании скорости роста населения с учетом уменьшения этой скорости вследствие ограниченности ресурсов (отрицательное слагаемое в правой части уравнения). Его конечноразностный вариант, приготовленный для обработки на компьютере, выглядит совсем просто:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n).$$

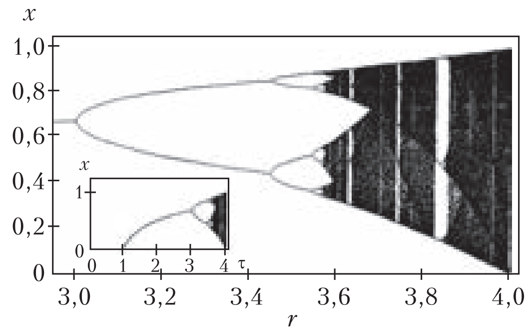

Рис. 3. Бифуркация решений логистического уравнения

Казалось бы – что особенного? Но вот последовательность его решений в зависимости от параметра r выглядит необычно (рис.3; взят из книги В.Н.Жигулева «Динамика неустойчивостей» – М.: МФТИ, 1996). Видно, что многочисленные бифуркации, возникающие с ростом параметра, в конце концов приводят к хаосу, который в гидродинамике пытаются связывать с турбулентностью, в экономике – с крахом. Список разделов знания, в которых логистическое уравнение отражает простейшую моделью изучаемого явления, обширен. Некоторые ученые называют его уравнением Жизни. Вернуться в начало координат из любой точки, соответствующей максимальному значению r, – то же, что отличнику ЕГЭ оказаться снова в роддоме с номерком на ножке. Такой процесс маловероятен, ситуация необратима.

Итак, вспоминая о бифуркациях, стоит обдумывать каждый шаг и твердо делать выбор – в отличие от буриданова осла.