Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Зачем плющить зерна, или O плотности потоков,
Квант, 2019, номер 11, 27–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:34:12

Зачем плющить зерна, или О плотности потоков

А. СТАСЕНКО

«Геркулес монастырский»... в результате плющения зерна овса становятся мягче, а каша из них получается более плотной и сытной.

Надпись на коробке

А ЗАЧЕМ ИХ ПЛЮЩИТЬ? – ПОДУМАЛ Способный Ученик и тут же вспомнил о потоках массы, концентрации вещества, энергии, импульса... Раз уж речь идет о потоке *чего-либо*, то этот поток должен измеряться в единицах *этого самого* на единицу времени, и если это плотность потока, то он должен протекать через единицу площади. Значит, плотности потоков должны иметь такие размерности, например:

$$[q_{\text{кв}}] = \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2}, \quad [q_s] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2},$$

$$[q_n] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2}.$$

Заметим, что концентрация частиц вещества – безразмерная величина, она стоит в выражении для $q_{\text{кв}}$ в числителе в виде единицы.

Пусть первоначально зерно было шариком радиусом R и объемом $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; при плющении его превратили в диск (сохраняя объем) радиусом b и толщиной $h = \frac{V}{\pi b^2}$; а кто-то ухитрился раскатать его в цилиндр (макаронину) длиной l и радиусом $r = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}$ (рис.1).

Но что же приводит к возникновению упомянутых потоков? Конечно, пространственная неоднородность так называемых

Рис. 1. Модели формы зерна: а) сферического; б) расплющенного в диск; в) раскатанного в цилиндр (макаронину). Цветные стрелки – это векторы плотности потоков любой физической природы: концентрации вещества, теплоты, количества электрического тока (в случае отрицательно заряженных тел)...

потенциалов. Например, хорошо известно, что тепло течет из области повышенной температуры в область пониженной. Причем очевидно, что тут должна играть роль не просто разность температур ΔT , но и пространственная крутизна, т.е. отношение этой разности к расстоянию, на котором она реализуется: $\frac{\Delta T}{\Delta r}$. Это отношение называют градиентом температуры. Здесь r измеряется вдоль вектора потока. Точно так же плотность потока массы вызывается градиентом концентрации вещества, плотность потока импульса – поперечным градиентом скорости потока жидкости или газа вдоль твердой поверхности. А также есть (тут Способному Ученику пришла в голову еще одна мысль) плотность потока электрического тока – градиент электрического потенциала. Так что можно написать, например,

$$q_T \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

и аналогичные выражения плотностей потока для других физических величин. А коэффициенты, при помощи которых это отношение пропорциональности заменяется равенством, называются коэффициентами диффузии, теплопроводности, вязкости, электропроводности... Их общее название – коэффициенты переноса, и можно надеяться, вы понимаете, почему.

Но тогда уж и величины, градиенты которых вызывают соответствующие потоки, можно назвать потенциалами – и концентрацию диффундирующего вещества, и температуру, и продольную (вдоль обтекаемого тела) скорость течения газа или жидкости, и, конечно, электрический потенциал, и... А значит, теплопроводность можно назвать диффузией тепла; трение в пограничном слое у тела, обтекаемого жидкостью или газом, – поперечной диффузией продольного импульса; электропроводность – диффузией электрического заряда ...

И тут внутренний голос подсказал нашему герою, что метр метру рознь. Особенно в случае потока импульса $q_{\parallel}$, когда тормозящая сила трения, действующая на газ или жидкость, направлена вдоль обтекаемой стенки, а продольная скорость $v(y)$ изменяется в поперечном направлении (рис. 2). Тут мож-

Рис. 2. Схема пограничного слоя газа или жидкости у плоской стенки. Показано формирование поперечного градиента продольной скорости $\Delta v/\Delta y$; q_c — плотность потока тормозящей силы, действующей на площадку, стороны которой измеряются в «разных метрах»

но заметить, что напряжение трения (сила, приходящаяся на единицу площади) имеет размерность $\frac{\text{кг} \cdot M_x}{\text{с}^2 \cdot M_x \cdot M_z}$.

После этих размышлений уже можно получить размерности соответствующих коэффициентов переноса, разделив плотность потока некоей физической величины на градиент соответствующего потенциала, поддерживающий этот поток. В результате получим

$$[\lambda_T] = \frac{\text{Дж}}{M_{\perp}^2 \cdot \text{с}} \cdot \frac{1}{\text{К}/M_{\parallel}} \quad ([\lambda_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}})$$

– для коэффициента теплопроводности;

$$[D] = \frac{1}{\text{с} \cdot M_{\perp}^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{M_{\perp}^2 \cdot M_{\parallel}} \cdot \frac{1}{M_{\parallel}}} \quad ([D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}})$$

– для коэффициента диффузии или «мас-сопроводности»;

$$[\mu] = \frac{\text{кг} \cdot M_x}{\text{с} \cdot M_x \cdot M_z} \quad ([\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}})$$

– для коэффициента вязкости или «импульс-сопроводности»;

$$[\lambda_{\text{э}}] = \frac{\text{Кл}}{\text{с} \cdot M_{\perp}^2 \cdot (B/M_{\parallel})} \quad ([\lambda_{\text{э}}] = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}})$$

– для коэффициента электропроводности.

Здесь в каждой строке в скобках выписаны также и обычно приводимые размерности, но мы-то с вами теперь уже знаем, что метр метру рознь. В частности, в выражении для D учтено, что концентрация вещества имеет размерность «единица на кубический метр».

Уже из рисунка 1 видно, что теплу или диффундирующему веществу тем легче добраться до середины расплющенного зерна, чем меньше расстояние от поверхности диска или цилиндра-макароны. На основании сказанного выше можно даже предложить оценку характерных масштабов процесса. Видно, например, что размерность коэффициента диффузии D самая простая – она содержит только размерности площади и времени. Значит, разделив на этот коэффициент площадь поверхности тела, пропорциональную квадрату характерного размера a ($a = R, h$ или r), получим характерное время, за которое произойдет существенное изменение концентрации диффундирующего вещества:

$$\tau_D \sim \frac{a^2}{D}.$$

Аналогичные выражения можно получить и для других физических величин. Так, в случае теплопроводности

$$\tau_T \sim \frac{a^2}{\lambda_T}.$$

Из этого соотношения понятно, почему малых детей кутают в теплые одежды: если их характерный размер, например, вдвое меньше, чем у взрослого, их характерное время остывания будет меньше в 9 раз. И понятно, наконец, зачем деформировать зерна: толщину диска h и радиус макароны r можно сделать гораздо меньше R (см. рис. 1, б, в).

Конечно, здесь не рассмотрены так называемые конвективные потоки – например, перенос тепла вместе с массой. Значит, речь идет о варке каши на спутнике или в падающем лифте, что, правда, не очень удобно.

Итак, в течение характерного времени τ и цельные зерна, и расплюснутые или раскатынные в цилиндр прогреются до температуры кипения воды. Но что же происходит дальше? Ведь кипение продолжается, следовательно, что-то продолжает течь внутрь зерна. А там происходят сложные физико-химические процессы. Прежде всего, увлажнение, т.е. диффузия молекул воды, разрушение прежней бимолекулярной структуры, нежелательной для потребителя. Но раз что-то разрушается, значит, с точки зрения исходного зерна, растет «мера беспорядка» – так называемая энтропия. Физик при этом скажет, что имеет место поток энтропии. Тут вспоминается, что в научно-фантастических

романах энтропия часто называется «черной», чтобы подчеркнуть ее разрушительный нрав. А в одной из пародий на такие романы при описании ситуации в космическом корабле сказано нечто такое:

Напряженно гудели слухофоны и смотроскопы. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла. «Ба, – вдруг воскликнул штурман, – да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости!»

Но вернемся к нашей каше. В кипящей воде в зерне подготавливаются новые вещества; можно сказать, что в результате перестройки они забрасываются на новый (более высокий) потенциальный уровень, «падая» с которого, выделяют в нужное время необходимую организму энергию.

Итак, всюду потоки массы, энергии, импульса, энтропии. А плющенное зерно продолжает вариться...

Приятного аппетита!

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Что такое фазовый портрет

В.СОЛОВЬЕВ, С.ДВОРЯНИНОВ

Бросаем мяч вверх

Рассмотрим простой эксперимент, который каждый из нас проводил в детстве много раз. Пусть тело, например мяч, масса которого равна m , брошено с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Пусть высота h , на которой находится тело в каждый момент времени t , определяется функцией $h = h(t)$. Тогда первая производная этой функции $h'(t) = v(t)$ – это скорость, вторая производная $h''(t) = v'(t) = a(t)$ – это ускорение. Согласно второму

закону Ньютона,

$$a(t) = \frac{F}{m},$$

где F – действующая на тело сила. Если высота подъема невелика и можно пренебречь сопротивлением воздуха, то единственная сила, действующая на тело, это сила тяжести, равная mg . Тогда уравнение движения тела принимает вид

$$h''(t) = -g.$$

Знак «минус» в правой части уравнения отражает тот факт, что сила направлена в сторону уменьшения величины h . Интегрируя это уравнение, получаем общий закон движения тела:

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0.$$

(Результат интегрирования легко проверить дифференцированием: $h''(t) = \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0\right)'' = (-gt + v_0)' = -g$.)

В нашем уравнении v_0 – начальная скорость тела, т.е. скорость при $t = 0$; h_0 –