Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Кохась, Принесите еще шляп!, *Квант*, 2019, номер 11, 37–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:08:48

не можем ничего сделать с этим числом, мы даже затрудняемся прочесть его вслух. Кажется, вопрос нашего телезрителя опять остается без ответа! Постойте, я сказал «нашего телезрителя»? Маэстро, признавайтесь, это опять ваши происки? Вы опять, скрываясь под псевдонимом, прислали воп-

рос, чтобы нарушить спокойное течение нашей передачи?

– Нет-нет, я не имею никакого отношения к случившемуся сегодня. Хотя, вы знаете... Недавно я рассказал Бусеньке о том, как легко и приятно вводить вас в ступор с помощью безобидного на вид вопроса...

Принесите еще шляп!

К.КОХАСЬ

РАССМОТРИМ СЛЕДУЮЩУЮ ИЗВЕСТНУЮ ЗАДАЧУ О МУДРЕЦАХ.

Происходит следующий конкурс. По кругу стоят n мудрецов. Судья надевает каждому мудрецу шляпу одного из n цветов. Каждый мудрец видит шляпы, надетые на других мудрецов, но не видит своей собственной. По сигналу мудрецы (одновременно) должны высказать гипотезу о цвете своей шляпы. Если хотя бы один мудрец угадал цвет своей шляпы, считается, что мудрецы выиграли конкурс. Перед проведением конкурса мудрецы имели возможность посоветоваться, а во время конкурса никакая передача информации не разрешена. Могли ли они на этом советании придумать стратегию, позволяющую им выиграть в любом случае?

Под стратегией понимается набор инструкций (свой для каждого мудреца), которыми должны руководствоваться мудрецы при выдвижении своих гипотез. Каждая такая инструкция – это набор правил вида «если вижу на таких-то мудрецах такие-то цвета шляп, то выдвигаю такую-то гипотезу». В частности, стратегия должна быть детерминированной, т. е. не содержать действий, совершаемых с некоторой вероятностью. Это значит, что при повторении конкурса с тем же самым набором шляп мудрецы дадут те же самые ответы.

Решение этой задачи весьма красиво. Мудрецы нумеруют себя числами от 0 до $n - 1$

и обозначают цвета также числами от 0 до $n - 1$. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Значит, он знает сумму всех чисел, кроме одного (своего). Тогда пусть k -й мудрец называет свой цвет, исходя из предположения, что сумма всех чисел дает при делении на n остаток k .

Например, пусть $n = 8$ и третий мудрец увидел, что сумма чисел у остальных мудрецов равна 20. Тогда он должен назвать число 7, потому что только в случае, когда у него шляпа 7-го цвета, сумма всех чисел (она в этом случае равна 27) дает остаток 3 при делении на 8.

Заметим, что описанная стратегия весьма «экономна» в том смысле, что для каждого расклада шляп лишь один мудрец угадывает цвет шляпы. Номер этого мудреца совпадает с остатком суммы всех цветов при делении на n .

Взглянем на эту экономность с другой точки зрения. Пусть судья заранее составит список из всех возможных способов выдать мудрецам шляпы разных цветов. Каждый такой способ будем называть *раскладом шляп*. Работа немаленькая, ведь количество всех раскладов равно n^n (потому что каждому из n мудрецов можно дать шляпу любого из n цветов). После этого пусть судья подслушает, о чем договорились мудрецы на советании, и возле каждого расклада шляп в своем списке запишет, какие мудрецы угадывают цвет шляпы для этого расклада.

Лемма 1. *Для каждого k пометка «угадывает k -й мудрец» будет стоять в точности возле n^{n-1} раскладов. Иными словами, каждый мудрец выигрывает в точности на $1/n$ от общего числа раскладов.*

Доказательство. Допустим, что судья перебирает все варианты расклада шляп следующим образом: сначала он фиксирует цвета всех шляп, кроме шляпы k -го мудреца, а после этого размышляет, какую из n шляп выдать k -му мудрецу. Так как цвета всех

шляп, которые увидит k -й мудрец, уже заданы, ответ, который даст k -й мудрец в этой ситуации, уже определен. Поэтому k -й мудрец угадает цвет лишь в одном из n вариантов, о которых размышляет судья. Таким образом, каждый мудрец выигрывает в точности на $1/n$ от общего числа раскладов.

Получается, что в нашем конкурсе мудрецы как бы поделили между собой все возможные расклады шляп и каждый мудрец «отвечает» за угадывание на раскладах из «своей доли». Тут, однако, стоит уточнить: в момент угадывания ни один из мудрецов не знает, принадлежит ли текущий расклад шляп его доле или нет.

Зададимся вопросом: нельзя ли увеличить количество шляп в таком конкурсе? Кто выиграет, если, скажем, одному из n мудрецов – Косте – надевают шляпу одного из $n + 1$ цветов, а остальным мудрецам – шляпы n цветов? Напомним, что слова «мудрецы выигрывают» означает «выигрывают на всех возможных раскладах шляп». Если же судья может подобрать расклад шляп, для которого ни один из мудрецов не угадает цвет, мудрецы проигрывают.

Нетрудно сообразить, что при таком «бесхитростном» увеличении числа цветов мудрецы не смогут выиграть конкурс. Действительно, рассуждая, как в лемме 1, мы установим, что Костя угадывает лишь на $\frac{1}{n+1}$ -й доле всех раскладов, а остальные мудрецы угадывают не больше чем для $\frac{n-1}{n}$ от числа всех раскладов. Тем самым, суммарное количество раскладов, для которых мудрецы выигрывают, строго меньше числа всех раскладов. Хорошо. Тогда изменим вопрос.

Существует ли конкурс, где участвуют n мудрецов, которым выдают шляпы разного количества цветов – кому-то больше n , кому-то меньше, причем мудрецы в этом конкурсе всегда выигрывают?

Сразу отметим, что есть совершенно очевидный способ произвольно увеличивать число шляп. Например, в конкурсе с тремя мудрецами дадим двум из них шляпы двух цветов¹, а третьему – шляпы 100 500 цветов.

Мудрецы выиграют! В этом нет ничего удивительного: на самом деле, угадывать цвет будут лишь первые два мудреца, причем они будут это делать, не глядя на третьего. Они просто будут поступать так, словно участвуют в конкурсе для двух мудрецов с шляпами двух цветов! Поэтому внесем в наш вопрос дополнительное требование «отсутствия лентяев», запрещающее этот случай: потребуем, чтобы *при удалении из компании любого мудреца оставшиеся мудрецы не могли бы выиграть*.

Даже с этим ограничением ответ на вопрос утвердительный.

Лемма 2. *В конкурсе для трех мудрецов, которым дают шляпы 2, 4 и 4 цветов, мудрецы выигрывают.*

Доказательство. Введем обозначения для мудрецов и цветов шляп: пусть мудрец A получает шляпы цвета 0 или 1, а мудрецы B и C получают шляпы цветов 00, 01, 10 или 11 (можно думать, что это просто обозначения цветов, а желающие могут считать, что это номера цветов, записанные в двоичной системе счисления). Цифры в обозначениях цветов у мудрецов B и C будем называть *битами*. Пусть мудрецы пользуются следующей стратегией. Мудрец A говорит «0», если младшие биты (т.е. биты в правом разряде) цветов B и C одинаковы, а в противном случае он говорит «1». Стратегия двух других мудрецов такая: они смотрят, какая шляпа надета на A , сразу понижают, при каком соотношении их младших битов («равны» или «не равны») мудрец A угадает свой цвет, и начинают поддерживать противоположной гипотезы. Далее мудрец B смотрит на старший бит мудреца C и говорит свой ответ, исходя из гипотезы, что у него такой же старший бит. А мудрец C смотрит на старший бит мудреца B и говорит ответ, исходя из гипотезы, что у него противоположный старший бит. Лемма доказана.

Например, пусть мудрецы получают шляпы A : 0, B : 01, C : 10. Мудрец A смотрит на младшие биты – у мудреца B это 1, у мудреца C – 0. Так как биты не совпадают, мудрец A говорит «1». Мудрецы B и C видят у A цвет 0 и принимают предположение, что их младшие биты различны. Далее, мудрец B видит, что у мудреца C старший бит равен 1, и предполагает, что у него старший бит тоже

¹ Совершенно вырожденный случай – дать кому-то из мудрецов *одну* шляпу – мы даже не упоминаем.

равен 1 (а младший бит не такой, как у C). В результате B говорит «11». Мудрец C видит, что у мудреца B старший бит равен 0, и предполагает, что у него старший бит другой, т.е. 1 (а младший бит не такой, как у B). В результате C говорит «10».

Из рассуждений леммы 2 видно, что каждый раз угадывает ровно один мудрец. Это подтверждается соотношением

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Задача. Обобщите лемму 2 на случай $n = 8$, когда мудрецы получают шляпы 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 цветов.

Итак, по сравнению с исходным конкурсом количество шляп может быть сильно увеличено. Для доказательного разговора о возможном числе шляп нам потребуется **теорема Холла** о паросочетаниях (лемма о свадьбах)². Напомним ее формулировку:

Пусть имеется n юношей и несколько девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Известно, что для любого $t \leq n$ любая группа из t юношей знакома в сумме не менее чем с t девушками. Тогда можно каждому юноше поставить в пару одну знакомую девушку (разным юношам будут сопоставлены разные девушки).

Вернемся к мудрецам. Следующая теорема³ полностью решает вопрос о том, сколько шляп можно дать мудрецам, чтобы они смогли выиграть.

Теорема. Пусть n мудрецов получают шляпы $a_1, a_2, \dots, a_n$ цветов. Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1. \quad (*)$$

Доказательство. Как и в лемме 1, k -й мудрец угадывает на $\frac{1}{a_k}$ -й доле всех раскладов шляп. Поэтому если сумма меньше 1, то найдется расклад, на котором никто не угадает.

² См. например, статью А.Эвнина «Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера» («Квант» №2 за 2019 г.).

³ К.П.Кохась, А.С.Латышев. Игра Hats с произвольным распределением цветов. – Записки научных семинаров ПОМИ, 2019. (Статья находится в печати.)

Докажем теперь, что если выполнено неравенство (*), то мудрецы выигрывают. Зафиксируем k и разобьем множество всех раскладов шляп на подмножества по a_k элементов аналогично тому, как это происходило в лемме 1. В одно множество раскладов поместим расклады, отличающиеся только шляпой, выдаваемой k -му мудрецу. Более формально: пусть $c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n)$ – это способ выдать шляпы всем мудрецам, кроме k -го (здесь c_i – это цвет шляпы, которую дадут i -му мудрецу). Этому способу c поставим в соответствие множество

$$A_c^k = \{(c_1, \dots, c_{k-1}, x, c_{k+1}, \dots, c_n) : 0 \leq x \leq a_k - 1\},$$

которое состоит из a_k раскладов шляп.

Имея в виду применение теоремы Холла о паросочетаниях, назовем множества A_c^k «девушками», а сами расклады шляп – «юношами». Будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если расклад шляп является элементом множества A_c^k . При этом для каждого k каждый юноша $(c_1, \dots, c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ знаком ровно с одной девушкой A_c^k . Каждая девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами.

Докажем, что существует паросочетание, сопоставляющее каждому юноше девушку. Для этого достаточно проверить условие теоремы Холла. Рассмотрим произвольный набор из m юношей. Так как при каждом i девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами, то m юношей для каждого k знакомы в сумме не менее чем с m/a_k девушками вида A_c^k . Суммируя по k , получаем, что общее число знакомых девушек не меньше $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \dots + \frac{m}{a_n} \geq m$. Условие теоремы Холла выполнено.

Итак, существует паросочетание, которое каждому раскладу шляп ставит в соответствие множество вида A_c^k . Отметим, что при выполнении равенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ это паросочетание фактически отмечает один элемент в каждом множестве A_c^k . Если же выполняется неравенство $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$, то «останутся одинокие девушки», т.е. в некоторых множествах A_c^k может не оказаться ни одного отмеченного элемента.

Построенное паросочетание позволяет задать стратегию мудрецов. Пусть j -й мудрец действует по правилу: увидев шляпы других мудрецов, т.е. набор цветов $c = (c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k)$, он однозначно восстанавливает множество A_c^j . Текущий расклад шляп является одним из элементов этого множества. Стратегия состоит в том, что j -й мудрец должен назвать тот цвет, который в множестве A_c^j отмечен нашим паросочетанием (а если отмеченного элемента нет, называет цвет произвольно).

Поскольку каждый расклад шляп отображается нашим паросочетанием как отмеченный элемент одного из множеств A_c^j , для этого расклада шляп j -й мудрец угадает цвет. Теорема доказана.

Итак, мы можем варьировать количества шляп у мудрецов, лишь бы выполнялось соотношение (*). Какое же наибольшее число шляп можно дать мудрецу в нашем конкурсе? Например, для $n = 8$ задача после леммы 2 утверждает, что можно довести количество шляп у одного мудреца до 128. А больше можно? Это чисто арифметический вопрос. Благодаря теореме, его можно сформулировать так:

Для каждого n среди всевозможных наборов натуральных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1,$$

требуется найти набор, в котором число a_n наибольшее.

Мы рассматриваем здесь лишь вариант равенства, потому что, как оказывается, ответ не изменится, если рассматривать наборы, где вместо равенства выполняется неравенство (*) и опять добавлено требование «отсутствия лентяев», состоящее в выполнении неравенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} < 1$. (Это неравенство означает, что даже без n -го мудреца, который угадывает на наименьшем числе раскладов, остальные проиграют.)

Чтобы найти кандидата на роль ответа, воспользуемся трюком: если для набора с «очень большим» числом a_n заменить дробь $\frac{1}{a_n}$ на сумму двух дробей $\frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$, или, что то же самое, заменить число a_n на

два числа $a_n + 1$ и $a_n(a_n + 1)$, то мы получим набор $n + 1$ чисел, в котором наибольшее число — $a_n(a_n + 1)$ — «совсем огромное». Действуя таким образом, мы из единственного при $n = 2$ набора (2, 2) последовательно получим наборы: (2, 3, 6), (2, 3, 7, 42), (2, 3, 7, 43, 1806) и т.д. Последовательность чисел 2, 3, 7, 43, 1807, ... называется последовательностью Сильвестра, обозначим ее через s_n . Она удовлетворяет несложному рекуррентному соотношению

$$s_{n+1} = (s_n - 1)s_n + 1 = s_n^2 - s_n + 1.$$

Последовательность Сильвестра дает ответ на наш арифметический вопрос:

Утверждение. Набор чисел $(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n - 1)$ и есть тот набор, который содержит максимально возможное число $a_n = s_n - 1$. Кроме того, на этом наборе достигают максимального (по всем наборам) значения сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и произведение $a_1 a_2 \dots a_n$.

Хотя действия, с помощью которых построен наш набор, кажутся весьма разумными, доказать это утверждение не так-то просто. Мы не будем его доказывать: в «Кванте» на эту тему уже была публикация — см. статью О.Ижболдина, Л.Курляндчика «Разбиение единицы» («Квант» № 7 за 1987 г.).

Возвращаясь к шляпам и применяя рекуррентное соотношение для последовательности Сильвестра, мы с некоторыми усилиями можем найти, что $s_5 = 1807$, $s_6 = 3263443$, $s_7 = 10\,650\,056\,950\,807$. Наконец, при $n = 8$ наибольшее число шляп, для которого мудрецы выигрывают, равно

$$s_8 - 1 = 113\,423\,713\,055\,421\,844\,361\,000\,442.$$

Число $n = 8$ и слова «большие числа» вызывают ассоциацию с задачей о числе зерен на шахматной доске. Помните, какую награду попросил себе изобретатель шахмат: «на первую клетку положи 1 зерно, на вторую 2 зерна, на третью 4 зерна»? Общее число зерен на шахматной доске оказалось равно

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Но по сравнению с числом шляп это такие мелочи...