Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Бакаев, Периметр и площадь на клеточках, *Квант*, 2019, номер 12, 19–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 11:29:11

Периметр и площадь на клеточках

Е. БАКАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ПОЙДЕТ О КЛЕТОЧНЫХ фигурках – таких фигурках, которые составлены из клеточек листа клетчатой бумаги. Как связаны площадь и периметр такой фигурки? Среди всех фигурок одной и той же площади у каких периметр наибольший? Вот основные вопросы, с которыми мы разберемся.

Решать упражнения не обязательно для понимания дальнейшего материала, но они позволяют лучше разобраться с пройденным, так что рекомендуем уделить им внимание. Ответы и указания к ним даны в конце журнала. Решения задач даны сразу после условий; над ними тоже лучше сначала поразмышлять самостоятельно.

Условимся, что фигурки, о которых пойдет речь, являются *связными*. Это значит, что от любой клетки фигурки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по стороне клетки. Например, множества клеток *А*, *Б* и *В* на рисунке 1 – это фигурки, но *Б* и *В* вместе не образуют одну фигурку,

Рис. 1

так как от клеток *Б* до клеток *В* указанным способом дойти нельзя.

Периметром фигурки называют длину ее границы. Например, у фигурки *А* периметр 8, а у *Б* и *В* – по 16.

Некоторые (но не все!) клеточные фигурки являются *многоугольниками* (напомним, что граница многоугольника должна быть замкнутой несамопересекающейся ломаной, иначе говоря, многоугольник – это фигурка «без дыр»). Например, фигурка *А* является многоугольником, а фигурки *Б* и *В* – нет.

Введем некоторые новые понятия. В каждой клетке фигурки будем писать, сколько сторон этой клетки лежит **внутри** фигурки. Назовем это **внутренним** набором чисел фигурки. Пример показан на рисунке 2, а.

Упражнение 1. Существует ли фигурка с таким внутренним набором чисел:

- а) 1,1,1,1,4;
- б) 0,1,2,3,4;
- в) 1,1,1,1;
- г) 2,2,2,2,3,3,3,3,4?

Задача 1. Докажите, что сумма чисел внутреннего набора фигурки всегда четна.

В сумме чисел внутреннего набора, будем обозначать ее $\sum_{\text{внутр}}$, каждая внутренняя перегородка между клетками посчитана по 2 раза (рис. 2, б). Таким образом, $\sum_{\text{внутр}} = 2i$, где i – количество внутренних перегородок.

Теперь в каждой клетке фигурки будем писать, сколько сторон этой клетки лежит **на границе** фигурки. На-

Рис. 2

Рис. 3

зовем это *внешним* набором чисел фигурки. Пример приведен на рисунке 3,а.

Упражнение 2. Существует ли фигурка с таким внешним набором чисел:

- а) 0,3,3,3,3;
- б) 0,2,3,3;
- в) 0,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3;
- г) 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1?

Задача 2. Как по внешнему набору чисел найти периметр фигурки?

Во внешнем наборе каждый единичный отрезок периметра посчитан один раз (рис.3,б). Значит, сумма чисел внешнего набора равна периметру: $\sum_{\text{внешн}} = p$.

Теперь используем найденные свойства внутреннего и внешнего наборов для вывода полезной формулы.

Задача 3. Пусть s – это площадь фигурки, p – ее периметр, а i – количество внутренних перегородок. Найдите и докажете формулу, связывающую эти три величины.

Поймем, как связаны внешний и внутренний наборы. В одном случае мы для каждой клетки считали, сколько из ее сторон лежит внутри, а в другом – сколько на границе. Таким образом, в двух наборах вместе мы посчитали все 4 стороны каждой из s клеток. Значит, $\sum_{\text{внутр}} + \sum_{\text{внешн}} = 4s$. Используя результаты предыдущих задач, получим:

$$2i + p = 4s.$$

Упражнение 3. Найдите все фигурки, у которых периметр больше площади

- а) в 5 раз; б) в 4 раза;
- в) в 3 раза.

Из доказанной формулы следует такое свойство.

Задача 4. Докажите, что периметр клетчатой фигурки всегда является четным числом.

Из формулы видно, что p является разностью четных чисел $4s$ и $2i$, поэтому оно тоже четно.

В следующих упражнениях снова помогает та идея, что при суммировании периметров частей разрезы учитываются дважды.

Упражнения

4. Квадрат 5×5 разрежали на несколько многоугольников так, что суммарная длина разрезов равна 12. Чему может быть равен суммарный периметр всех многоугольников?

5. Доску 6×6 разрежали на прямоугольники 1×2 . Какой может быть суммарная длина разрезов?

6. Квадрат 8×8 разрежали на тетраминошки (фигурки из четырех клеток). Суммарная длина разрезов оказалась равна 60. Сколько среди этих фигурок может быть квадратов?

Теперь обсудим следующую задачу.

Задача 5 (Н.Стрелкова). Квартира 3×3 состоит из 9 квадратных комнат 1×1 . Каждая две соседние комнаты соединены дверью. Какое наименьшее количество дверей должно быть открыто, чтобы кот, находящийся в одной из комнат, мог свободно гулять по всей квартире?

Территорией будем называть множество комнат, между которыми можно свободно передвигаться. Если от одной комнаты нельзя дойти до другой, то они отнесены к разным территориям. (В примере на рисунке 4 территория кота состоит

Рис. 4

из 5 комнат, а общее количество территорий равно 3.)

Первое решение (размер территории кота). Сначала закроем все двери и будем открывать их по порядку. Пусть этот порядок выбирает сам кот. Он может подойти к любой закрытой двери и мяукнуть, и тогда мы откроем ему эту дверь. Если она ведет в новую комнату, территория кота

увеличится на одну комнату. Если же эта дверь ведет в комнату, до которой кот уже мог прийти иным путем, то территория не изменится. Получается, с каждой открытой дверью территория кота увеличивается не больше чем на 1. Сначала она равна 1, а в конце — 9. Значит, потребуется открыть хотя бы 8 дверей.

Задача решена. Подумайте, где именно используется, что мы предлагаем выбрать дверь коту, а не открываем ее сами.

Второе решение (количество территорий). Снова закроем все двери и будем открывать их по одной. Теперь будем считать общее количество территорий. Сначала каждая комната образует одну территорию, т.е. всего территорий 9. В конце все комнаты образуют одну территорию. Дверь может соединить либо две разные территории — тогда при ее открытии количество территорий уменьшится на 1, либо соединять территорию с самой собой — тогда количество территорий не уменьшится. Снова выходит, что хотя бы 8 дверей должны быть открыты.

В следующем упражнении помогает тот же прием.

Упражнение 7. В квадратном лабиринте размером 6×6 от любой клетки можно пойти до любой другой. Какое наибольшее количество внутренних перегородок может в нем быть?

Теперь применим этот подход к клетчатым фигуркам.

Задача 6. *Какое наименьшее количество внутренних отрезков сетки может быть в фигурке с площадью s ?*

Рассмотрим произвольную фигурку площади s , покрасим ее всю в белый цвет. Выберем одну из клеток фигурки, покрасим ее в черный. Далее будем закрашивать по одной белой клетке в черный цвет так, чтобы новая черная клетка примыкала по стороне к уже закрашенной части. (Такую клетку всегда получится найти: если есть и белая клетка, и черная, то на пути от одной до другой встретится пара из двух соседних разноцветных клеток.) Каждый раз количество внутренних отрезков сетки в черной фигурке будет увеличиваться хотя

бы на единицу. В итоге все клетки станут черными. Значит, внутренних отрезков исходной фигурки не меньше $s - 1$.

Заметим, что алгоритм добавления клеток здесь ровно такой же, что и в задаче про кота.

Легко привести пример, в котором внутренних отрезков действительно столько: это, например, прямоугольник $1 \times s$.

Задача 7. *Какой наибольший периметр может быть у фигурки с площадью s ?*

Нами уже доказана формула $2i + p = 4s$. Из нее видно, что при фиксированном s чем больше p , тем меньше i . Значит, периметр наибольший тогда, когда количество внутренних отрезков наименьшее. Как мы уже выяснили, это достигается в случае $i = s - 1$. Подставив это в формулу $2i + p = 4s$, получим, что $p = 2s + 2$. Итак, периметр фигурки с площадью s не больше чем $2s + 2$. Пример подходит прежний.

Попробуйте применить ту же идею последовательного добавления клеток в следующих упражнениях.

Упражнения

8. Из фигурки, состоящей из 20 клеток, можно вырезать квадрат 3×3 . Докажите, что ее периметр не больше 34.

9. Известно, что некоторую клеточную фигурку можно разрезать на 5 квадратов 2×2 . Какой наибольший периметр у нее может быть?

10. Нарисуйте по 10 разных фигурок, у каждой из которых периметр равен 14, а площадь равна а) 6; б) 7.

в) Почему фигурки из пункта б) содержат квадрат 2×2 , а фигурки из пункта а) — нет?

Разберем теперь задачу, где можно применить доказанную в задаче 7 оценку периметра.

Задача 8. *Можно ли квадрат 5×5 разрезать на два клетчатых многоугольника, у каждого из которых периметр равен 28?*

Предположим, что можно так разрезать. Далее можно действовать по-разному.

Первое решение. Так как сумма площадей фигурок равна 25, то у одной из полученных фигурок площадь не больше 12. По предыдущей задаче, ее периметр не больше $2 \cdot 12 + 2 = 26$. Противоречие.

Второе решение. Пусть длина разреза равна v , тогда суммарный периметр фигурок равен $20 + 2v$, а по условию это $28 \cdot 2$. Из полученного равенства находим $v = 18$. Так как частей две, то разрез один и не может разветвляться – он представляет собой одну цепочку отрезков, проходящую по узлам внутри квадрата 5×5 . (Поясним это подробнее. Если узел находится на разрезе, то из него выходит ровно два отрезка разреза. Ведь один отрезок выходить не может, и 3 или 4 также не могут – потому что фигур две и разрез должен разделять две разные фигуры. Значит, если пойти от границы по разрезу, то будем всегда идти по линии без развилки.)

(Начало см. на с. 13)

равняться внутреннему сопротивлению батарейки. Это означает, что нужно подключить к батарееке резистор сопротивлением

$$R' = \frac{R}{4}.$$

Максимальная мощность в этом случае будет равна

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{25}{16} I^2 R.$$

Ф2584. Молоко жирностью 3,2% пролили на лист бумаги с напечатанным мелким тестом. Через слой молока толщиной 0,1 мм текст еще читается, а через более толстый слой – нет. Оцените размеры капелек жира в таком молоке.

Поскольку размеры капелек жира требуется оценить, а не вычислить точно, то для простоты расчетов можно принять, что все капельки масла, взвешенные в воде, имеют такую же плотность, как и вода, а их форма не шарик, а кубик с ребром D . Обозначим концентрацию капелек жира через n , тогда из условия задачи, очевидно, следует, что

$$nD^3 = 0,032.$$

Жир имеет отличающийся от воды коэффициент преломления, поэтому на стенках

Итак, разрез – это цепочка из 18 отрезков, значит, на ней лежит 17 узлов. Но внутри квадрата находится $4 \cdot 4 = 16$ узлов – на 1 меньше минимального необходимого количества. Противоречие.

Напоследок заметим, что в задачах 5 и 6 речь по сути идет о теореме из теории графов: *в связном графе на n вершинах не менее $n - 1$ ребер*. Соответственно, эту теорему можно доказать аналогично задаче 5. Подробнее о графах говорить не будем: вместо этого порекомендуем статью П.Кожевникова и А.Шаповалова «Свяжись с графом» («Квант» №4 за 2014 г.), посвященную задачам, в которых скрыта упомянутая теорема.

капелек свет частично отражается, а частично проходит сквозь границу раздела. Это рассеяние света молоком и приводит к эффекту «исчезновения» темных букв текста на фоне белого рассеянного света. Если на слой молока с очень малой толщиной x порядка D падает свет и площадь, на которую он падает, равна $S = D^2$, то доля света, прошедшего через воду и не попавшего ни на одну капельку жира, равна

$$p = (1 - xnD^2).$$

Пусть расстояние, пройденное светом в молоке, равно L , тогда соответствующая доля прошедшего света, не рассеянного капельками, составляет

$$p^{L/x} = (1 - xnD^2)^{L/x} = \exp(-LnD^2).$$

Согласно условию задачи при слое молока толщиной 0,1 мм текст уже не виден. А этот слой свет проходит дважды, т.е. $L = 2 \cdot 0,1$ мм. «Текст не виден» означает, что контрастность видимой картины распределения света и темноты стала меньше, например, чем 10%. Тогда

$$\exp(-2LnD^2) = 0,1, \text{ откуда } nD^2 \approx 1.$$

Из двух соотношений для размеров капелек D и концентрации n получаем оценочное значение для размеров капелек жира: $D \approx 3 \cdot 10^{-6}$ м.