Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Стасенко, Самое правильное уравнение динамики, *Квант*, 2019, номер 12, 24–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:38:43

Самое правильное уравнение динамики

А. СТАСЕНКО

ЛЕТ ТРИСТА НАЗАД, А ТО И РАНЬШЕ, суть законов физики выяснялась в течение многословных диспутов, например между Симпличио и Сагрето – героев Галилео Галилея (1632 г.). Первый из двух был, как сказал бы Н.В.Гоголь, просто «умный» (simplex – простой), второй – «умный во всех отношениях».

Вообразим себе их беседу о динамике тела переменной массы в наше время.

Симпличио: Дорогой друг, я слышал, что, согласно великому Ньютону, изменение импульса тела p со временем равно внешней силе F , действующей на это тело:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Но ведь $p = mv$. Если масса тела постоянна, ее можно вынести за знак дифференциала:

$$m \frac{dv}{dt} = ma = F.$$

Это уравнение хорошо известно всем здравомыслящим школьникам: ускорение тела a пропорционально действующей силе. А если масса тела изменяется, например, как в случае ракеты или межконтинентального самолета, испаряющейся или растущей за счет конденсации капли воды в облаке..., то какое выражение правильное было бы написать:

$$m \frac{dv}{dt} = F \text{ или } \frac{dmv}{dt} = F?$$

Сагрето: Дорогой Симпличио, в случае тела переменной массы и то и другое неверно. Но поступим, как древние греки – воспользуемся доказательством от противного

(reduction ad absurdum – приведение к противоречию). Возьмем частный случай – отсутствие внешней силы, т.е. $F = 0$. Тогда из двух испытуемых выражений получим, что или v совершенно не зависит от времени или $v \sim \frac{1}{m}$.

Правильным же является уравнение Мещерского:

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt} u, \quad (1)$$

где u – скорость выбрасываемой или присоединяемой массы относительно тела; она может быть и постоянной и даже равной скорости самого тела v , в общем – любой. Однако рассмотрим все по порядку.

Сравним ракету с другим, казалось бы, близким ей «по духу», летательным аппаратом – прямоточным воздушно-реактивным двигателем. Но прежде – о самой ракете. Представим себе, что в некоторый произвольный момент времени t ракета имела скорость v и массу m . Мысленно разобьем ракету на две части – ту, обозначим ее массу через ΔM , которая через малый промежуток времени Δt «собирается» отлететь назад (отработанное топливо ракеты), и тот «остаток» массы $m - \Delta M$, который полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v + \Delta v$. Скорость части массы, отлетевшей от «остатка», обозначим через u , тогда ее скорость относительно земного наблюдателя будет равна $(v + \Delta v) - u$. Так как разделение этих двух частей произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты не изменится:

$$mv = (m - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M(v + \Delta v - u).$$

В результате алгебраических преобразований уравнение закона сохранения импульса примет вид

$$m\Delta v = u\Delta M.$$

Если учесть, что отброшенная масса ΔM в точности равна убыли массы ракеты, $\Delta M = -\Delta m$, то полученное равенство можно переписать в виде

$$\frac{\Delta v}{u} = -\frac{\Delta m}{m}. \quad (2)$$

Тот, кто умеет суммировать бесконечно малые приращения, т.е. интегрировать, из выражения (2) легко получит (учитывая,

что в момент $t = 0$ было $v = 0$ и $m = m_0$)

$$\frac{v - 0}{u} = -(\ln m - \ln m_0),$$

или

$$\frac{v}{u} = \ln \frac{m_0}{m}. \quad (3)$$

Это – знаменитая формула Циолковского. Историки науки говорят, что он затратил на нее немало времени: первооткрывателю всегда трудно. Сегодня грамотный школьник выведет ее за несколько минут.

Проанализируем полученную формулу (3). Если убывь массы ракеты в единицу времени есть величина постоянная, обозначим ее через $\mu = -\frac{\Delta m}{\Delta t}$, то с течением времени масса ракеты изменяется по закону (рис.1)

$$m = m_0 - \mu t.$$

По прошествии времени τ , когда сгорит и будет выброшено все топливо, масса ракеты станет равной $m_\tau = m_0 - \mu\tau$, а ее скорость будет

$$v_\tau = u \ln \frac{m_0}{m_\tau}.$$

Рис. 1. Ракета ускоряется за счет отбрасывания назад только собственной массы, ее скорость и ускорение могут достичь произвольно заданной величины

Очевидно, что ракета достигнет тем большей скорости, чем меньше станет ее оставшаяся масса. Это печально, ибо неэкономно, но что поделаешь – такова природа. Хорошо уже то, что найдена лазейка, используя которую можно достичь «скорости убегания» от планеты, хотя и дорогой ценой.

Но есть еще одна возможность – увеличение относительной скорости выброса отработанного топлива. Вот что писал К.Э.Циолковский по этому поводу: «Чтобы снаряд получил наибольшую скорость, надо, чтобы каждая частица продуктов горения или иного отброса получила наибольшую относительную скорость. Она же постоянна для определенных веществ отброса. Экономия энергии тут не должна иметь места: невозможна и невыгодна».

Итак, нужно постараться увеличить скорость выброса u .

Теперь аналогично обсудим воздушно-реактивный двигатель (рис.2). Вот он «гото-

Рис. 2. Прямоточный реактивный двигатель отбрасывает не только массу горючего, но и захваченный для его сжигания атмосферный воздух. Тепло, выделяемое при горении, создает скорость истечения массы продуктов сгорания из двигателя и, как следствие, его тягу. Основная масса воздуха – инертный азот, который в двигателе лишь подогревается. Его ускорение стремится к нулю, а скорость не может превзойти некоторой константы

вится» в момент времени t «заглотить» порцию воздуха массой $\Delta m_{\text{в}}$ и, израсходовав массу горючего $\Delta m_{\text{г}}$, выбросить образовавшуюся смесь с относительной скоростью u . При этом, разумеется, изменение массы самого летательного аппарата будет равно $\Delta m = -\Delta m_{\text{г}}$. Запишем закон сохранения импульса для системы двигатель – горючее – воздух:

$$\Delta m_{\text{в}} \cdot 0 + mv = (\Delta m_{\text{в}} + \Delta m_{\text{г}})(v + \Delta v - u) + (m - \Delta m_{\text{г}})(v + \Delta v).$$

Здесь v – скорость аппарата в момент времени t , $v + \Delta v$ – его новая скорость в момент времени $t + \Delta t$, первое слагаемое слева отражает тот факт, что поглощенный двигателем воздух первоначально покоился. Отсюда, пренебрегая совсем малыми величинами – произведением $\Delta m \Delta v$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m} - \frac{\Delta m_{\text{в}}}{m} \left(\frac{v}{u} - 1 \right).$$

Отношение масс $\Delta m_{\text{г}}/\Delta m_{\text{в}}$ обозначим через β . Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m} \frac{1 + \beta - v/u}{\beta} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{u} = - \frac{\Delta m}{m} \frac{1 + \beta - v/u}{\beta}. \quad (4)$$

Посмотрите внимательно на уравнения (3) и (4). Они имеют нечто общее, а именно: для того чтобы скорость летательного аппарата росла ($\Delta v > 0$), нужно, чтобы его масса убывала ($\Delta m < 0$). Но есть и очень важное отличие: в правую часть уравнения (4) входит множитель $1 + \beta - v/u$, который по достижении скорости $v = u(1 + \beta)$ становится равным нулю. Это значит, что воздушно-реактивный двигатель, «заглатывающий воздух», не может разогнаться до скорости, существенно большей, чем относительная скорость истечения продуктов сгорания. Скорость такого двигателя имеет предел, преодолеть который невозможно. А для ракеты аналогичного предела нет.

На самом деле этим уже все сказано, однако в принципе можно получить и точные выражения для скорости ракеты и воздушно-реактивного двигателя.

Наконец, рассмотрим прямо противоположный случай – когда масса тела растет со временем. Пусть в облаке из микрокапель

одна из них стала падать, поглощая на своем пути встречные капли. (В начальный момент времени, когда ее скорость еще невелика, пренебрежем сопротивлением воздуха.) В этом случае в уравнении Мещерского (1) можно положить $u = -v$. Изменение импульса падающей капли переменной массы за малое время Δt равно

$$\Delta(mv) = mg\Delta t. \quad (5)$$

По условию задачи изменение массы капли за время Δt равно

$$\Delta m = \alpha \rho v_{\text{ср}} S \Delta t, \quad (6)$$

где ρ – плотность воды, $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость капли за время Δt , $S = 4\pi r^2$ – площадь поверхности капли, α – безразмерный коэффициент пропорциональности. С другой стороны, поскольку $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ (здесь r – радиус капли), то $\Delta m = 4\pi r^2 \rho \Delta r = S \rho \Delta r$. Если за время Δt капля проходит расстояние Δy , то

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_{\text{ср}}}.$$

Подставив выражения для Δm и Δt в равенство (6), получим

$$\Delta r = \alpha \Delta y \sim \Delta y.$$

Следовательно, радиус капли растет пропорционально пройденному пути, т.е. пропорционально y .

Поскольку капля движется с постоянным ускорением a , то $y = at^2/2$, т.е. $y \sim t^2$. Значит,

$$r \sim t^2, \quad m \sim r^3 \sim t^6.$$

Учитывая эти соотношения, из уравнения (5) получаем

$$\Delta(t^6 at) = t^6 g \Delta t.$$

Дифференцируя левую часть этого равенства находим ускорение a :

$$\Delta(at^7) = 7at^6 \Delta t = t^6 g \Delta t, \quad \text{и} \quad a = \frac{g}{7}.$$

К глубокому сожалению, наш любимый преподаватель МФТИ Г.И. Косоуров, утверждавший, что в физике никогда не получается семерки, не дожидаясь решения этой задачи. Много сделавший для журнала «Квант» и для Всесоюзных олимпиад он, несомненно, порадовался бы вместе с нами.