Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Бакаев, А. Полянский, Г. Челноков, Метод перераспределения зарядов, *Квант*, 2019, номер 12, 31–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 07:52:03

Метод перераспределения зарядов

**Е. БАКАЕВ, А. ПОЛЯНСКИЙ,
Г. ЧЕЛНОВ**

ЗАДАЧИ ЭТОЙ СТАТЬИ РЕШАЮТСЯ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНОГО ПОДСЧЕТА (подсчета двумя способами). Когда такой подсчет не совсем элементарен, его бывает удобно сформулировать как назначение объектам некоторых величин и их последующее перераспределение. Эти величины будем называть *зарядами*.

Здесь мы представим несколько красивых и непростых «олимпиадных» задач, решающихся с помощью такого подхода. *Метод перераспределения зарядов* (по-английски *discharging method*) применяется и за пределами олимпиад: например, с помощью него была доказана знаменитая теорема о четырех красках. Подробнее с методом можно ознакомиться в проекте Летней конференции Турнира городов.¹ Представленные в статье задачи составляют вводный раздел этого проекта.

К следующим задачам даны решения, но рекомендуем перед прочтением решений подумать над задачами самостоятельно.

1. *В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звездочка, что в одной строке с ней находится больше звездочек, чем в одном столбце с ней.*

Дадим каждому непустому столбцу заряд -1 , а каждой непустой строке заряд 1 . Тогда сумма зарядов отрицательна. Теперь пусть

каждый ряд (столбец или строка) раздаст свой заряд поровну всем звездочкам, которые в нем стоят. Так как суммарный заряд отрицательный, то найдется звездочка с отрицательным зарядом. Если в ее строке a звездочек, а в ее столбце их b , то ее заряд $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Раз эта величина отрицательная, то $a > b$, значит, эта звездочка искомая.

2. *В библиотеке на полках стоят книги, при этом ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдется хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.*

В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Распределим заряды так: если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $1/n$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдает полке заряд $1/m$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k . Но заряд каждой книги меняется меньше чем на 1 .

Значит, есть по крайней мере $k+1$ книг, которые отдали больше, чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

3. *На плоскости дано n окружностей радиуса 1 , причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).*

Дадим каждой точке пересечения заряд 1 . Пусть точка, лежащая в пересечении k окружностей, отдает им по $1/k$. Покажем, что теперь у каждой окружности заряд не менее 1 .

Выберем на произвольной окружности s точку P , которая отдала этой окружности не больше, чем другие точки, пусть это $1/m$. Тогда через P проходит $m-1$ окружностей, пересекающихся с s в каких-то $m-1$ различных точках, отличных от P . Таким образом, на s не менее m точек пересечения и все они отдали ей хотя бы по $1/m$. Значит, каждая окружность получила заряд не менее 1 . Следовательно, количество окружностей не превышает количество точек пересечения.

¹ Проект представляли: Е. Бакаев, В. Буланкина, А. Полянский, А. Рябичев, Г. Челноков, см. <https://www.turgor.ru/lktg/2019/>

Подумайте: где в доказательстве использовалось то, что окружности единичного радиуса?

4. На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдется не менее $n - 2$ треугольников.

На каждой из этих прямых будет образовано по $n - 2$ отрезка, значит, всего на них будет $n(n - 2)$ отрезков. Эти n прямых делят плоскость на $\frac{n(n + 1)}{2} + 1$ частей (это можно доказать по индукции; оставим доказательство этого утверждения в качестве упражнения). Из них $2n$ частей будут неограниченными (опять же, подумайте самостоятельно, почему это так). Значит, ограниченных частей (в виде многоугольников) будет $m = \frac{n(n + 1)}{2} + 1 - 2n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ конечных граней. Пусть среди них t треугольников.

Рассмотрим отрезок AB . Пусть две другие данные прямые, кроме AB , проходящие через A и B , пересекаются в точке C . Назовем ту полуплоскость относительно AB , в которой лежит точка C , *верхней* для отрезка AB .

Дадим каждому отрезку AB заряд 1 и передадим этот заряд в ту смежную с ним грань, которая лежит в верхней для AB полуплоскости. Каждый треугольник получит заряд 3. Докажем, что остальные грани получают не больше 2. Если грань получает заряд от стороны AB , то внешние углы A и B этой грани в сумме больше 180° . Сумма внешних углов многоугольника равна 360° , так что получить заряд от трех ребер можно, только когда все эти три ребра попарно соседние, т.е. только в случае треугольника.

Исходная сумма зарядов отрезков равна получившейся сумме зарядов граней, откуда получаем $n(n - 2) \leq 3t + 2(m - t) = 2m + t$.

Преобразовав, получим $n^2 - 2n \leq n^2 - 3n + 2 + t$. Отсюда $n - 2 \leq t$.

Другому решению этой задачи посвящена статья А. Канеля и А. Ковальджи «Треугольники и катастрофы» в «Кванте» № 11 за 1992 год.

Можете также подумать, как распространить решение этой задачи на псевдопрямые в общем положении:

Внутри окружности нарисовано $n \geq 3$ кривых, соединяющих противоположные точки на окружности. Известно, что любые две кривые имеют ровно одну общую точку и никакие три из них не проходят через одну точку. Кривые делят круг на несколько частей; внутренней назовем часть, если она не ограничена окружностью; а треугольной назовем часть, если ее ограничивают ровно три кривые. Докажите, что число внутренних треугольных частей по крайней мере $n - 2$.

5. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдется два с общей стороной.

Предположим, нашлось разбиение, в котором никакие два треугольника не имеют общей стороны. Присвоим каждой вершине разрезания заряд, равный сумме сходящихся в ней углов треугольников. Таким образом, вершины бывают трех видов:

- 1) вершины квадрата – с зарядом $\pi/2$;
- 2) вершины, лежащие на стороне квадрата или на стороне одного из треугольников, – с зарядом π ;
- 3) вершины, не лежащие на стороне квадрата или треугольника, – с зарядом 2π .

Пусть есть a вершин второго типа и b вершин третьего типа. Тогда заряды в сумме дают $(a + 2b + 2)\pi$, следовательно, число треугольников равно $a + 2b + 2$.

Построим следующий плоский граф. Возьмем все вершины треугольников в качестве вершин. Проведем в каждом треуголь-

Построение графа по разрезанию квадрата на треугольники

нике по три ребра (см. рисунок) и посадим на получившуюся треугольную грань заряд π . Остальные грани имеют не менее 3 вершин, разобьем их диагоналями на треугольники (включая внешнюю грань, которая является четырехугольником) и посадим на каждый из них заряд 0.

Итак, в полученном плоском графе все грани треугольные и имеют заряд 0 или π . По построению сумма зарядов равна $(a + 2b + 2)\pi$ и никакие две грани с зарядами π не граничат по ребру. Пусть V , E , F – количество вершин, ребер и граней соответственно. Из равенства $2E = 3F$ и формулы Эйлера $V - E + F = 2$ получаем соотношение $E = 3V - 6 = 3(a + b + 4) - 6$.

Теперь пусть каждая грань отдаст по трети своего заряда смежным с нею ребрам. Средний заряд ребер будет равен $\frac{(a + 2b + 2)\pi}{3a + 3b + 12 - 6} \geq \frac{1}{3}\pi$. Но как минимум одно ребро имеет заряд 0. Именно, хотя бы одно ребро было проведено за пределами квадрата, его-то заряд точно нулевой. Следовательно, найдется ребро, по которому граничат два треугольника с зарядом π , противоречие.

Задачи для самостоятельного решения

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее столбце совпадает с количеством звездочек в ее строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хотя бы одна звездочка.

7. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф – не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них – соперников-гномов. Докажите, что $D \leq \frac{10}{11}E$.

8. Таблица $n \times n$ заполнена нулями и единицами так, что если число в какой-то клетке таблицы равно 0, то сумма всех чисел в ее кресте (крестом клетки называется объединение ее столбца и ее строки) не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

9. Пусть есть выпуклый n -угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами много-

угольника содержит по крайней мере одну красную точку. Докажите, что

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \right).$$

Источники задач

1. M1214 «Задачника «Кванта» (А.Разборов).
- 2, 6, 8. Фольклор.
3. Теорема 1 (K.Bezdek, R.Connelly) из статьи: H.Last, R.Pinchasi. At Least $n - 1$ Intersection Points in a Connected Family of n Unit Circles in the Plane. – Discrete & Computational Geometry, 38:2 (2007), 321–354.
4. Идея этого решения предложена Felsner и Kriegel, см. Теорему 5.15 из книги: Stefan Felsner. Geometric Graphs and Arrangements.
5. Эта задача переоткрывалась неоднократно. Например, M320 «Задачника» (А.Печковский) или теорема 6 в статье: Andrey Kupavskii, János Pach, Gábor Tardos. Tilings with noncongruent triangles. – European Journal of Combinatorics, 73 (2018), 72–80.
7. Переформулировка задачи Д.Карпова, IV Кубок памяти А.Н.Колмогорова.
9. Теорема 3 в статье: J.Matoušek. Blocking Visibility for Points in General Position. – Discrete & Computational Geometry, 42:2 (2009), 219–223.

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНИЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<p>УСЛУГИ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<p>АССОРТИМЕНТ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры
---	--

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед