Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Прокопенко, Д. Швецов, Вокруг точки на медиане, *Квант*, 2020, номер 2, 42–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:20:50

Задачи для самостоятельного решения

9. В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Докажите, что найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых.

10. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

11. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят числа 1 и -1 , причем сумма всех чисел не больше 100 и не меньше -100 . Докажите, что есть квадрат 25×25 , абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

12. Дан выпуклый многоугольник и точка а) вне, б) внутри него. Докажите, что его можно разбить

на две равновеликие части прямой, проходящей через заданную точку.

13. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Докажите, что на этом отрезке найдется такое число x , что

$$\frac{1}{n}(|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|) = \frac{1}{2}.$$

Список литературы для дальнейшего изучения

1. С. Табачников. Соображения непрерывности. — «Квант», 1987, №9.
2. А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц. Непрерывность. — М.: МЦНМО, 2015.
3. А. В. Шаповалов. Принцип узких мест. — М.: МЦНМО, 2008.

Вокруг точки на медиане

Д. ПРОКОПЕНКО, Д. ШВЕЦОВ

В этой статье нас ждет обзорная экскурсия от древнегреческих шедевров геометрии до задач современных олимпиад. Мы постараемся проследить, как непростые задачи наших дней перекликаются с находками древних.

На заочном туре IX Олимпиады по геометрии имени И. Ф. Шарыгина была предложена такая задача (автор — Ф. Ивлев).

Задача 1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Перпен-

Рис. 1

дикуляр из центра I этой окружности на медиану CM пересекает прямую A_1B_1 в точке K (рис. 1). Докажите, что $CK \parallel AB$.

Несмотря на простую и интересную формулировку, так сразу и не ясно, как к задаче подступиться. Решение же из книги [1] использует полярное преобразование, методы проективной геометрии, понятие бесконечно удаленной точки — требуется эрудиция. Неужели к задаче с таким элегантным условием нет более простого подхода? Есть! Оказывается, эта задача является вариацией следующего классического факта [2]:

Теорема 1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть прямая C_1I пересекает прямую A_1B_1 в точке P (рис. 2). Тогда прямая CP содержит медиану треугольника ABC .

Давайте сначала с помощью этой теоремы решим задачу 1, а затем докажем и саму теорему.

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 5

Рис. 4

Рис. 6

Решение. Пусть прямая A_1B_1 и прямая, проведенная через вершину C параллельно AB , пересекаются в точке K' (рис.3). Покажем, что точка K' совпадает с точкой K из условия.

Рассмотрим треугольник CIK' . Заметим, что точка P — ортоцентр треугольника CIK' . Следовательно, прямая CP содержит третью высоту. Тогда прямая IK' перпендикулярна отрезку CM , который по основной задаче является медианой треугольника ABC . Прямая IK' удовлетворяет условию задачи, значит, точки K и K' действительно совпадают, что и завершает решение.

Теперь давайте вернемся к теореме 1 и докажем ее.

Доказательство теоремы 1. Итак, у нас имеется точка P — точка пересечения прямых IC_1 и A_1B_1 , — которую мы хотим «усадить» на медиану CM (рис.4). Для этого проведем через точку P прямую, параллельную прямой AB . Таким образом мы связываем точку P с точками A_1 и B_1 . Итак, пусть прямая, параллельная прямой AB , проходящая через точку P , пересекает стороны AC и BC в точках B' и A' соответственно (рис.5).

Теперь заметим, что точки B_1, B', P, I лежат на одной окружности, так как $\angle IB_1B' = \angle B'PI = 90^\circ$ (рис.6). Это дает нам равенство углов $\angle IB_1P$ и $\angle IB'P$, ибо оба угла опираются на дугу PI . Точно такими же рассуждениями можно убедиться, что углы $\angle PA_1I$ и $\angle PA'I$ равны. С другой стороны, мы знаем, что треугольник A_1IB_1 равнобедренный, а стало быть, $\angle IA_1B_1 = \angle IB_1A_1$, но тогда и $\angle IB'A' = \angle IA'B'$. Выходит, мы доказали, что треугольник $A'IB'$ равнобедренный, а отрезок IP в нем высота ($A'B' \parallel AB$), следовательно, $A'P = PB'$. Но раз прямая CP делит отрезок $A'B'$ пополам, то и параллельный ему отрезок AB поделится прямой CP на равные части, что и завершает доказательство теоремы 1.

Оказывается, что такой подход к задаче 1 связывает ее с другой жемчужиной геометрии — прямой Симсона.

Теорема 2. Из точки D опустим перпендикуляры DA_1, DB_1 и DC_1 на прямые BC, CA и AB соответственно (рис.7). Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона) в том и только том случае, когда точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Рис. 7

Рис. 8

Доказательство этого утверждения уже несколько раз появлялось на страницах «Кванта», например на первой странице статьи [3]. Тут мы его воспроизводить не будем.

Вооружившись прямой Симсона, вернемся к доказательству теоремы 1. На рисунке 8 мы видим, что точки A_1 , B_1 и P — проекции точки I на прямые, содержащие стороны треугольника $A'B'C$. Поскольку точки A_1 , B_1 и P лежат на одной прямой, то по теореме 2 точка I лежит на описанной окружности треугольника $A'B'C$. Поскольку CI — биссектриса угла C , а I — середина дуги $A'B'$, то P — середина $A'B'$ (IP — высота в равнобедренном треугольнике $A'IB'$).

Тем самым, использование прямой Симсона позволяет по-новому взглянуть на решение задачи 1. Отметим, что такая скрытая прямая Симсона в задачах — не такое уж редкое явление.

Немного истории

Здесь мы можем остановиться и немного отдохнуть. Оказывается, у задачи 1 есть своя история. Недавно первому автору этой статьи попал в руки старый номер журнала «Математика в школе» за 1996 год. Выяснилось, что в том же году на Всероссийской олимпиаде в 10 классе была дана наша

Рис. 9

задача 1 в других обозначениях. В журнале приводились два решения этой задачи. Первое — векторное, чисто вычислительное — занимало примерно половину страницы печатного текста, второе использовало свойства проективного преобразования и двойных отношений. Стало интересно, а есть ли более доступные геометрические решения. Плоды этих размышлений перед вами.

Теперь вернемся из 1996 года более чем на 20 лет назад, в 1973 год. Итак, «Задачник «Кванта», задача М178, автор — Игорь Федорович Шарыгин. Здесь задача 1 дана в более общем виде: вместо центра вписанной окружности можно рассматривать любую точку на биссектрисе! Оказывается, что сама окружность ни при чем. Для удобства формулировку дадим в наших обозначениях.

Задача 2 (обобщение задачи 1). Из некоторой точки T биссектрисы угла C треугольника ABC опустим перпендикуляры TA_1 , TB_1 и TC_1 на его стороны BC , CA и AB соответственно. Пусть P — точка пересечения прямых TC_1 и A_1B_1 (рис.9). Докажите, что CP делит сторону AB пополам.

Упражнение. Решите эту задачу.

Указание. Используйте задачу 1.

И наконец, более века назад в фундаментальной книге Д.Ефремова «Новая геометрия треугольника» [1], опубликованной в 1902 году (рис.10), была помещена теорема, совпадающая с задачей И.Ф.Шарыгина с точностью до обозначений. Вообще книгу Д.Ефремова можно рекомендовать всем любителям геометрии. Она содержит богатейший теоретический обзор геометрии треугольника.

Рис. 10

Итак, мы видим, что основная задача только в России была переоткрыта не менее трех раз.

Интересно, что Дмитрий Дмитриевич Ефремов окончил Санкт-Петербургский университет со званием кандидата физико-математических наук, был награжден золотой медалью. В возрасте 28 лет в 1887 году он был назначен учителем математики в Иваново-Вознесенское реальное училище с предоставлением ему уроков черчения, строительного искусства и землемерия в механико- и химико-технических отделениях VII дополнительного класса. Удивительное место для кандидата наук, закончившего университет с золотой медалью. В 1897 году Дмитрий Дмитриевич перемещен штатным преподавателем механики и математики в школу колористов при Иваново-Вознесенском реальном училище (ивановская промышленность в те годы была на подъеме).

На этом закончим историческое отступление и вернемся к задачам.

Задача 1 перекликается с классическим шедевром Архимеда, который уже не раз появлялся на страницах журнала «Квант».

Задача 3 (формула Архимеда, M1000). Вокруг треугольника ABC описана окружность. Из точки W – середины дуги AB , не содержащей C , опустили перпендикуляр WK на прямую BC (рис. 11). Пусть $CA = b$, $CB = a$. Тогда $CK = \frac{a+b}{2}$.

Знание формулы Архимеда подскажет нам, как решить еще одну непростую задачу.

Рис. 11

Задача 4 (Математическое многоборье, СУНЦ МГУ, 2010). В неравностороннем треугольнике ABC отметили точку пересечения медиан G и точку пересечения биссектрис I (рис. 12). Оказалось, что прямая GI перпендикулярна стороне AB . Докажите, что $AC + BC = 3AB$.

Из задачи 1 следует, что точка G лежит на пересечении медианы и отрезка, соединяющего точки касания A' и B' вписанной окружности со сторонами CB и CA соответственно.

Проведем через точку G прямую A_1B_1 , параллельную AB , где $A_1 \in CA$, $B_1 \in CB$ (см. рис. 12). Получим треугольник A_1CB_1 , подобный треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{CG}{CM} = \frac{2}{3}$.

Рис. 12

Мы знаем, что точки C , A_1 , I и B_1 лежат на одной окружности. Поскольку CI – биссектриса угла ACB , то I – середина дуги A_1B_1 . Имеем

$$\begin{aligned} CA' &= \frac{CB_1 + CA_1}{2} = \\ &= \frac{\frac{2}{3}CB + \frac{2}{3}CA}{2} = \frac{CB + CA}{3}. \end{aligned} \quad (1)$$

В первом равенстве мы воспользовались *формулой Архимеда*, а во втором – подобием треугольников A_1CB_1 и ACB .

Остается воспользоваться тем, что длину касательной из вершины C в любом треугольнике можно найти по формуле

$$CA' = p - AB, \quad (2)$$

где p – полупериметр треугольника ABC . Приравняв правые части формул (1) и (2), получим, что $AC + BC = 3AB$.

Треугольники, у которых прямая GI перпендикулярна стороне треугольника, обладают еще одним интересным свойством.

Задача 5 (А.Карлюченко, финал VIII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). Пусть G и I – точки пересечения медиан и биссектрис неравностороннего треугольника ABC , а r – радиус вписанной в него окружности (рис.13). Докажите,

Рис. 13

Рис. 14

что $GI = \frac{r}{3}$ тогда и только тогда, когда прямая GI перпендикулярна одной из сторон треугольника.

Классические факты напоминают маяки, на которые можно ориентироваться в бурном олимпиадном море. Надеемся, что наша небольшая прогулка с обзором геометрических шедевров, древних и современных, прошла с пользой. Теперь же приглашаем читателя, наряду с задачей А.Карлюченко (тут вам поможет рисунок 13, содержащий подсказки), решить следующую красивую задачу.

Задача 6 (Л. Емельянов, С. Берлов, Олимпиада ФМЛ 239, 2005 г.). Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно (рис.14). Обозначим через L основание биссектрисы угла, а через P – точку пересечения прямых C_1I и A_1B_1 . Докажите, что $PL \parallel CC_1$.

Список литературы

1. Д.Ефремов. Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1902 г. Электронная версия: <http://zadachi.mccme.ru/ngt/>
2. А.В.Акопян. Геометрия в картинках. – М., 2011. Электронная версия: <https://users.mccme.ru/akopyan/papers/RuGeoFigures.pdf>
3. Д.Швецов. От прямой Симсона к теореме Дроз-Фарни. – «Квант», 2009, №6.
4. А.А.Заславский. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014). – М.: МЦМНО, 2015.
5. Задачи на сайте <http://zadachi.mccme.ru/>
6. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина на сайте geometry.ru