Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Бакаев, Прыжки в правильном многоугольнике, *Квант*, 2020, номер 3, 34–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:22:08

Прыжки в правильном многоугольнике

Е. БАКАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ несколько решений задачи, предлагавшейся в одном из недавних туров Конкурса имени А.П.Савина. А именно, задачи 20:

В каждой вершине правильного $4k$ -угольника сидело по блохе. Каждая блоха дружит с двумя своими соседями. Половина блох – красные, половина – синие, причем красные и синие блохи чередуются. Блохи начали прыгать. В первую секунду прыгнули красные: каждая прыгнула в точку, симметричную ей относительно прямой, соединяющей двух ее друзей. Во вторую секунду аналогичным образом прыгнули все синие блохи. В третью секунду снова прыгнули все красные и т.д. Докажите, что через k секунд все блохи снова окажутся в вершинах некоторого правильного $4k$ -угольника.

Рис. 1

На рисунке 1 приведен пример того, как красные блохи, сидящие в вершинах правильного 12-угольника, сделают три прыжка. Пусть точка O – центр исходного многоугольника. Рассмотрим двух соседних блох в точках A и B . Они все время будут находиться на прямых OA и OB соответственно. Рассмотрим треугольник AOB и выясним, как движутся эти две блохи – очевидно, что другие пары соседних

блох будут скакать по своим треугольникам аналогичным образом.

С каждым прыжком внутри угла AOB будет откладываться отрезок, равный AB . Выясним, какими будут углы возникающих равнобедренных треугольников. Пусть на i -м прыжке блоха прыгает в точку P_i , при этом образуется равнобедренный треугольник Δ_i с углами α_i при основании. Первые два треугольника изображены на рисунке 2. Из

Рис. 2

того что треугольник AOB равнобедренный и $\angle AOB = \frac{360^\circ}{4k} = \frac{90^\circ}{k}$, несложно найти

$$\alpha_1 = 90^\circ - \frac{45^\circ}{k}, \quad \alpha_2 = 90^\circ - 3 \cdot \frac{45^\circ}{k}.$$

Мы хотим получить явную формулу для α_i , т.е. выразить этот угол через i . Естественно делать это по индукции, но мы поступим немного иначе. Рассмотрев последовательные треугольники Δ_{i-1} , Δ_i , Δ_{i+1} ,

Рис. 3

можно заметить, что $2\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}$ (рис.3). Если преобразовать это равенство в $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} - \alpha_i$, то станет видно, что последовательность α_i является арифметической прогрессией. Зная ее начало, мы можем записать формулу общего члена:

$$\alpha_i = 90^\circ - (2i - 1) \cdot \frac{45^\circ}{k}.$$

Подумаем теперь, где кончится эта последовательность треугольников. Очередной треугольник Δ_i удастся построить внутри

угла AOB , если угол $\alpha_i = 90^\circ - (2i - 1) \cdot \frac{45^\circ}{k}$ не больше $\angle AOB = \frac{90^\circ}{k}$, т.е. при $i \leq k - 1$.

Итак, треугольник Δ_k – это первый треугольник из рассматриваемой последовательности треугольников, который не поместится целиком внутри угла AOB (рис.4). Так

как $\alpha_k = \frac{45^\circ}{k} = \frac{\angle AOB}{2}$, то треугольник $OP_k P_{k-1}$ равнобедренный и $OP_k = OP_{k-1}$.

Получается, что после k -го прыжка эти две блохи, а значит и все блохи, будут снова равноудалены от точки O . Пара блох, которые изначально сидели в противоположных вершинах $4k$ -угольника, либо обе останутся на тех же лучах, исходящих из O , либо займут лучи друг друга. Поэтому снова все блохи будут сидеть в вершинах правильного $4k$ -угольника. Задача решена.

Эта конструкция – прыжки фиксированной длины с одной стороны угла на другую – рассматривалась в задаче Н.Б.Васильева, вошедшей в «Задачник «Кванта» под номером М190:

На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b . В точке A_1 , находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b , сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots$, руководствуясь следующими правилами. Во-первых, точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ лежат на прямой a , точки $B_1, B_2, B_3, \dots$ – на прямой b . Во-вторых, $1 = A_1 B_1 = B_1 A_2 = A_2 B_2 = B_2 A_3 = A_3 B_3 = \dots$. В-третьих, наконец, точка A_n не совпадает с A_{n+1} , кроме случая $A_n B_n \perp a$ (аналогично, B_n совпадает с B_{n+1} , только если $B_n A_{n+1} \perp b$). Нетрудно видеть, что этими тремя условиями последовательность прыжков определена одно-

значно. Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, т.е. в некоторый момент она попадет в начальную точку A_1 и затем будет последовательно проходить те же самые точки $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots$, как в начале пути; а если угол измеряется иррациональным числом градусов, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Видно, что в конкурсной задаче 20 рассматривается частный случай конструкции из задачи М190 – когда угол между прямыми равен $\frac{90^\circ}{k}$ для натуральных k .

Второй способ

Соединим каждую блоху со следующей по часовой стрелке. Будем следить за тем, как этот набор из n векторов меняется при прыжках ($n = 4k$). Пусть на некотором шаге одна из блох прыгает из точки B в точку B' , а ее друзья сидят в точках A и C (рис.5). Тогда $ABCB'$ – ромб, и в рассматриваемом наборе векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ заменятся на $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB}$, т.е. поменя-

Рис. 5

ются местами.

Таким образом, при каждом прыжке все векторы разбиваются на пары соседних и два вектора каждой пары меняются местами. Раз происходят только перестановки начального набора векторов, то для краткости записи можно рассматривать перестановку их индексов. Например, при $k = 3$ последовательность перестановок будет такой, как в таблице (для наглядности четные и нечетные индексы покрашены в разные цвета):

Сначала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
после 1-го прыжка	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
после 2-го прыжка	11	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	2
после 3-го прыжка	4	11	6	1	8	3	10	5	12	7	2	9

Заметим, что каждый раз четные индексы сдвигаются на одну позицию относительно нечетных. При этом и четные и нечетные индексы не меняют своего внутреннего порядка. Поэтому через k прыжков получится такая последовательность:

1 (2 + 2k) 3 (4 + 2k) 5 (6 + 2k) ...

Векторы $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_{i+2k}$ являются противоположными, поскольку изначально они шли вдоль противоположных сторон правильного $4k$ -угольника. Значит, последовательность векторов, которая получится через k прыжков, можно записать так: $\vec{a}_1, -\vec{a}_2, \vec{a}_3, -\vec{a}_4, \dots, \vec{a}_{n-1}, -\vec{a}_n$. Покажем теперь, что если двигаться по таким векторам в этом порядке, то мы будем совершать обход вершин правильного n -угольника.

Угол между соседними векторами $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_{i+1}$ – это внешний угол правильного $4k$ -угольника, он равен $\frac{360^\circ}{4k}$. Такой же угол образуют диагонали A_1A_{2k} и $A_{2k}A_{4k-1}$ правильного $4k$ -угольника $A_1A_2\dots A_{4k}$ (рис.6). Это показывает, что совершается обход вершин правильного $4k$ -угольника по его «почти самым длинным» диагоналям длины, равной стороне исходного $4k$ -угольника (рис.7).

Рис. 6

Рис. 7

Третий способ

Вернемся к ломаной с равными звеньями, вершины которой лежат на сторонах угла AOB – как в первом решении (рис.8). Рассмотрим два соседних звена $P_{k-1}P_k$ и P_kP_{k+1} – они образуют равнобедренный треугольник. Отразим $\angle AOB$ относительно той стороны, на которой лежит P_k ; пусть точке P_{k+1} симметрична точка P'_{k+1} . Тогда точки O, P_{k-1}, P_k и P'_{k+1} лежат на одной окружности (это следует из того, что два противоположных угла в сумме дают 180°).

Рис. 8

Эта конструкция встречается часто. Для треугольников OP_kP_{k-1} и OP_kP_{k+1} выполняется так называемый четвертый признак «равенства» треугольников: «по двум сторонам и углу не между ними». Такие треугольники не обязательно равны (для этого вывода нужны дополнительные условия), но если они не равны, то, в частности, из них можно сложить вписанный четырехугольник.

Возможен также другой случай взаимного расположения точек: P_{k+1} может попасть не на луч OA , а на его дополнение (рис.9). Но и тогда те же четыре точки лежат на одной окружности.

Эти два случая охватывают все возможные

Рис. 9

варианты расположения точек, помимо вырожденных (т.е. когда некоторые из этих 4 точек совпадают), но для них факт продолжат оставаться верным.

Итак, мы разобрались, что происходит при таком отражении одного звена ломаной. Теперь повторим это действие много раз. Если так и дальше отражать углы, то получится пучок лучей с равными углами между соседними лучами. А ломаная «распрямится» в такую ломаную, у которой каждая следующая вершина лежит на следующем луче (рис.10). И раз любые три соседние

Рис. 10

точки лежат на одной окружности с точкой O , то и все они лежат на одной окружности.

Вернемся к исходной задаче о правильном многоугольнике. Первое звено ломаной – это его сторона AB . Тогда после «выпрямления» ломаной все точки будут лежать на окружности, описанной около AOB , где O – центр правильного многоугольника (на рисунке 11 показан пример для $k = 3$). Угол AOB

Рис. 11

является вписанным в эту окружность и центральным углом описанной окружности правильного $4k$ -угольника, значит, градусные меры дуг AB этих двух окружностей отличаются в 2 раза. Отсюда следует, что в описанную около AOB окружность вписывается правильный $2k$ -угольник со стороной AB . Значит, он и является ломаной, в которую «выпрямится» исходная! Отсюда ясно, что места, на которые блохи прыгнули после $(k-1)$ -го прыжка и после k -го прыжка, будут равноудалены от точки O – ведь они, как и весь правильный $2k$ -угольник, симметричны относительно серединного перпендикуляра к стороне AB . Задача решена.

Зададимся еще парой естественных вопросов, возникающих при размышлении над исходной задачей.

Мы выяснили, как будут расположены блохи через k прыжков. А как будут двигаться блохи после этого? Предлагаем подумать об этом самостоятельно.

Следующий вопрос такой. В задаче рассматривался $4k$ -угольник. Понятно, почему требуется, чтобы количество вершин было четным – чтобы правило, по которому прыгают блохи, было корректным. А что будет,

Рис. 12

Рис. 13

если оно четное, но не делится на 4? Иными словами, что интересного можно заметить про аналогичную последовательность прыжков для $(4k+2)$ -угольника? На рисунках 12 и 13 приведены иллюстрации для $k=2$ и $k=3$ (иллюстрацию для $k=1$ предлагаем представить в уме).

Видно, что возникает разбиение правильного многоугольника на ромбы. После k -го прыжка половина блох попадает в центр – не только в рассмотренных случаях, а для всех k , и это можно доказать, используя рассмотренные нами подходы.

Если рассмотреть последовательность равнобедренных треугольников, как в первом способе, то получится, что k таких треугольников целиком замощают треугольник AOB . Это, конечно, требует доказательства, но оно аналогично доказательству для $4k$ -угольника (и даже несколько проще его), и мы не будем приводить его здесь.

Отметим, что получившаяся конструкция любопытна сама по себе. Например, для $k=2$ она позволяет найти значение косинуса 36° просто с помощью подобия треугольников ABC и AOB (рис.14):

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1+x}{1}, \\ 1+x = 2 \cos 36^\circ. \end{cases}$$

Рис. 14

Также эта конструкция скрыта, например, в такой задаче: требуется найти угол, отмеченный знаком вопроса на рисунке 15. Подумайте, какое значение k здесь лучше выбрать.

Рис. 15

Предлагаем самостоятельно подумать над тем, как применить к задаче про $(4k+2)$ -угольник идеи второго способа.

Третий способ дает нам такое короткое объяснение: число $\frac{4k+2}{2} = 2k+1$ нечетно, и у правильного $(2k+1)$ -угольника со стороной AB одна из вершин попадает в точку O (см. рис. 13).

Этот же подход из третьего способа можно применить и к задаче М190. Пусть вместо того, чтобы прыгать по сторонам одного угла, блоха перепрыгивает на следующий луч этого пучка (см. рис. 10). Тогда получается, что она скачет по окружности с равными интервалами. Когда величина угла между исходными прямыми (т.е. $\angle AOB$ в наших обозначениях) выражается рациональным числом градусов, то и длина прыжка блохи по окружности тоже выражается рациональным числом градусов, значит, в какой-то момент ее путь заиклится. В ином случае длина прыжка блохи по окружности составляет иррациональное число градусов и она все время будет попадать в новые точки, т.е. расстояние от блохи до точки O не может повториться три раза.

Статья Н.Б.Васильева «Последовательность прыжков» в «Кванте» № 11 за 1973 год посвящена другому подходу к задаче М190. Рекомендуем прочитать эту статью.

НАМ ПИШУТ

Как выглядит график синуса?

П. ПАНОВ

Необычный график функции $y = \sin(314x)$ я обнаружил в одной из студенческих работ по электротехнике, откуда его и позаимствовал (рис. 1). Конечно, так график синуса не может выглядеть ни в коем случае, и мы хотим разобраться в причинах этой аномалии, понять, в чем тут дело.

Прежде поясним, откуда в электротехнике берется функция $y = \sin(314x)$. На самом деле она, как чертик, выскакивает из каждой розетки. Всем известно, что в России частота сетевого напряжения составляет $f = 50$ Гц. После перехода к угловой частоте получаем $\omega = 2\pi f = 100\pi$ рад/с и после естественного

Рис. 1. «График» функции $y = \sin(314x)$ составлен из точек вида $(x_i; \sin(314x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$

округления имеем $\omega = 314$ рад/с. При этом зависимость напряжения от времени принимает вид $U(t) = 220 \sin(314t)$ В. Отбросив постоянный множитель и заменив t на x , получим ту самую функцию $y = \sin(314x)$.

Отметим, что рисунок 1 был построен в среде Mathcad. При этом предваряющая его строка означает, что функция $y = \sin(314x)$ вычисляется в точках x_i , $x_i = i \cdot 10^{-3}$, где i пробегает все целые от -10^4 до 10^4 , и сама картинка состоит из точек с координатами

$$(x_i; \sin(314x_i)).$$