Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Панов, Как выглядит график синуса?, *Квант*, 2020, номер 3, 38–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:45:50

Также эта конструкция скрыта, например, в такой задаче: требуется найти угол, отмеченный знаком вопроса на рисунке 15. Подумайте, какое значение k здесь лучше выбрать.

Рис. 15

Предлагаем самостоятельно подумать над тем, как применить к задаче про $(4k+2)$ -угольник идеи второго способа.

Третий способ дает нам такое короткое объяснение: число $\frac{4k+2}{2} = 2k+1$ нечетно, и у правильного $(2k+1)$ -угольника со стороной AB одна из вершин попадает в точку O (см. рис. 13).

Этот же подход из третьего способа можно применить и к задаче М190. Пусть вместо того, чтобы прыгать по сторонам одного угла, блоха перепрыгивает на следующий луч этого пучка (см. рис. 10). Тогда получается, что она скачет по окружности с равными интервалами. Когда величина угла между исходными прямыми (т.е. $\angle AOB$ в наших обозначениях) выражается рациональным числом градусов, то и длина прыжка блохи по окружности тоже выражается рациональным числом градусов, значит, в какой-то момент ее путь заиклится. В ином случае длина прыжка блохи по окружности составляет иррациональное число градусов и она все время будет попадать в новые точки, т.е. расстояние от блохи до точки O не может повториться три раза.

Статья Н.Б.Васильева «Последовательность прыжков» в «Кванте» № 11 за 1973 год посвящена другому подходу к задаче М190. Рекомендуем прочитать эту статью.

НАМ ПИШУТ

Как выглядит график синуса?

П. ПАНОВ

Необычный график функции $y = \sin(314x)$ я обнаружил в одной из студенческих работ по электротехнике, откуда его и позаимствовал (рис. 1). Конечно, так график синуса не может выглядеть ни в коем случае, и мы хотим разобраться в причинах этой аномалии, понять, в чем тут дело.

Прежде поясним, откуда в электротехнике берется функция $y = \sin(314x)$. На самом деле она, как чертик, выскакивает из каждой розетки. Всем известно, что в России частота сетевого напряжения составляет $f = 50$ Гц. После перехода к угловой частоте получаем $\omega = 2\pi f = 100\pi$ рад/с и после естественного

Рис. 1. «График» функции $y = \sin(314x)$ составлен из точек вида $(x_i; \sin(314x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$

округления имеем $\omega = 314$ рад/с. При этом зависимость напряжения от времени принимает вид $U(t) = 220 \sin(314t)$ В. Отбросив постоянный множитель и заменив t на x , получим ту самую функцию $y = \sin(314x)$.

Отметим, что рисунок 1 был построен в среде Mathcad. При этом предваряющая его строка означает, что функция $y = \sin(314x)$ вычисляется в точках x_i , $x_i = i \cdot 10^{-3}$, где i пробегает все целые от -10^4 до 10^4 , и сама картинка состоит из точек с координатами

$$(x_i; \sin(314x_i)).$$

Вроде бы это и есть стандартный способ поточечного построения графика функции. Но, несмотря на это, рисунок 1 все-таки выглядит слишком необычно, и мы должны дать ему адекватное объяснение.

Об округлении. В процессе перехода от частоты $f = 50$ Гц к циклической частоте мы округлили $10^2 \pi$ до целого и получили 314 – три первые цифры числа π , $\pi = 3,14159265\dots$ Давайте сделаем то же самое округление для других степеней 10. Пусть k_m – ближайшее целое к $10^m \pi$. Тогда

$$k_m = 10^m \pi + \delta_m,$$

где δ_m – некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$-0,5 < \delta_m < 0,5.$$

Вот несколько первых из этих пар чисел:

m	k_m	δ_m
0	3	-0,142...
1	31	-0,416...
2	314	-0,159...
3	3142	0,407...
4	31416	0,073...
5	314159	-0,265...
6	3141593	0,346...

Табл. 1. Здесь k_m – ближайшее целое к $10^m \pi$, $\delta_m = k_m - 10^m \pi$

Тут мы видим $k_2 = 314$, и можно сказать, что рисунок 1 – это попытка изображения графика функции $y = \sin(k_2 x)$. Давайте построим графики других функций $y = \sin(k_m x)$, может быть, мы увидим еще что-нибудь необычное.

Построение графиков. Для их размещения мы используем ту же самую таблицу 1, добавив к ней еще один столбец. Так же, как на рисунке 1, графики будут изображаться точками $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$.

Первый график $y = \sin(3x)$ в таблице 2 выглядит вполне узнаваемо. Следующий график $y = \sin(31x)$ выглядит достаточно объяснимо – высокочастотные колебания

заполняют почти что весь прямоугольник $[-10; 10] \times [-1; 1]$. При $m = 2$ мы имеем тот же самый рисунок 1, и это не график какой-либо функции, так же и при $m = 3$. А вот при $m = 4, 5, 6$ все это больше похоже на графики медленно меняющихся синусов, но совсем не на графики высокочастотных $\sin(3146x)$, $\sin(31459x)$ и $\sin(314593x)$.

m	k_m	δ_m	$y = \sin(k_m x)$
0	3	-0,142...	
1	31	-0,416...	
2	314	-0,159...	
3	3142	0,407...	
4	31416	0,073...	
5	314159	-0,265...	
6	3141593	0,346...	

Табл. 2. «Графики» функций $y = \sin(k_m x)$ составлены из точек $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$

Почему графики так странно выглядят?

Воспользовавшись тем, что $k_m = 10^m \pi + \delta_m$ и $x_i = i \cdot 10^{-3}$, преобразуем выражение $\sin(k_m x_i)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin(k_m x_i) &= \sin(10^m \pi x_i + \delta_m x_i) = \\ &= \sin(i \cdot 10^{m-3} \pi + \delta_m x_i). \end{aligned}$$

Это основная формула. Именно она позволяет дать все необходимые объяснения.

• Если $m > 3$, то $10^{m-3} \pi$ кратно 2π и мы имеем

$$\sin(k_m x_i) = \sin(\delta_m x_i).$$

Поэтому все графики для $m > 3$, приведенные в таблице 2, – это обычные графики медлен-

но меняющихся синусов $y(x) = \sin(\delta_m x)$. Напомним, что $|\delta_m| < 0,5$.

• Если $m = 3$, то $10^{m-3} = 1$. Отсюда

$$\sin(k_3 x_i) = \sin(i\pi + \delta_3 x_i),$$

и, в зависимости от четности i , точки $(i; \sin(k_3 x_i))$ поочередно лежат либо на графике функции $y(x) = \sin(\delta_3 x)$, либо на графике функции $y(x) = -\sin(\delta_3 x)$ и зарисовывают обе эти синусоиды. Что тоже соответствует таблице 2.

• Наконец, при $m = 2$ имеем $10^{m-3} = \frac{1}{10}$,

$$\begin{aligned} \sin(k_2 x_i) &= \sin\left(\frac{i}{10}\pi + \delta_2 x_i\right) = \\ &= \sin\left(\frac{i}{20}2\pi + \delta_2 x_i\right), \end{aligned}$$

и точка $(i; \sin(k_2 x_i))$, в зависимости от j – остатка при делении i на 20, лежит на одной из 20 медленно меняющихся синусоид $y(x) = \sin\left(\frac{j}{20}2\pi + \delta_2 x_i\right)$, $j = 0, \dots, 19$, что опять-таки соответствует таблице 2.

Так что рисунок 1 получил свое объяснение и, похоже, мы справились со своей задачей. Дополнительно мы выяснили, что при $m = 0$ видом графика $y = \sin(k_m x)$ управляет число k_m из второго столбца таблицы 2, а при $m > 3$ – число δ_m из третьего столбца.

Как график выглядит на самом деле? Насчет того, как на самом деле выглядит график функции $y = \sin(314x)$, трудно дать короткий и безусловный ответ. Я бы полагал, что на экране компьютера правильно построенный график этой функции, с учетом диапазона изменения $x \in [-10; 10]$, выбранного масштаба и пиксельной структуры экрана, должен заполнять целый прямоугольник.

Без вычислений. Добавим еще серию картинок (рис.2), которые позволяют понять происхождение рисунка 1 уже без всяких вычислений. На этих картинках над каждым из восьми отрезков $[-10; t]$, $t \in \{-9,99; -9,97; -9,8; -9,6; -9,4; -9; -8,6; -6\}$, двумя способами

Рис. 2. Графики функции $y = \sin(314x)$ над отрезками $[-10; t]$, построенные двумя способами

строится график функции $y = \sin(314x)$. Зеленым цветом рисуется непрерывная кривая, а красные точки так же, как на рисунке 1, имеют координаты $(i \cdot 10^{-3}; \sin(314 \cdot i \cdot 10^{-3}))$. На первых картинках можно сосчитать, что на каждом периоде синусоиды $y = \sin(314x)$ лежит 20 красных точек. С ростом t они сливаются в 20 медленно меняющихся синусоид.

На самом деле отдельные изображения на рисунке 2 – это кадры, вырезанные из видео «20 in 1» (см. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6e/20_in_1.webm).

Упражнения. И вот под конец еще несколько компьютерных упражнений на ту же самую тему. В каждом из них нужно построить некоторые графики и объяснить полученные результаты.

1. Заменим основание 10 основанием 3. Опре-

делим числа k_m и δ_m условиями $k_m = 3^m \pi + \delta_m$, $|\delta_m| < 0,5$, k_m – целое. Постройте графики функций $y = \sin(k_m x)$, используя точки $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 3^{-6}$, $i = -10 \cdot 3^6, \dots, 10 \cdot 3^6$.

2. На этот раз возьмем основание 2. Определим числа k_m и δ_m условиями $k_m = 2^m \pi + \delta_m$, $|\delta_m| < 0,5$, k_m – целое. Постройте графики функций $y = \sin(k_m x)$, используя точки $(x_i; \sin(k_m x_i))$, где $x_i = i \cdot 2^{-10}$, $i = -10 \cdot 2^{10}, \dots, 10 \cdot 2^{10}$.

3. А сейчас откажемся от округления. Постройте графики функций $y = \sin(10^m \pi x)$, используя

точки $(x_i; \sin(10^m \pi x_i))$, где $x_i = i \cdot 10^{-3}$, $i = -10^4, \dots, 10^4$.

4. До сих пор мы строили графики синусов по точкам. Но в компьютерной математике есть еще одна традиция, когда при построении графика на экран компьютера выводятся не отдельные точки, а целиком отрезки, соединяющие соседние точки, в нашем случае $(x_i; \sin(kx_i))$ и $(x_{i+1}; \sin(kx_{i+1}))$. Как будут выглядеть графики синусов из упражнения 2, построенные с помощью отрезков?

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ВЗМШ

ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГО-предметная школа (ВЗМШ) приглашает школьников и учителей из всех регионов России, ближнего и дальнего зарубежья для обучения по программам дополнительного дистантного (он-лайн) образования. ВЗМШ – старейший в России центр дополнительного образования. Она была основана в 1964 году по инициативе выдающихся математиков, академиков И.Г. Петровского (в то время ректора МГУ) и И.М. Гельфанда. Непрерывность образовательной традиции в сочетании с современными информационными технологиями позволяет ВЗМШ и поныне оставаться лучшей заочной школой страны.

Наши контакты

Сайт: <https://vzms.ru/>
VK: <https://vk.com/vzmsch>
Телефоны:

+7 (495) 939-39-30,
+7 (926) 280-28-20

Электронная почта: pk@vzms.ru (прием),
vzms2015@mail.ru (общая почта школы)
Адрес: 119234, Москва, Воробьевы горы,
МГУ, ВЗМШ (Второй учебный корпус, ауд. 307)

Мы учим математике, физике, информатике, биологии, филологии, истории, обществознанию.

Наши преподаватели – это сотрудники МГУ имени М.В.Ломоносова и других ведущих вузов и академических институтов. Ими написана обширная библиотека уникальных учебных пособий по математике, истории, обществознанию и другим предметам. Созданные ими методики позволяют вести заочное (он-лайн) обучение на самом высоком уровне.

Обучение старшеклассников в ВЗМШ направлено прежде всего на подготовку к олимпиадам и ЕГЭ. Однако мы считаем, что даже самая высокая оценка не может быть самоцелью. У нас занимаются прежде всего такие ученики, для которых на первом месте стоит саморазвитие, которые хотят знать СВЕРХ ТОГО, сверх школьной программы, и приобрести дополнительные знания по самым разным предметам.