Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Дориченко, Об укладке блинов, котлет и апельсинов,
Квант, 2020, номер 4, 38–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:17:57

занимает 2 секунды, выдох – 4 секунды, за которым следует 4-х секундная задержка дыхания. Всего цикл длится 10 секунд, укладываясь в 6 циклов в минуту.

В практике йоги правильным считается весьма продолжительный выдох с отношением длительности вдоха и выдоха 1 : 5. Утверждается, что йог в состоянии глубокой медитации может «обходиться» всего двумя-тремя циклами вдох-выдох в минуту. Первая реакция на это – не может быть! Но далее неожиданно выясняется, что очень редкое дыхание йогов может быть связано с повышенной ролью у них кожного дыхания.

И действительно, в этом что-то есть. Площадь кожи человека, покрытая 5 миллионами волосков, составляет $1,5-2 \text{ м}^2$. А суммарная площадь 600 миллионов альвеол в легких – около 100 м^2 . Грубо получается, что на уровне 1–2% кожа может выполнять дыхательную функцию. Измерения показали, что через кожу выделяется около 2% углекислого газа и поглощается примерно 1% кислорода. Более того, через кожу выводится из организма порядка 800 граммов водяных паров – даже больше, чем из легких!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Об укладке блинов, котлет и апельсинов

С. ДОРИЧЕНКО

СЕГОДНЯ КВАНТИК РЕШИЛ СЕРЬЕЗНО попрактиковаться в готовке. Сам он обычную пищу не ел, но друзей любил порадовать чем-нибудь вкусеньким.

– Начнем с блинов, – решил Квантик. С тестом проблем не возникло, но один блин так причудливо растекался по сковороде, что явно налез бы на другие после переворачивания (рис.1).

– Интересно, а поместятся ли блины, если я переверну их все?

Квантик любил сначала все продумать, а потом уже делать. Зачем пытаться уклады-

Рис. 1

вать перевернутые блины, если они, может, и не влезут? Сначала надо доказать теорему! Но запах подгорающего теста заставил Квантика действовать: он схватил такую же, но холодную сковороду и ловко опрокинул туда все блины, чтобы пока спокойно подумать. Чуть прилипшие блины перевернулись в воздухе целиком вместе с горячей сковородой, но тут же отлипли и аккуратно упали на холодную – румяной стороной вверх.

– Кажется, это было доказательство, – осенило Квантика. – Интересно, а если бы моя сковорода была треугольной? Для равностороннего треугольника все бы сработало, а вот для любого... пожалуй, не всегда. (А вы поняли, почему?)

Следующий блин Квантик сделал «математическим», в виде прямоугольника. Переворачивая его на другую сторону, Квантик немного не рассчитал, и прямоугольник завернулся, да так, что даже вылез за пределы сковороды (рис.2).

– Надо его хотя бы сдвинуть целиком на сковороду. Ой, а вдруг не влезет?

Времени на доказательство не было, и мысли в голове Квантика сменялись с бешеной скоростью.

Рис. 2

– И зачем мне понадобился блин именно в форме прямоугольника? А для другой формы понятнее, что ли, поместится ли загнутый блин? Может, это вообще от формы блина не зависит... Ну если не зависит, то любой, даже самый большой блин должен поместиться, если его загнуть. Стоп, самый большой блин – это же... вся сковорода! Но для нее ответ очевиден!

Квантик так удивился этой неожиданной мысли, что резко вдвинул блин на сковороду и погасил огонь.

– Ну конечно. Если загнуть по прямой блин размером со сковороду, меньшая часть целиком окажется внутри (под или над) большей, и загнутый блин точно влезет на сковороду! А если взять блин поменьше, он влезет после загиба и подавно (рис.3).

Рис. 3

Квантик решил, что хватит с него на сегодня блинов. Лучше сделать что-нибудь простое и понятное – вот, например, котлеты. Причем круглые и абсолютно одинакового размера. Приготовив фарш, Квантик быстро налепил котлет и стал как попало выкладывать их на разогретую сковороду. После шестой котлеты он обнаружил на столе оставшуюся седьмую, места для которой с виду уже не было. Квантик быстро сдвинул котлеты вплотную друг к другу и втиснул седьмую на край – получилось «тютелька в тютельку» (рис.4).

Рис. 4

– Повезло? Или если шесть влезло, то и семь влезет? – задумался Квантик. Пока котлеты жарились с одной стороны, он аккуратно сформулировал гипотезу.

Котлетная теорема. Пусть на круглой сковороде удалось поместить шесть одинаковых круглых котлет. Тогда на эту сковороду поместится и добавочная седьмая такая же котлета (возможно, для этого придется передвинуть предыдущие).

– Вроде бы ясно, что расположение в виде «ромашки», когда одна котлета в центре, а остальные вокруг, самое выгодное. Но как это доказать? Если одна котлета лежит точно по центру и есть место еще хоть для одной, то остальные шесть влезут – просто подряд по кругу. А если никакая котлета не лежит строго по центру? Никаких идей...

Квантик перевернул котлеты, думая дальше.

– Зайдем с другой стороны: какая сковорода нужна для семи котлет? Радиус котлеты, скажем, 1. Тогда для «котлетной ромашки» хватит сковороды с радиусом 3. Идея! Докажем, что если шесть котлет поместилось, то радиус сковороды не меньше 3.

Квантик убавил газ и накрыл котлеты крышкой.

– И что дальше? Надо как-то использовать, что котлеты не накладываются друг на друга. Ага, это значит, что расстояние между любыми двумя центрами котлет не меньше 2. А еще котлеты не вылезают за пределы сковороды – т.е. расстояние от ее края до центра любой котлеты не меньше 1. Иными словами, центры котлет лежат в круге радиуса на 1 меньше, чем у сковороды. Переформулируем-ка задачу:

Точки в круге. В круге лежат шесть точек, расстояния между любыми двумя из них не меньше 2. Тогда и радиус круга не меньше 2.

– Попробовать от противного? – подумал Квантик. – Пусть радиус круга меньше 2. Случай, когда какая-то точка в центре круга, разобран. А если все точки не в центре, а где-то вокруг? Соединю-ка их с центром.

Квантик погасил огонь, взял бумажку и карандаши и провел из центра круга шесть зеленых отрезков. Потом подумал немного и соединил «соседние» точки красными отрезками (рис.5). Получилось шесть треугольников.

Рис. 5

– Все зеленые отрезки короче 2. А все красные – не меньше 2. Тогда в каждом из шести треугольников красная сторона – самая длинная. А это значит...

Квантик чувствовал, что решение где-то совсем рядом. И тут он вспомнил, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

– ...это значит, что в каждом треугольнике угол против красной стороны строго самый больший. Тогда он по величине больше трети от суммы углов – от 180° – т.е. больше 60° . Стоп-стоп-стоп! А если я просто пройду по кругу – от одного зеленого отрезка к следующему и т.д. и вернусь в начало? Каждый зеленый угол точно будет больше 60° . Углов шесть, и тогда их сумма больше 360° – больше полного оборота! Противоречие!!!

Квантик, решив задачу, никогда не мог сразу остановиться. Вот и сейчас он еще какое-то время размышлял над последним шагом решения.

– А если бы радиус круга равнялся 2? Тогда красная сторона в каждом треугольнике снова самая длинная, но уже не строго – она может и равняться зеленому. Значит, угол против нее не меньше 60° .

А раз сумма шести углов между зелеными отрезками равна 360° , все они по 60° . Выходит, точки лежат на границе круга в вершинах правильного шестиугольника!

Квантик сформулировал доказанный факт:

Вторая котлетная теорема. Если на сковороде радиуса 3 лежат шесть котлет радиуса 1, возможны два случая. Первый: одна котлета лежит точно по центру, а остальные – по краям, касаясь центральной. Второй: шесть котлет лежат «ромашкой» с пустым центральным местом.

После всех этих котлетных теорем надо было передохнуть, и Квантик решил потренироваться в украшении стола. Он поставил на стол блюдо для фруктов – разумеется, математическое, в форме равностороннего треугольника – и стал выкладывать на него апельсины: тоже математические, т.е. абсолютно круглые и одинаковые. Апельсинов было девять, и на блюде осталось место еще ровно для одного, которого, увы, не было (рис.6).

Рис. 6

– Некрасиво, – подумал Квантик. – Переложу-ка по-другому, чтобы нехватка не бросалась в глаза.

Квантик долго укладывал апельсины в один слой, и так и эдак, и наконец пришел к тому, что верна

Апельсиновая теорема. Если блюдо в виде равностороннего треугольника рассчитано ровно на десять апельсинов (в один слой, вплотную друг к другу и краям), то, как туда ни клади девять апельсинов (в один слой), обязательно останется место и для десятого, даже если не сдвигать остальные.

– Вот тебе и отдых, – вздохнул Квантик. – Как подступиться к доказательству – совершенно неясно. Когда на блюде десять апельсинов, они – вернее, их центры – образуют красивую треугольную решетку. Но почему и девять никак по-другому не положишь – только в виде решетки с одним пропуском? Нарисую-ка эту решетку. Радиус апельсина возьму за 1.

Квантик изобразил апельсины кругами на плоскости – задача ведь фактически сводилась к этому плоскому варианту. У него получился большой треугольник, разделенный на меньшие, а блюдо и апельсины Квантик нарисовал пунктиром (рис.7).

Рис. 7

– Центры апельсинов отстоят от края блюда хотя бы на 1 и поэтому лежат в пределах треугольной решетки. Стороны маленьких треугольников равны 2. Тогда для центров такая задача получается:

Точки в треугольнике. Треугольник со стороной 6 разбит на маленькие треугольники со стороной 2 (см. рис. 7). В нем лежат девять точек, расстояния между любыми двумя точками не меньше 2. Докажите, что все точки лежат в вершинах маленьких треугольников (в узлах решетки).

– Что-то тут напоминает котлетную теорему... Ага, если откинуть три угла, остается шестиугольник – та же «ромашка»! Нарисую-ка его красным цветом (рис.8).

Рис. 8

Можно даже вокруг него невидимый круг описать радиуса 2. Но дальше-то что? У нас же теперь девять точек, а не шесть. Стоп! А что если шесть точек из девяти попадают в красный шестиугольник?

Вторая котлетная теорема! Ведь шесть точек лежат тогда в невидимом круге, а значит, либо одна точка в центре и пять – на краю круга, либо все шесть точек на краю. Но край круга пересекается с шестиугольником только в его вершинах! Значит, если шесть точек внутри шестиугольника – они все в узлах решетки.

Квантик перевел дух и продолжил разбираться.

– А сколько точек может быть снаружи шестиугольника, т.е. в трех «угловых» треугольниках? Ага, в каждом максимум по три, значит, всего трижды три – девять? Нет, я неправильно считаю. Ведь если точка на красной стороне углового треугольника, то она и в шестиугольнике тоже. А мне надо понять, сколько точек могут быть строго вне шестиугольника. В каждом угловом треугольнике такая точка... одна! Значит, вне шестиугольника – максимум три точки, а в шестиугольнике – минимум шесть. Ура!!! Ведь тогда эти шесть (или больше) точек лежат в узлах решетки. И в каждый угловой треугольник попадет хоть одна из них, поэтому и в угловых треугольниках точкам некуда деваться кроме узлов. Все доказано!

Квантик захотел узнать, не встречались ли раньше подобные задачи. Полазив по интернету, он выяснил, что некоторые из них печатались в «Кванте» и что автор задачи про блины – А.Абрамов, про загнутый прямоугольник – В.Произволов, про апельсины – Н.Долбинин, который, кстати, предлагал подумать над общим случаем – когда в блюде помещается не 10, а 15 апельсинов, 21 и т.д. (в виде треугольной решетки, но с большим количеством точек). Задача про котлеты оказалась глубоким фольклором – наверняка каждый математик, занимавшийся проблемой упаковки кругов в круге, ее знал (а «официальное» доказательство опубликовал в 1968 году Рональд Грэхем).

А еще Квантик нашел задачу М.Евдокимова из Турнира городов, которая очень ему понравилась:

Апельсины в кубе. В кубическую коробку поместили три одинаковых апельсина. Докажите, что в такую же пустую коробку можно поместить четыре таких же апельсина.

– Буду рассуждать по аналогии с предыдущими задачами, – решил Квантик. – Апель-

сины – это шары. Приму радиус шара за 1. Центры шаров отстоят от граней коробки хотя бы на 1, т.е. лежат в кубе со стороной на 2 меньше, чем у коробки. Друг от друга центры отстоят хотя бы на 2, значит, образуют треугольник, все стороны которого не меньше 2. Интересно, а в куб какого наименьшего размера можно поместить равносторонний треугольник со стороной 2?

Правдоподобный пример пришел в голову быстро: Квантик взял куб, у граней которого диагонали равны 2. Если раскрасить вершины такого куба

Рис. 9

в шахматном порядке, как на рисунке 9, любые три черные точки дадут как раз равносторонний треугольник со стороной 2, а все четыре черные точки – тетраэдр, все ребра которого равны 2.

Так что если поместить центры четырех шаров единичного радиуса в черные точки, шары не будут мешать друг другу. Сторона такого куба равна $\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора), а сами шары уместятся в кубическую коробку со стороной $\sqrt{2} + 2$ (два шара будут лежать на дне коробки «по диагонали», а сверху на них – еще два шара «по другой диагонали», как на рисунке 10).

Рис. 10

– Наверняка это и есть ответ, – подумал Квантик. – Осталось доказать теорему:

Треугольник в кубе. В кубе лежит треугольник, каждая сторона которого не меньше 2. Тогда сторона куба не меньше $\sqrt{2}$.

С этой теоремой Квантик мучился несколько часов. Решение вышло хитрое.

– Треугольник «широкий», он требует много места, – размышлял Квантик. – Одну его сторону я еще мог бы вместить в меньший куб – например, пустить ее вдоль главной диагонали куба. Но третья вершина уже вылезет наружу. Получается, как треугольник ни крути, он «длиннее» куба... Что это значит? «Длиннее» куба в каком-то направлении? «Длиннее» какого-то его ребра? Стоп, эту мысль надо обдумать.

Спустя какое-то время Квантику удалось перейти от туманных догадок к строгому рассуждению. На радостях он его даже записал. Вот оно:

«Пусть наш треугольник (обозначим его ABC) поместился в куб со стороной меньше $\sqrt{2}$. Рассмотрим три ребра куба, выходящие из одной вершины, и спроецируем треугольник ABC на эти ребра.

А именно, сначала возьмем одну сторону – скажем, AB – нашего треугольника и рассмотрим ее проекции на выбранные ребра. Проекция на одно ребро получается, если зажать AB между двумя плоскостями, перпендикулярными ребру: они и высекут на ребре проекцию. Проецируя на три ребра, мы проведем три пары параллельных плоскостей и фактически заключим AB в прямоугольный параллелепипед: его стороны x, y, z равны длинам проекций, а его главная диагональ – это AB (рис.11).

Рис. 11

По трехмерной теореме Пифагора, $x^2 + y^2 + z^2 = AB^2 \geq 4$ (ведь $AB \geq 2$). Проведем то же самое для BC и для AC , получаем: сумма квадратов проекций всех трех сторон треугольника не меньше 12.

Но эту же сумму можно подсчитать и «в другом порядке»: сначала спроецировать треугольник отдельно на каждое из трех ребер, а уже потом складывать. Проекция трех сторон треугольника на конкретное ребро будет состоять из трех отрезков, один из которых равен сумме двух других, $a = b + c$, как видно из рисунка 12: «крайние вершины» проецируются в концы отрезка длиной a , а «средняя» вершина – в точку, делящую его на части с длинами b и c .

При этом a не больше, чем длина ребра куба (так как треугольник лежит внутри куба), т.е. $a < \sqrt{2}$, откуда $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + (b + c)^2 = 2a^2 < 2 \cdot 2 = 4$. Значит, сумма квадратов проекций сторон на все три

Рис. 12

ребра меньше 12 – противоречие! Задача про апельсины решена».

А напоследок Квантик решил напомнить читателям еще несколько «кулинарных» задач со страниц «Кванта» и «Квантика».

Задачи

1. Печенья на противне. На прямоугольный противень помещается 100 круглых печений. Обязательно ли на такой же противень можно уложить 400 круглых печений в два раза меньшего радиуса?

2. Торт с глазурью. Квадратный торт облит сверху и по бокам глазурью. Разрежьте его на пять цельных кусков, в которых поровну и торта, и глазури.

3. Лишний апельсин (С.Посицельский, М.Семенова). В плоской коробке в один слой вплотную лежат одинаковые круглые апельсины –

Рис. 13

восемь рядов по пять штук в каждом (рис.13). Удастся ли поместить в коробку еще один такой апельсин?