Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Смирнов, Числовые фризy, *Квант*, 2020, номер 5, 15–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:33:06

Числовые фриз

Е. СМЕРНОВ

Фауст:

Так пентаграмма этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель:

Изволили ее вы плохо начертить,
И промежутки в уголку остался,
Там, у дверей, — и я свободно мог вскочить.

Фауст:

Да, случай над тобой удачно посмеялся.
Так ты мой пленник, стало быть?
Вот удалось нежданно-негаданно!

И.-В.Гете. Фауст (пер. Н.Холодковского)

Введение

Фризами называются таблицы, заполненные положительными числами в соответствии с некоторым мультипликативным правилом. Такие таблицы были впервые определены в 1970-х годах в работах Дональда Кокстера и Джона Конвея. Как и многое другое, что делали эти замечательные математики, фриз можно рассматривать как некоторую математическую забаву; она состоит в том, чтобы выписывать по некоторым правилам числа и смотреть на получающиеся закономерности.

Однако оказывается, что, несмотря на простоту их определения, фриз обладают рядом весьма неожиданных свойств. Они связаны со множеством других математических понятий, в числе которых — триангуляции многоугольников, числа Каталана и Фибоначчи, цепные дроби, ряды Фарея... Кроме того, оказалось, что фриз (так, конечно, тогда еще не называвшиеся) неявным образом возникали еще в работах К.-Ф.Гаусса и даже Дж.Непера — т.е. более 400 лет назад!

В XXI веке интерес к фризам среди математиков существенно вырос: выясни-

лось, что фриз возникают в теории кластерных алгебр, в связи с представлениями колчанов, многообразиями Грассмана, эллиптическими функциями, обобщенными ассоциациями и многими другими сюжетами из современной «серьезной» математики.

Первая русскоязычная публикация о фриз появилась в «Кванте» почти тридцать лет назад, в №3 за 1991 год — причем написана она была самим Конвеем. Этот двухстраничный текст содержал множество вопросов, над ответами на которые предлагалось подумать читателю. В послесловии от редакции было сказано: «Мы надеемся получить от вас письма с ответами на вопросы, поставленные Конвеем, и тогда вновь вернуться к числовым фризам». На часть вопросов Конвея к читателям «Кванта» мы отвечаем в этой статье.

11 апреля 2020 года Джон Хортон Конвей, один из самых удивительных и неординарных математиков нашего времени, скончался на 83-м году жизни. Посвящая этот текст его памяти.

Фриз малых порядков

Определение и первые свойства. Начнем с определения.

Определение 1. Назовем *фризом* порядка n таблицу (t_{ij}) , состоящую из $n-1$ бесконечной влево и вправо строки положительных чисел, расположенных в шахматном порядке, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- первая и последняя строки состоят из единиц: $t_{1j} = t_{n-1,j} = 1$;

b

- для любых четырех чисел a d в

c

вершинах единичного ромба верно равенство $ad - bc = 1$; это свойство будем называть *унимодулярностью*.

Назовем фриз *целочисленным*, если все числа t_{ij} целые.

Пример 1. На рисунке 1 приведен пример целочисленного фриза порядка 7 (такой фриз, как следует из определения, состоит из 6 строк).

...	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
...	2	1	4	2	1	3	2	2	1	...
...	3	1	3	7	1	2	5	3	1	...
...	1	2	5	3	1	3	7	1	3	...
...	2	1	3	2	2	1	4	2	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 1

Глядя на этот и другие примеры, можно отметить ряд замечательных свойств. Во-первых, такой фриз оказывается периодичным с периодом n – т.е. можно считать его нарисованным на цилиндре. Во-вторых, этот фриз дополнительно обладает скользящей симметрией: если перевернуть его вверх ногами и сдвинуть вбок на три с половиной позиции, он совпадет с исходным.

Наконец, фриз, очевидно, определяется своими первыми двумя строками (единичной и первой нетривиальной). Так вот, почему-то оказывается, что если все элементы второй строки будут целыми числами, то и все остальные элементы фриза являются целыми. Это совершенно неочевидно из определения: из условия уни-

модулярности для ромба a d следует,

что $c = \frac{ad-1}{b}$, т.е. для вычисления элементов приходится использовать деление – и тем не менее, результат этого деления почему-то всегда оказывается целым числом. Наша ближайшая цель – разобраться с этими феноменами.

Фризы порядков 3 и 4. Посмотрим, как могут быть устроены фризы малых порядков. При $n = 3$ фриз состоит из двух строк, т.е. фриз порядка три единственен (рис.2).

...	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Рис. 2

Далее, фризы порядка 4 имеют такой вид, как на рисунке 3. Условие унимодулярности равносильно тому, что произведение

...	1	1	1	1	...
...	a	b	c	d	...
...	1	1	1	1	...

Рис. 3

любых двух элементов во второй строке равняется 2. Поэтому такой фриз имеет такой вид, как на рисунке 4, где $ab = 2$. В частности, целочисленных фризов порядка 4 будет два: один будет отвечать ситуации, когда $a = 2$ и $b = 1$, а другой – когда $a = 1$ и $b = 2$. Среди нецелочисленных фризов (рис.5) отметим такой:

...	1	1	1	1	...
...	a	b	a	b	...
...	1	1	1	1	...

Рис. 4

...	1	1	1	1	...
...	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	...
...	1	1	1	1	...

Рис. 5

Замечание 1. Заметим, что фризы порядка 4 периодичны с периодом 2, а не 4 (а период последнего фриза и вовсе равен 1). Это связано с наличием скользящей симметрии: если перевернуть фриз вверх ногами и сдвинуть на половину периода, он совпадет с исходным.

Фризы порядка 5. Такие фризы удобно восстанавливать не по верхней строке, а по диагонали. Рассмотрим фриз, показанный на рисунке 6. Выразим все его значения последовательно через x и y . Мы получим, что

...	1	1	1	1	...
...	x	z	v	t	...
...	y	u	w	...	...
...	1	1	1	1	...

Рис. 6

$$z = \frac{1+y}{x}; \quad u = \frac{1+z}{y} = \frac{1+x+y}{xy};$$

$$v = \frac{1+u}{z} = \frac{1+x+y+xy}{xy} \cdot \frac{x}{1+y} = \frac{1+x}{y};$$

$$w = \frac{1+v}{u} = \frac{1+x+y}{y} \cdot \frac{xy}{1+x+y} = x;$$

$$t = \frac{1+w}{v} = (1+x) \cdot \frac{y}{1+x} = y.$$

Мы опять получили x и y , но уже на другой диагонали. Видим, что фриз снова получа-

ется периодичным с периодом 5, и он вновь обладает скользящей симметрией.

Упражнения

1. Перечислите все целочисленные фризы порядка 5. Сколько их?

2. Рассмотрим фриз порядка 5, у которого $x = y = \tau$. Покажите, что $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и найдите остальные элементы этого фриза.

Фриз из упражнения 2 получается путем применения к правильному пятиугольнику *теоремы Птолемея*. Эта теорема из школьного курса планиметрии гласит, что для вписанного четырехугольника $ABCD$ верно равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Действительно, рассмотрим правильный

Рис. 7

пятиугольник, все стороны которого равны 1 (рис.7). Пусть его диагональ равна τ . Запишем теорему Птолемея для равнобокой трапеции $ABCD$; в этой трапеции $AB = BC = CD = 1$, $AD = AC = BD = \tau$. Мы получим уравнение $1 \cdot \tau + 1 \cdot 1 = \tau \cdot \tau$, т.е. $\tau^2 - \tau - 1 = 0$.

Положительный корень этого уравнения как раз равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; это знаменитое *золотое сечение*.

Упражнение 3. Рассмотрим правильный n -угольник со стороной 1 и многократно применим к нему теорему Птолемея. Какой фриз порядка n мы получим? Чему равны элементы в его k -й строке?

Pentagramma mirificum. Впервые фриз порядка 5 появились в связи со сферической тригонометрией в работах Натаниэла Тарпорли¹ и Джона Непера². Даль-

¹ Nathaniel Torporley (Torporley) (1564–1632) – английский математик, астроном и астролог. Некоторое время работал во Франции секретарем Франсуа Виета.

² John Napier (1550–1617) – шотландский математик. Известен как изобретатель логарифмов и десятичной точки.

"This uniformitie of the Circular parts, most manifestly appeareth in right-angle triangles made on the superficies of a globe, of five great circles, the first whereof cutteth the second, the second the third, the third the fourth, the fourth the fifth: and lastly, the fifth the first, at right angles. But all the other Sections shall bee made at oblique angles."

Рис. 8. *Pentagramma mirificum*. Справа рисунок из работы Непера (1614 г.)

нейшее развитие они получили в работах Карла-Фридриха Гаусса. Их появление было связано со следующей задачей сферической геометрии.

Рассмотрим пятиконечную звезду на сфере, все углы которой являются прямыми (рис.8). В частности, это значит, что точка A' является полюсом для большого круга CD , B' – для DE и т.д.

Обозначим через $\alpha, \dots, \varepsilon$ квадраты тангенсов длин сторон пятиугольника:

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{tg}^2 B'E', \beta = \operatorname{tg}^2 E'C', \gamma = \operatorname{tg}^2 A'C', \\ \delta &= \operatorname{tg}^2 A'D', \varepsilon = \operatorname{tg}^2 D'B'.$$

Оказывается, что эти пять величин связаны следующими соотношениями, позволяющими получить по любым двум из них остальные три:

$$\begin{aligned}1 + \alpha &= \gamma\delta; 1 + \beta = \delta\varepsilon; 1 + \gamma = \varepsilon\alpha; \\ 1 + \delta &= \alpha\beta; 1 + \varepsilon = \beta\gamma.\end{aligned}\quad (*)$$

Таким образом, эти величины являются элементами следующего фриза (рис.9) порядка 5.

...	1	1	1	1	1	...
...	α	β	γ	δ	ε	...
...	δ	ε	α	β	γ	...
...	1	1	1	1	1	...

Рис. 9

Упражнение 4. Используя соотношения (*), докажите следующее равенство (также принадлежащее Гауссу):

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon &= 3 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \\ &= \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Это равенство в работе Гаусса названо *schöne Gleichung*, т.е. «красивым тождеством».

...	1		1		1		1		1	...
...	a_1		a_2		a_3		a_4	...		
	$v_2(a_1, a_2)$				$v_2(a_2, a_3)$		$v_2(a_3, a_4)$	...		
		$v_3(a_1, a_2, a_3)$				$v_3(a_2, a_3, a_4)$				
			$v_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$							

Рис. 10

Континуанты

Рекуррентное соотношение. Теперь перейдем к фризам произвольного порядка. Наша ближайшая цель – получить выражение для элементов третьей и последующих строк фриза через элементы второй строки.

Пусть дан фриз со второй строкой $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$. Ясно, что каждый из элементов третьей строки выражается через два элемента второй строки, стоящие непосредственно над ним (слева и справа). Далее, каждый элемент четвертой строки можно найти по правилу унимодулярности уже через *три* стоящих над ним элемента второй строки и так далее. Обозначим элементы третьей, четвертой и т.д. строк через $v_2(a_i, a_{i+1})$, $v_3(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$ и т.д., как показано на рисунке 10.

Нетрудно найти выражение для элементов третьей строки:

$$v_2(a_1, a_2) = a_1 a_2 - 1, \quad v_2(a_2, a_3) = a_2 a_3 - 1,$$

а из них уже выразить элементы четвертой:

$$v_3(a_1, a_2, a_3) = (v_2(a_1, a_2)v_2(a_2, a_3) - 1)/a_2 = \\ = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3,$$

пятой:

$$v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \\ = (v_3(a_1, a_2, a_3)v_3(a_2, a_3, a_4) - 1)/v_2(a_2, a_3) = \dots \\ \dots = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1,$$

шестой:

$$v_5(a_1, \dots, a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - \\ - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$$

(проделайте эти вычисления самостоятельно!).

Внимательно посмотрев на эти выражения, можно заметить закономерность, которой они подчиняются.

Коды Морзе.

Рассмотрим n расположенных в ряд точек, которые занумеруем переменными

$a_1, \dots, a_n$. Теперь соединим между собой какие-нибудь пары соседних точек, с условием, что каждую точку можно соединить не более чем с одной соседней. Мы получим «код Морзе» из точек и тире – конфигурацию наподобие изображенной на рисунке 11.

Рис. 11

Такой конфигурации сопоставим моном (т.е. одночлен): произведение переменных, которые стоят в *точках* (не соединенных с соседними), взятое со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от четности числа *тире*. Будем называть этот моном *весом* кода Морзе c и обозначать через $w(c)$. Так, конфигурации рисунка 11 будет отвечать выражение

$$w(c) = (-1)^2 a_3 a_4 a_7 = a_3 a_4 a_7$$

Пример 2. Все коды Морзе и соответствующие им мономы при n от 1 до 5 представлены в таблице на рисунке 12.

Определение 2 (правило Эйлера). *Континуантой* $V_n(a_1, \dots, a_n)$ *порядка* n называется сумма одночленов, соответствующих всевозможным кодам Морзе на n вершинах.

Замечание 2. Положим континуанту нулевого порядка (не зависящую от каких-либо аргументов) равной $V_0 = 1$. Более того, иногда бывает удобно считать, что $V_n = 0$, если n отрицательно.

Таблица (см. рис.12) позволяет нам вычислять континуанты порядков, не превосходящих 5. Мы видим, что у нас получаются в точности те же выражения, что и для $v_n(a_1, \dots, a_n)$. Вскоре мы докажем это утверждение, но сначала установим еще некоторые свойства континуант. Начнем с рекуррентного соотношения.

$n = 1$	о	a_1
$n = 2$	о о о — о	$a_1 a_2$ -1
$n = 3$	о о о о о — о о — о о	$a_1 a_2 a_3$ $-a_1$ $-a_3$
$n = 4$	о о о о о о о — о о о — о о о — о о о о — о о — о	$a_1 a_2 a_3 a_4$ $-a_1 a_2$ $-a_1 a_4$ $-a_3 a_4$ 1
$n = 5$	о о о о о о о о о — о о о о — о о о о — о о о о — о о о о о о — о о — о о — о о о — о о — о о — о о	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ $-a_1 a_2 a_3$ $-a_1 a_2 a_5$ $-a_1 a_4 a_5$ $-a_3 a_4 a_5$ a_1 a_3 a_5

Рис. 12. Коды Морзе при $n \leq 5$

Предложение 1. *Континуанты удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_3, \dots, a_n). (**)$$

Доказательство. Возьмем какой-нибудь код Морзе на n вершинах. Посмотрим на первую вершину. Возможны два варианта. Либо ей отвечает точка, и тогда всякая конфигурация s получается как код Морзе s' на вершинах $2, \dots, n$; при этом $w(s) = a_1 w(s')$, поскольку в коде s первая вершина учитывается, а в конфигурации s' нет. Либо же, напротив, первая вершина соединена со второй при помощи тире; в таком случае обозначим код Морзе на вершинах $3, \dots, n$ через s'' , а веса кодов s и s'' отличаются знаком: $w(s) = -w(s'')$.

Стало быть, все коды, начинающиеся с точки, дадут в континуанту $V_n(a_1, \dots, a_n)$ вклад, равный $a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$, а все начинающиеся с тире — вклад, равный $-V_{n-2}(a_3, \dots, a_n)$. Это и дает нам искомое соотношение (**).

Дальнейшие свойства континуант мы оставим в качестве упражнения для читателя.

Упражнение 5. Докажите следующие равенства:

- (1) $V_n(a_1, \dots, a_n) = V_n(a_n, \dots, a_1)$;
- (2) $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$;
- (3) $V_n(a_1, \dots, a_n) = a_n V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2})$.

Соотношение унимодулярности для континуант. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых $a_1, \dots, a_{n+1}$ имеет место соотношение*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1.$$

Мы приведем два доказательства этой теоремы, алгебраическое и комбинаторное.

Алгебраическое доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по n . База, при $n = 1$, очевидна.

Запишем требуемое соотношение для n и перепишем все члены, в которые входит a_{n+1} , с помощью равенства (3) из упражнения 5:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1} V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}); \\ V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда соотношение перепишется в виде} \\ V_n(a_1, \dots, a_n) (a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})) = \\ = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) (a_{n+1} V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})) + 1. \end{aligned}$$

В левой и правой частях нашего равенства встречается слагаемое $a_{n+1} V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_n(a_1, \dots, a_n)$; уничтожив его, получим равенство

$$\begin{aligned} -V_n(a_1, \dots, a_n) V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) = \\ = -V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) + 1, \end{aligned}$$

которое имеет место по предположению индукции. Теорема доказана.

Комбинаторное доказательство. Рассмотрим каждую из континуант в левой части соотношения как сумму мономов, отвечающим кодам Морзе на множествах $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n+1\}$ соответственно. Будем изображать эти коды Морзе на

одном рисунке, только относящиеся к первому коду тире будем изображать пунктирными линиями, а ко второму – сплошными, как показано на рисунке 13. Таким

Рис. 13

образом, пунктирные тире могут стоять на всех возможных местах, кроме последнего, а сплошные – на всех, кроме первого. Тогда левая часть доказываемого соотношения равна сумме мономов, полученным по всевозможным парам кодов Морзе с такими условиями.

Сделаем то же для произведения континуант в правой части: каждое произведение мономов из $V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$ и $V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ можно интерпретировать как пару кодов Морзе на множестве $\{1, \dots, n+1\}$ – причем первый код (будем его обозначать пунктирными тире) не может иметь тире на первой и последней позициях, а на второй (обозначим его сплошными тире) никаких ограничений не накладывается.

Рассмотрим какую-либо конфигурацию (c_1, c_2) , где c_1 и c_2 – коды Морзе на $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n+1\}$ соответственно. Ей отвечает моном $w(c_1)w(c_2)$ из левой части равенства. Построим по ней новую конфигурацию (c'_1, c'_2) , где c'_1 будет кодом Морзе на $\{1, \dots, n+1\}$, а c'_2 – кодом на $\{2, \dots, n\}$.

Если между 1 и 2 в коде c_1 нет (пунктирного) тире, то c_1 можно рассматривать как код на вершинах $2, \dots, n$. В то же время код из сплошных тире c_2 можно рассматривать как код на вершинах $1, \dots, n+1$, у которого на первом месте нет тире. В таком случае положим $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2)$.

Пусть теперь вершины 1 и 2 соединены входящим в код c_1 пунктирным тире. Поскольку в код c_2 входят вершины, начинающиеся со 2-й, то между вершинами 1 и 2 нет сплошного тире. Построим по паре кодов (c_1, c_2) пару кодов (c'_1, c'_2) следующим образом: рассмотрим путь, выходящий из 1-й вершины и состоящий из пунктирных и сплошных тире. Ясно, что они могут только чередоваться. Заменим в нем каждое пунктирное тире на сплошное, а сплошное на пунктирное. Мы получим

новую пару кодов (c'_1, c'_2) , у которой на первом месте стоит сплошное тире и нет пунктирного. Эта пара будет иметь тот же вес, что и (c_1, c_2) .

На рисунке 14 показана пара кодов, которые получаются такой операцией из

Рис. 14

изображенных на рисунке 13. При этом пара (c'_1, c'_2) будет «почти всегда» отвечать моному из правой части. Далее, эту процедуру «почти всегда» можно обратить: по «почти» каждой паре кодов (c'_1, c'_2) можно единственным образом восстановить ту пару (c_1, c_2) , по которой она построена, причем веса этих пар будут равны.

Осталось разобраться с тем, что значит слова «почти всегда». Здесь нужно будет рассмотреть два случая: когда n четно и когда оно нечетно.

Пусть n четно. Тогда единственная конфигурация (c_1, c_2) , для которой описанная процедура не сработает (т.е. подходящего монома в правой части не найдется), будет иметь вид, как

Рис. 15

все вершины будут соединены чередующимися пунктирными и сплошными тире, причем и первое и последнее тире будут пунктирными (число вершин четно, значит, число тире между ними нечетно), а вес конфигурации (c_1, c_2) будет равен $(-1)^{n-1} = -1$. Поэтому произведение континуант в левой части равенства будет на 1 меньше, чем произведение континуант в правой части.

Если же, напротив, число вершин нечетно, то у каждой конфигурации (c_1, c_2) будет единственный образ (c'_1, c'_2) – и найдется ровно одна конфигурация из правой части, у которой не будет прообраза. Она изображена на рисунке 16. В таком

Рис. 16

случае произведение континуант в правой части будет опять-таки на 1 больше, чем произведение континуант в левой части.

Целочисленность фризов. Из результатов предыдущего подраздела немедленно получается следующий результат.

Теорема 2. *Элемент $(n + 1)$ -й строки фриза, над которым во второй строке стоят числа $a_1, \dots, a_n$, равняется континуанте $V_n(a_1, \dots, a_n)$.*

Эта теорема сразу объясняет отмеченный нами выше «феномен целочисленности» – то, что все элементы фриза с целочисленной второй строкой $(a_1, a_2, \dots)$ оказываются целыми числами, хотя, казалось бы, чтобы их вычислить, приходится совершать деление.

Следствие 1. *Фриз, элементы второй строки которого целые положительные числа, является целочисленным.*

Действительно, континуанта – это многочлен от $(a_1, a_2, \dots)$ с целыми коэффициентами.

Восстановление второй строки по диагонали. Итак, мы нашли способ вычислять диагональ фриза, зная вторую строку: это делается с помощью континуанты. Решим теперь обратную задачу: найдем (в обозначениях рисунка 10) вторую строку $a_1, \dots, a_n$, зная диагональ $v_2, \dots, v_{n-1}$.

Это непосредственно следует из рекуррентного соотношения для континуант. Следующая теорема – просто переформулировка предложения 1.

Теорема 3. *Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots$ – вторая строка фриза, $v_1 = a_1, v_2, v_3 \dots$ – его диагональ. Тогда имеют место равенства*

$$a_k = \frac{v_{k-2} + v_k}{v_{k-1}}.$$

(Напомним, что мы формально полагаем $v_0 = 1, v_{-1} = 0$ – тогда эта формула применима при любых $k > 0$).

Иногда эту теорему полезно формулировать в таком виде:

Следствие 2. *Последовательность v_k является решением разностного уравнения («уравнения Хилла», или «дискретного уравнения Штурма–Лиувилля»)*

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2},$$

где $a_1, a_2, \dots$ – коэффициенты, $V_1, V_2, \dots$ – неизвестные.

Периодичность и скользящая симметрия. Рассмотрим фриз порядка n . Напомним, что такой фриз состоит из $n - 1$ строки; последняя его строка состоит из единиц, а «следующая за последней», т.е. n -я, состоит из нулей. Таким образом, для его диагонали $1, v_1, \dots, v_{n-1}$ имеют место равенства

$$v_{n-2} = 1; \quad v_{n-1} = 0.$$

Запишем последнее из рекуррентных соотношений. Оно имеет вид

$$v_{n-1} = a_{n-1}v_{n-2} - v_{n-3}, \text{ т.е. } v_{n-3} = a_{n-1}.$$

Итак, мы получаем, что предпоследний ненулевой элемент диагонали V_{n-3} равняется элементу a_{n-1} из второй строки. Аналогично, следующий за ним в строке элемент равняется элементу a_n . Получается, что предпоследняя ненулевая строка фриза совпадает со второй, сдвинутой на $n/2$ позиций, и фриз имеет такой вид, как показано на рисунке 17.

...	1		1		1		1		1		...
	...	a_1		a_2		a_3		a_4		...	
		...	v_2	...							
			...	v_3	...						
				...	...						
					...	a_{n-1}		a_n		...	
					...	1		1		1	...

Рис. 17

А значит, из условия унимодулярности получается, что фриз можно строить не от второй строки вниз, а от предпоследней – вверх, и результат будет тем же.

Следствие 3. *Фриз порядка n обладает скользящей симметрией: его k -я строка, сдвинутая на $n/2$ позиций, совпадает с $(n - k)$ -й строкой.*

Следствие 4. *Фриз порядка n является периодичным с периодом n .*

В самом деле, сдвиг фриза на n является результатом применения двух скользящих симметрий со сдвигом на $n/2$.

Целочисленные фриз

Сущность целочисленного фриза. В этом разделе мы опишем все фриз, состоящие исключительно из целых элементов.

Будем называть *сущностью* (по-английски quiddity) фриза его вторую строку

$(a_1, \dots, a_n)$. Очевидно, она не может содержать двух единиц подряд – это противоречило бы унимодулярности. Однако оказывается, что хотя бы одна единица в этой строке обязательно должна быть.

Предложение 2. *Вторая строка целочисленного фриза обязательно содержит 1.*

Доказательство. Предположим, что это не так и что найдется фриз, все элементы во второй строке которого отличны от 1: $a_k \geq 2$. Тогда для элементов его диагонали (скажем, первой) имеет место неравенство

$$v_k = a_k v_{k-1} - v_{k-2} \geq 2v_{k-1} - v_{k-2},$$

откуда

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2}.$$

Но это верно для всех k . Стало быть,

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2} \geq \dots \geq v_2 - v_1 = \\ = a_2 - 1 \geq 1,$$

т.е. последовательность v_k строго возрастающая. Это противоречит тому, что в какой-то момент она в силу замкнутости фриза должна принять значение 1 (и тем более 0).

Следующая лемма позволит нам делать из данного целочисленного фриза порядка n новый фриз порядка $n + 1$.

Лемма. Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ – сущность целочисленного фриза порядка n , и $1 \leq k \leq n$. Тогда:

(1) набор $(a_1, \dots, a_{k-1} + 1, a_k + 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ является сущностью целочисленного фриза порядка $n + 1$;

(2) если $1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ – первая диагональ исходного фриза и $v_1 = a_1$, то соответствующая диагональ нового фриза имеет вид

$$1, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1} + v_k, v_k, \dots, v_{n-2}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства пункта (2). Посмотрим, как будет устроена первая диагональ нового фриза: обозначим ее через $1, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Ясно, что при $i \leq k - 2$ диагонали этих двух фризсов совпадают: $w_i = v_i$. При этом на $(k - 1)$ -м месте нового фриза будет стоять

$$w_{k-1} = (a_{k-1} + 1)v_{k-2} - v_{k-3} = v_{k-1} + v_{k-2}.$$

Далее,

$$w_k = w_{k-1} - w_{k-2} = v_{k-1} + v_{k-2} = v_{k-1}.$$

Следующий элемент диагонали будет равен

$$w_{k+1} = (a_k + 1)w_k - w_{k-1} = \\ = (a_k + 1)v_{k-1} - v_{k-1} - v_{k-2} = \\ = a_k v_{k-1} - v_{k-2} = v_k.$$

При всех $j > k + 1$ будет иметь место равенство $w_j = v_{j-1}$. В частности, $(n - 2)$ -й и $(n - 1)$ -й члены этой последовательности будут равны 1 и 0 соответственно, т.е. фриз оборвется – а диагональ будет содержать n положительных элементов. То же самое рассуждение применимо и к любой другой диагонали. Стало быть, в результате такой вставки получится целочисленный фриз на единицу большего порядка. Часть (1) также доказана.

Замечание 3. Эта конструкция очевидным образом является обратимой: если $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ – сущность целочисленного фриза, то и $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$ будет сущностью фриза на единицу меньшего порядка (обратите внимание, что в силу отсутствия двух единиц подряд оба числа $b_{k-1} - 1$ и $b_{k+1} - 1$ положительны).

Фризы и триангуляции. Рассмотрим выпуклый n -угольник с пронумерованными вершинами. Его *триангуляцией* будем называть его разбиение на треугольники с помощью диагоналей, не пересекающихся нигде, кроме вершин.

Замечание 4. Число триангуляций n -угольника называется $(n - 2)$ -м числом Каталана (это одно из их многочисленных эквивалентных определений). Для него справедлива формула $C(n) = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$. О числах Каталана можно прочесть во многих книгах по комбинаторике; также о них неоднократно писал «Квант» – см., например, статью Мартина Гарднера в №7 за 1978 год.

Рассмотрим произвольную триангуляцию n -угольника. Ей можно сопоставить

набор чисел $(c_1, \dots, c_n)$, где c_i – число треугольников, сходящихся в n -й вершине. Будем называть такой набор *сущностью триангуляции*. Триангуляция однозначно восстанавливается по своей сущности (почему?).

Теорема 4 (теорема Конвея–Кокстера). *Набор $(c_1, \dots, c_n)$, построенный по триангуляции n -угольника, является сущностью целочисленного фриза порядка n ; это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между триангуляциями n -угольника и целочисленными фризами n -го порядка.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему по индукции по n . База $n=3$ очевидна: имеются лишь одна триангуляция треугольника и единственный фриз 3-го порядка с сущностью $(1, 1, 1)$. (Читатель, которого это не убеждает, может начать с $n=4$.)

Рассмотрим некоторую триангуляцию n -угольника. Выберем в ней «ухо» – вершину, примыкающую к единственному треугольнику (в силу принципа Дирихле таких вершин не менее двух). Пусть эта вершина имеет номер k , а в вершинах $k-1$ и $k+1$ сходятся b_{k-1} и b_{k+1} треугольников соответственно. Таким образом, сущность этой триангуляции имеет вид $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$. Выбросим треугольник, примыкающий к k -й вершине, из этой триангуляции, получим триангуляцию $(n-1)$ -угольника, сущность которой равна $(\dots, b_{k-1}-1, b_{k+1}-1, \dots)$. Эта триангуляция, по предположению индукции, определяет фриз с той же сущностью. Но по лемме из предыдущего подраздела тогда и набор $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ определяет целочисленный фриз.

Взаимная однозначность полученного соответствия следует из замечания 3: из сущности каждого фриза порядка n можно удалить единицу, сведя дело к фризу на единицу меньшего порядка.

Восстановление фриза по триангуляции. Теорема Конвея–Кокстера утверждает, что каждый элемент второй строки фриза – это количество треугольников, сходящихся при соответствующей верши-

не триангуляции. А как восстановить остальные элементы фриза? В чем их комбинаторный смысл?

Пусть дан целочисленный фриз, который мы будем обозначать в соответствии с рисунком 10: его вторая строка равна $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, а через $v_0 = 1, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ обозначены элементы диагонали, начинающейся в a_1 , т.е. $v_1 = a_1$. Удобно также считать, что $v_{-1} = 0$.

Рассмотрим триангуляцию n -угольника, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n , с сущностью $(a_1, \dots, a_n)$. По ней можно восстановить $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ посредством следующего алгоритма:

- напишем в вершинах 1 и 2 числа 0 и 1 соответственно;
- далее расставим числовые отметки во всех остальных вершинах многоугольника по такому правилу: для каждого треугольника, в двух вершинах которого уже стоят числа a и b , поставим в третьей его вершине число $a+b$.

Упражнение 6. Докажите, что во всех вершинах, соединенных с первой вершиной диагональю или стороной, будут написаны единицы.

Предложение 3. *Полученная по этому алгоритму отметка в i -й вершине будет равна элементу v_{i-2} диагонали фриза.*

Доказательство. Данной триангуляции n -угольника сопоставим двойственный граф на $n-2$ вершинах: вершины его будут соответствовать треугольникам из триангуляции, причем две вершины будут соединены ребром, если у двух треугольников имеется общая сторона. Такой граф является деревом, валентности всех его вершин не превосходят трех, а висячие вершины отвечают «ушам» триангуляции (рис.18).

Рис. 18. Триангуляция и отвечающее ей дерево

Далее, запись чисел в вершинах треугольников в соответствии с нашим алгоритмом можно рассматривать как обход вершин дерева, отвечающего триангуляции: на первом шаге алгоритма мы берем треугольник, содержащий вершины 1 и 2, и записываем число в его третьей вершине (для первого шага это число будет единицей). Сделав это, отметим отвечающую этому треугольнику вершину дерева как посещенную.

На каждом следующем шаге мы рассматриваем какую-то вершину, смежную с уже посещенными; ей отвечает треугольник, в двух вершинах которого уже стоят какие-то числа. Записав в третьей вершине треугольника их сумму, отметим как посещенную вершину дерева, которая отвечает этому треугольнику.

Докажем наше предложение по индукции по n . База при $n = 3$ очевидна: мы получаем треугольник, в вершинах которого записаны 0, 1 и 1. Он отвечает единственному фризу порядка 3.

Индуктивный переход: пусть наше предложение доказано для всевозможных триангуляций n -угольника, а мы хотим доказать его для $(n + 1)$ -угольника. Посмотрим на последний шаг алгоритма; в его ходе мы обязаны посетить какую-то висячую вершину дерева триангуляции, т.е. добавить к триангуляции n -угольника «ухо». Пусть данный n -угольник имеет сущность $(a_1, \dots, a_n)$, а «ухо» на последнем шаге приклеивается к стороне $(k - 1, k)$. По предположению индукции, построенный в ре-

зультате выполнения алгоритма набор отметок в вершинах $(v_0, \dots, v_{n-1})$ будет стоять на диагонали фриза с сущностью $(a_1, \dots, a_n)$. Далее, на последнем шаге между вершинами $k - 1$ и k будет добавлена вершина с отметкой $v_{k-1} + v_k$. При этом триангуляция $(n + 1)$ -угольника будет иметь сущность $(\dots, b_{k-1} + 1, 1, b_k + 1, \dots)$ — что согласуется с результатом леммы об элементах фриза. Предложение доказано.

Упражнения

7. Рассмотрим триангуляцию n -угольника, все диагонали которой образуют зигзаг (иными словами, все элементы сущности этой триангуляции не превосходят 3). Докажите, что все элементы соответствующего фриза будут числами Фибоначчи.

8. Пусть в триангуляции есть вершина, где сходятся не менее 4 треугольников. Докажите, что соответствующий фриз содержит число 4.

Замечание 5. Большинство результатов из этого раздела можно найти в двух работах Дж.Конвея и Д.Кокстера «Triangulated polygons and frieze patterns». Эти работы, опубликованные в двух последовательных номерах журнала *The Mathematical Gazette* (57(400, pp. 87–94; 401, pp. 175–183), 1973), посвященного вопросам математического образования, по форме представляют собой привычный ученикам математических кружков и классов листок с задачами. В первой статье ряд утверждений о фризах сформулирован в виде последовательности из примерно трех десятков задач, а во второй статье приводятся их решения или достаточно подробные указания.

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» — 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>