Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Даниярходжаев, Вокруг правильного пятиугольника,
Квант, 2020, номер 5, 37–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20200504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:05:42

одинаковые тонкие проволоочки. Для левой фигуры индуктивность равна L_1 , а для средней фигуры она равна L_2 . Какова индуктивность для правой фигуры?

Пусть ток, текущий по проволочке, равен I . Обозначим поток вектора магнитной индукции, который создает один шестиугольник в самом себе, через Φ_0 , а поток, созданный им же, но в соседнем шестиугольнике, через Φ_1 . Тогда для указанных в условии задачи индуктивностей и для

искомой индуктивности L_3 потоки будут такими:

$$IL_1 = 3\Phi_0 - 6\Phi_1, \quad IL_2 = 2\Phi_0 - 2\Phi_1, \quad IL_3 = \Phi_0.$$

Отсюда можно найти выражение для Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{3IL_2 - IL_1}{3} = I \left(L_2 - \frac{L_1}{3} \right),$$

а значит, и для L_3 :

$$L_3 = L_2 - \frac{L_1}{3}.$$

С.Варламов

ВОКРУГ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

А.ДАНИЯРХОДЖАЕВ

В этой статье мы установим несколько удивительных на первый взгляд фактов о правильном пятиугольнике. В частности, дадим решение задачи М2583, опубликованной в «Кванте» №11 за 2019 год.

Пусть a – сторона правильного пятиугольника, d – диагональ, h – расстояние между параллельными стороной и диагональю. Тогда $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – известное «золотое сечение», а $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Вывести

эти соотношения можно из «тождеств пятиугольника»

$$a^2 + ad = d^2, \quad (1)$$

$$a^2 + d^2 = 4h^2, \quad (2)$$

которые доказываются следующим образом. Зеркально отразим правильный пятиугольник $ABCDE$ относительно прямой CD (рис.1). Из подобия треугольников ACD и $AB'E'$ следует равносильная (1) пропорция $\frac{d}{a+d} = \frac{a}{d}$. Опустим перпендикуляр AH на прямую DE . Так как

Рис. 1

$DH = \frac{a+d}{2}$, по теореме Пифагора из треугольника ADH получаем (2).

Соотношения (1) и (2), в частности, лежат в основе решения задачи М2583:

На стороне DE и диагонали BE правильного пятиугольника $ABCDE$ «вовне» построены квадраты $DEFG$ и $BEHI$ (рис.2, а).

а) Докажите, что точки A , I и G лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на этой же прямой лежит центр O квадрата $BDJK$, построенного на диагонали BD «вовнутрь».

Оказывается, кроме прямой l_1 , о которой идет речь в задаче, меняя направление пристраивания квадратов («вовне» или «вовнутрь»), можно получить аналогичные прямые l_2 и l_3 (рис.2, б, в).

Для доказательства рассмотрим симметричную конструкцию из четырех правильных пятиугольников (рис.3): повернем правильный пятиугольник $ABCDE$ вокруг

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

точек B и D на -90° и $+90^\circ$ соответственно (считаем, что вращение против хода часовой стрелки совершается на положительные углы, а по ходу – на отрицательные); обозначим полученные пятиугольники $A_1BC_1D_1E_1$ и $A_2B_2C_2DE_2$; образ $A_2B_2C_2DE_2$ при повороте вокруг B_2 на $+90^\circ$ обозначим

$A'B_2C'D_1E'$. Очевидно, что BDB_2D_1 – квадрат, его центр O является центром симметрии объединения четырех пятиугольников, а вершины I и G квадратов $BEHI$ и $DEFG$, построенных на диагонали BE и стороне DE «вовне», совпадают с точками E_1 и E_2 . Таким образом, для решения задачи достаточно проверить, что прямоугольники $A_1E_2A_2E_1$ и $AE'A'E$ (с центром O и параллельными соответствующими сторонами) подобны. Их размеры: $(2h+d) \times a$ и $a \times (2h-d)$. В силу (2) отношения соответствующих сторон равны: $(2h+d) : a = a : (2h-d)$. Задача M2583 решена.

Используя рисунок 4, аналогично можно доказать утверждения о прямых l_2 и l_3 .

Покажем теперь, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке; l_2 и l_3 перпендикулярны; l_1 – биссектриса угла, образованного l_2 и l_3 , т.е. углы между прямыми l_1 и l_2 , l_1 и l_3 равны по 45° .

Рис. 5

Пусть FB (l_2) и HD (l_3) пересекаются в точке T (рис.5). Заметим, что при повороте вокруг E на -90° треугольник HED переходит в треугольник BEF . Значит, $HD \perp BF$. Поэтому точка T лежит на описанных окружностях квадратов $DEFG$ и $BEHI$. Но тогда TG – биссектриса угла